This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

INDIANA
UNIVERSITY
LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXVII. JAHRGANG

1928

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

KOMMISSIONSVERLAG DER HIRSCHWALDSCHEN BUCHHANDLUNG
BERLIN NW. 7

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

7) Alle Zuschriften, welche den Inhalt der Sitzungberichte betreffen, sind zu richten an den derzeitigen Schriftleiter, Herrn **Prof. Dr. Ernst Jacobsthal, Berlin W. 62, Kurfürstenstrasse 78.**

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

SIEBENUNDZWANZIGSTER JAHRGANG

1928
GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

KOMMISSIONSVERLAG DER HIRSCHWALDSCHEN BUCHHANDLUNG
BERLIN NW. 7

Digitized by Google

687316
QA2
.G-3 B4
v. 27-37
SMITHSONIAN INSTITUTION

Digitized by Google

9-21-55

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Cauer, W., Ein Satz über zwei zusammenhängende Hurwitzsche Polynome	25—31
Grüss, G., Über Gewebe auf Flächen in dreidimensionalen allgemeinen metrischen Räumen	3—15
Haenzel, G., Ein neuer Satz über die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen	16—19
Haenzel, G., Über ganze rationale Funktionen dritten Grades und ihre Kovarianten	20—24
Jonas, H., Über eine dritte geometrische Deutung der für die Affinsphären aufgestellten Transformationstheorie	57—78
Korn, A., „Wellenmechanik" und Wellenmechanik	79—91
Meyer, W. Fr., Über das Schließungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehung zu den elliptischen Funktionen	92—103
Ostrowski, A., Über das Hadamardsche Singularitätenkriterium in der Theorie der Taylorschen und Dirichletschen Reihen	32—47
Weiss, E. A., Über die Parameterdarstellung einer von C. Segre betrachteten Kongruenz (4,4) mittels Thetafunktionen ($p = 2$)	48—56
Mitgliederverzeichnis	104—109
241. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 26. Oktober 1927	1
242. Sitzung am 30. November 1927	1
243. „ „ 14. Dezember „	1
244. „ „ 25. Januar 1928	1
245. „ „ 29. Februar „	2
246. „ „ 28. März „	2
247. „ „ 25. April „	2
248. „ „ 23. Mai „	2
249. „ „ 27. Juni „	2

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

241. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 26. Oktober 1927.

Vorsitzender: zu Beginn und am Ende Herr Bieberbach; während der Wahl des ersten Vorsitzenden Herr E. Jacobsthal.

Anwesend: 30 Mitglieder und Gäste.

A) Geschäftlicher Teil:

1. Bericht des Kassenwartes. 2. Bericht des Kassenprüfers. Die Entlastung des Kassenwartes wird einstimmig beschlossen. 3. Neuwahl des Vorstandes und der Kassenprüfer. Herr Bieberbach wird durch Zettelwahl mit 23 von 24 abgegebenen gültigen Stimmen wieder zum ersten Vorsitzenden gewählt. Die übrigen Vorstandsmitglieder (Herr P. B. Fischer als Kassenwart und Herr E. Jacobsthal als zweiter Vorsitzender und Schriftführer) werden durch Zuruf wiedergewählt. Auch die Kassenprüfer, die Herren Singer und Zacharias werden wiedergewählt. 4. Neuwahl zweier Mitglieder der Redaktionskommission. An Stelle der satzungsgemäß ausscheidenden Herren Jonas und Schur werden die Herren Reißner und Salkowski in die Kommission gewählt.

Sämtliche gewählten Herren nehmen die Wahl an.

B) Wissenschaftlicher Teil:

Herr R. Rothe: Bemerkungen über wiederholte Quadraturen.

242. Sitzung am 30. November 1927.

Vorsitzender: Herr Bieberbach. Anwesend: 28 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr P. E. Böhmer: Monotone, ebene Streckenzüge (mit funktionentheoretischen Anwendungen).

243. Sitzung am 14. Dezember 1927.

Vorsitzender: Herr Bieberbach. Anwesend: 26 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr G. Haenzel: Die ganzen rationalen Funktionen n-ter Ordnung in ihrer Beziehung zur Polarentheorie der algebraischen Kurven n-ter Klasse (mit Benutzung eines hinterlassenen Entwurfes von S. Schicht).

Herr v. Bortkiewicz: Über ein statistisches Disparitätsmaß.

244. Sitzung am 25. Januar 1928.

Vorsitzender: Herr E. Jacobsthal. Anwesend: 23 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr G. Grüß: Über Gewebe auf Flächen in dreidimensionalen allgemeinen metrischen Räumen.

Digitized by Google

245. Sitzung am 29. Februar 1928.

Vorsitzender: Herr Bieberbach. Anwesend: 32 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr W. Cauer: Ein Satz über zwei zusammenhängende Hurwitzsche Polynome.

Herr E. A. Weiß: Parameterdarstellung einer von C. Segre behandelten Kongruenz (4,4) mittels Thetafunktionen ($p = 2$).

246. Sitzung am 28. März 1928.

Vorsitzender: Herr Bieberbach. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Jonas: Über eine dritte geometrische Deutung der für die Affinsphären aufgestellten Transformationstheorie.

Herr Mühlendyck: Über die vier- und fünfdimensionalen reellen analytischen Somenmannigfaltigkeiten.

247. Sitzung am 25. April 1928.

Vorsitzender: Herr Bieberbach. Anwesend: 26 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr E. Hopf: Über Integralgleichungen mit positivem Kern.

Herr Haenzel: Über ganze rationale Funktionen und ihre Kovarianten. (Mit Benutzung eines hinterlassenen Entwurfes von S. Schicht.)

Herr Haentzschel: Zur Lösung der diophantischen Aufgabe $ax^3+by^3 = cz^3$ in ganzen rationalen Zahlen.

248. Sitzung am 23. Mai 1928.

Vorsitzender: Herr E. Jacobsthal. Anwesend: 34 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr A. Korn: „Wellenmechanik“ und Wellenmechanik.

Herr P. Lorenz: Zur mathematischen Analyse von Wirtschaftskurven.

249. Sitzung am 27. Juni 1928.

Vorsitzender: Herr Bieberbach. Anwesend: 30 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr W. Fr. Meyer: Das Schließungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehung zu den elliptischen Funktionen.

Namens der Redaktionskommission legt Herr Bieberbach eine Arbeit von Herrn A. Ostrowski vor: Über das Hadamardsche Singularitätenkriterium in der Theorie der Taylorschen und Dirichletschen Reihen.

Digitized by Google

Über Gewebe auf Flächen in dreidimensionalen allgemeinen metrischen Räumen[1]).

Von Gerhard Grüß.

Die folgenden Untersuchungen behandeln die Theorie der Kurvennetze ohne Umwege auf Flächen mit allgemeiner Metrik im Rahmen der von Herrn Finsler[2]) in seiner Dissertation geschaffenen Differentialgeometrie allgemein metrischer Räume. Es gelingt, die von den Herren R. v. Lilienthal, R. Rothe und G. Scheffers[3]) für Flächen mit Riemannscher Maßbestimmung entwickelte Gewebetheorie weitgehend zu verallgemeinern und ihren engen Zusammenhang mit dem Hilbertschen Unabhängigkeitstheorem der Variationsrechnung aufzudecken.

1. Vorbemerkungen. Auf der Fläche

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

wird durch das Grundintegral eines regulären einfachsten Variationsproblems eine Maßbestimmung eingeführt: das Bogenelement der Kurve $\{u(t), v(t)\}$ ist

$$(1) \quad ds = F\left(x(u(t), v(t)), \cdots, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \cdots\right)dt \equiv f\left(u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)dt.$$

Beim Übergang von den Parametern u, v zu anderen Parametern $\bar{u}, \bar{v}$ durch die in einem Bereich $\mathfrak{B}(u, v)$ reguläre Transformation

$$(2) \quad \begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{v}) \\ v = v(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases} \qquad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0$$

geht das Bogenelement der Flächenkurve über in

$$ds = \bar{f}\left(\bar{u}, \bar{v}, \frac{d\bar{u}}{d\tau}, \frac{d\bar{v}}{d\tau}\right)d\tau.$$

---

1) Vorgetragen in der 244. Sitzung am 25. Januar 1928. — Unter gleichem Titel erscheint demnächst eine ausführlichere und weitergehende Darstellung der hier mitgeteilten Untersuchungen in den Mathematischen Annalen, Bd. 100, Heft 1.

2) Paul Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1918.

3) Ausführliche Literaturangabe bei G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume; 2. Aufl., 1921, Bd. I, S. 181.

Digitized by Google

Die Funktion $f\left(u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)$ und alle aus ihr durch eine reguläre Substitution (2) hervorgehenden Funktionen sind hinsichtlich der Längenmessung auf der Fläche gleichwertig; da auch die anderen geometrischen Größen (Winkel, Krümmung u. s. f.) invariant gegenüber der Substitution (2) definiert werden, kann man f die „Maßbestimmung" der Fläche nennen.

Die Funktion $f\left(u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)$ sei definiert für alle u, v eines Bereiches, auf dessen Untersuchung wir uns beschränken, und für alle $u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$ mit Ausnahme des Wertepaares $u' = 0$, $v' = 0$; sie sei definit (speziell $\neq 0$), positiv homogen erster Ordnung in Bezug auf u' und v' und besitze stetige partielle Ableitungen genügend hoher Ordnung nach allen Variablen.

Sämtliche über $f(u, v, u', v')$ gemachten Voraussetzungen sind auch für die aus f durch Anwendung von (2) erzeugten Funktionen erfüllt.

Durch die Gleichung

$$du_1 \frac{\partial f}{\partial u'}(u, v, u', v') + dv_1 \frac{\partial f}{\partial v'}(u, v, u', v') = 0 \tag{3}$$

wird dem gerichteten Linienelement $\{u, v, u'\,dt, v'\,dt\}$ das *transversale* Linienelement $\{u_1 = u,\ v_1 = v,\ du_1, dv_1\}$ zugeordnet. Sind u' und v' durch die Differentialgleichungen $u' = u'(u, v)$, $v' = v'(u, v)$ einer einparametrigen Kurvenschar als Funktionen des Ortes auf der Fläche gegeben, dann stellt Gleichung (3) die Differentialgleichung der Transversalen der ersten Kurvenschar dar. Die Transversalen einer Schar geodätischer Linien (im Sinne der Maßbestimmung f) sind geodätische Aequidistante[4]).

Herr Finsler[5]) erklärt den im Sinne der Maßbestimmung f gemessenen Winkel folgendermaßen: Der cosinus des Schnittwinkels φ der Kurven C und Γ ist gleich dem Grenzwert des Verhältnisses der transversalen Projektion auf C einer auf Γ abgetragenen Bogenlänge zu dieser Bogenlänge selbst, für den Fall, daß die projizierte Bogenlänge gegen Null konvergiert. „Transversale Projektion" soll heißen, daß die projizierende Kurve Transversale von C ist. Aus $\cos\varphi$ folgt φ durch die Bestimmung, daß $|\varphi|$ möglichst klein und $\operatorname{sign}\varphi$ willkürlich ist. $\cos \widehat{\Gamma C} = \cos \widehat{C\Gamma}$ gilt

4) Vgl. z. B. A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 2. Aufl., 1925, S. 138 ff., sowie C. Carathéodory, Acta Math., Bd. 47, Heft 3.

5) Finsler, a. a. O., S. 38 ff.

Digitized by Google

nur für den Fall der Riemannschen Maßbestimmung

$$f = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2},$$

und allgemein, wenn sich die Kurven C und Γ berühren: dann ist $\cos \widehat{\Gamma C} = \cos \widehat{C\Gamma} = 1$. Es muß daher verabredet werden, welcher von den beiden Schenkeln eines von null verschiedenen Winkels jeweils zu bevorzugen ist. Da in den folgenden Untersuchungen meist nur Paare von Winkeln mit einem gemeinsamen Schenkel eine Rolle spielen, liegt es nahe, bei solchen benachbarten Winkeln den gemeinsamen Schenkel zu bevorzugen: seine Transversale ist die projizierende Kurve, auf den anderen Schenkeln werden die projizierenden Längen abgetragen. Wir wollen dafür kurz sagen: „Die Winkel werden zum gemeinsamen Schenkel hin gemessen".

Sind die Gleichungen der sich schneidenden Kurven

$$(C)\quad u = u_0(t),\ v = v_0(t) \quad \text{und} \quad (\Gamma)\quad u = u_1(\tau),\ v = v_1(\tau),$$

und ist φ der von der Kurve Γ zur Kurve C hin gemessene Winkel, dann ist nach der Finslerschen Definition

$$\cos\varphi = \frac{u_1' \frac{\partial f}{\partial u'}(u, v, u_0', v_0') + v_1' \frac{\partial f}{\partial v'}(u, v, u_0', v_0')}{f(u, v, u_1', v_1')}. \tag{4}$$

Der cosinus ist invariant gegen die Abänderung der Maßbestimmung f durch Multiplikation mit einer Ortsfunktion $P(u, v)$. Diese kann so gewählt werden, daß eine vorgegebene Schar von ∞^1 Kurven Extremalenschar des Variationsproblems

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} P(u, v) . f(u, v, u', v')\, dt = 0$$

wird. Denn die ∞^1 Integralkurven der Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dt} = u'(u, v), \qquad \frac{dv}{dt} = v'(u, v)$$

sind dann und nur dann geodätische Linien im Sinne der Maßbestimmung $P.f$, wenn ihre Gleichungen die für die Funktion $P.f$ gebildete Euler-Weierstraßische Differentialgleichung $G(u, v, u', v', u'', v'') = 0$ befriedigen, die folgende partielle Differentialgleichung für P darstellt:

$$G.P(u, v) + \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v'} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u'} = 0, \tag{5}$$

wobei jetzt in G die Funktion f einzusetzen ist.

Digitized by Google

2. Begriff des Gewebes. Integrabilitätsbedingung. *Ein Kurvennetz heißt „ohne Umwege im Sinne der Maßbestimmung f" oder kurz ein f-Gewebe, wenn die im f-Sinne gemessene Bogenlänge eines beliebigen geschlossenen nur aus Netzkurven bestehenden Weges null ist.* Voraussetzung ist dabei, daß die Netzkurven in bestimmter Weise orientiert sind: beim Durchlaufen der Kurven im einen oder anderen Sinne ist die Bogenlänge positiv bezw. negativ zu zählen; das ist stets möglich, da $f(u, v, u', v')$ definit ist.

Notwendig und hinreichend für die Gewebeeigenschaft des Netzes

$$u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta), \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0 \tag{6}$$

ist also die Gleichung

$$I \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} f\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta} f\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) = 0. \tag{7}$$

Diese Integrabilitätsbedingung läßt sich durch Einführung der Winkelhalbierenden

$$u = u_0(t, A), \quad v = v_0(t, A) \tag{8}$$

der Netzkurven passend umformen. Dabei hat man unter den Kurven (8) die Integralkurven folgender Differentialgleichung zu verstehen:

$$\frac{u_\alpha f_{u'}(u, v, u_0', v_0') + v_\alpha f_{v'}(u, v, u_0', v_0')}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)} = \frac{u_\beta f_{u'}(u, v, u_0', v_0') + v_\beta f_{v'}(u, v, u_0', v_0')}{f(u, v, u_\beta, v_\beta)} \tag{9}$$

in der

$$u_\alpha = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad u_\beta = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad v_\alpha = \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \quad v_\beta = \frac{\partial v}{\partial \beta}$$

den Gleichungen (6) zufolge Funktionen von u und v sind.

Im allgemeinen werden die Winkelhalbierenden nicht eindeutig bestimmt sein; für das Folgende genügt es aber, irgend eine Schar von Winkelhalbierenden zu bestimmen, indem man sich nötigenfalls auf einen passenden Bereich der u-v-Ebene beschränkt; sie mögen durch die Gleichungen (8) dargestellt werden.

Der Winkel ω zwischen den Kurven (8) und den Netzkurven, der der „halbe Maschenwinkel" des Netzes heißen soll, ist durch die Gleichung (9) definiert:

$$\cos\omega = \frac{u_\alpha f_{u'}(\ldots u_0', v_0') + v_\alpha f_{v'}(\ldots u_0', v_0')}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)} = \frac{u_\beta f_{u'}(\ldots u_0', v_0') + v_\beta f_{v'}(\ldots u_0', v_0')}{f(u, v, u_\beta, v_\beta)}. \tag{10}$$

Digitized by Google

Führt man nun in die Integrabilitätsbedingung (7) aus Gleichung (10)

$$f(u, v, u_\alpha, v_\alpha) = \frac{1}{\cos\omega}(u_\alpha f_{u'}(\dots u_0', v_0') + v_\alpha f_{v'}(\dots u_0', v_0')),$$

$$f(u, v, u_\beta, v_\beta) = \frac{1}{\cos\omega}(u_\beta f_{u'}(\dots u_0', v_0') + v_\beta f_{v'}(\dots u_0', v_0'))$$

ein, dann erhält man nach leichter Zwischenrechnung

$$(11)\quad 0 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)} \cdot \left[\frac{G(u_0, v_0)}{\cos\omega} + \frac{d}{d\omega}\frac{1}{\cos\omega}\left\{\frac{\partial\omega}{\partial u} f_{v'}(\dots u_0', v_0') - \frac{\partial\omega}{\partial v} f_{u'}(\dots u_0', v_0')\right\}\right],$$

worin $G(u_0, v_0)$ die linke Seite der Euler-Weierstraßischen Differentialgleichung

$$(12)\quad G \equiv (u'v'' - v'u'')f_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v'} - \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u'} = 0 \quad \left(f_1 = \frac{f_{u'u'}}{v'^2} = -\frac{f_{u'v'}}{u'v'} = \frac{f_{v'v'}}{u'^2}\right)$$

ist, genommen für die Funktionen $u = u_0(t, A)$, $v = v_0(t, A)$. Wegen $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)} \neq 0$ geht die Integrabilitätsbedingung in

$$(13)\quad p \cdot G(u_0, v_0) + \frac{\partial p}{\partial u} f_{v'}(\dots u_0', v_0') - \frac{\partial p}{\partial v} f_{u'}(\dots u_0', v_0') = 0$$

über, wenn $\frac{1}{\cos\omega} = p(u, v)$ gesetzt wird. Da im ganzen Bereich $\cos\omega \neq 0$ ist, wie man leicht beweist, ist die eben durchgeführte Umformung der Gleichung (7) erlaubt.

Nun soll ein Netz „spiegelbildlich" zur Schar seiner *Winkelhalbierenden* genannt werden, und ein zu einer Schar spiegelbildliches Netz soll bezüglich einer zweiten Schar „gestreift" heißen (der Begriff ist für Gewebe auf Flächen im Euklidischen Raum von Herrn Rothe eingeführt worden), wenn der halbe Maschenwinkel des Netzes längs der Kurven der zweiten Schar konstant ist. Endlich mögen Kurven „schiefe Aequidistante" einer Kurvenschar heißen, wenn je zwei von ihnen auf allen Individuen der Schar gleiche Bogenlängen abschneiden, während für den Schnittwinkel die Ungleichungen $\cos\omega \neq 0, \neq 1$ gelten.

3. Sätze über gestreifte Gewebe. Aus den Gleichungen (13) und

$$(14)\quad du_1 f_{u'}(u_0, v_0, u_0', v_0') + dv_1 f_{v'}(u_0, v_0, u_0', v_0') = 0$$

lassen sich nun sofort folgende Sätze über gestreifte Gewebe ableiten:

Satz Ia. *Ein zu einer einparametrigen Extremalenschar*

$$(15)\quad \begin{cases} u = u_0(t, A) \\ v = v_0(t, A) \end{cases}$$

Digitized by Google

spiegelbildliches Netz

$$(16) \qquad \begin{cases} u = u(\alpha, \beta) \\ v = v(\alpha, \beta) \end{cases}$$

ist ein Gewebe, wenn es bezüglich der Transversalen

$$(17) \qquad \begin{cases} u = u_1(\tau, B) \\ v = v_1(\tau, B) \end{cases}$$

der Kurven (15) *gestreift ist.*

Satz Ib. *Wenn ein Gewebe* (16) *zur Extremalenschar* (15) *spiegelbildlich ist, dann ist es bezüglich der zu* (15) *transversalen Schar* (17) *gestreift.*

Satz Ic. *Wenn ein Gewebe bezüglich der Transversalen seiner Winkelhalbierenden gestreift ist, dann sind die Winkelhalbierenden Extremalen.*

Beweis zu Ia. Aus $G(u_0, v_0) = 0$ und

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\omega}\right) du_1 + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\omega}\right) dv_1 = 0$$

folgt Gleichung (13).

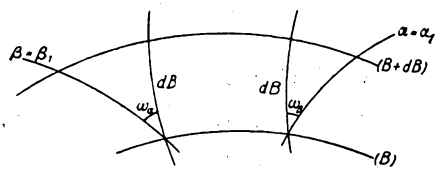
Beweis zu Ib. Aus $G(u_0, v_0) = 0$ und $I = 0$ folgt (18).

Beweis zu Ic. Aus $I = 0$ und (18) folgt $G(u_0, v_0) = 0$, weil $\frac{1}{\cos\omega} = \frac{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)}{u_\alpha f_{u'}(\ldots u_0', v_0') + v_\alpha f_{v'}(\ldots u_0', v_0')} \neq 0$ gilt.

Die geometrische Definition des cosinus als Limes des Verhältnisses zweier (verallgemeinerten) Bogenlängen gestattet einen rein geometrischen Beweis des Satzes I. Zunächst gilt nämlich der folgende **Hilfssatz:**

Die Transversalen einer Extremalenschar schneiden auf den beiden Kurvenscharen eines Netzes, das zur Extremalenschar spiegelbildlich und bezüglich der Transversalenschar gestreift ist, gleiche Längen ab, d. h. sie sind schiefe Aequidistante „des Netzes".

Beweis. $\{u_1(\tau, B), v_1(\tau, B)\}$ und $u_1(\tau, B + dB), v_1(\tau, B + dB)\}$ seien zwei benachbarte Transversalen. B bedeute den auf den Extremalen gemessenen Abstand der ersten Transversale von einer willkürlichen 0-Transversalen. Die beiden Kurven schneiden auf zwei beliebigen Kurven $\beta = \beta_1$ und $\alpha = \alpha_1$ des Netzes $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ Bogenlängen $\int f\,dt$ ab, deren Differentiale



Figur 1.

Digitized by Google

$$ds_\alpha = ds_{\beta=\beta_1} = \frac{d}{dB}\left[\int f\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial \alpha}(\alpha, \beta_1), \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\alpha, \beta_1)\right) d\alpha\right] dB$$

und

$$ds_\beta = ds_{\alpha=\alpha_1} = \frac{d}{dB}\left[\int f\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial \beta}(\alpha_1, \beta), \frac{\partial v}{\partial \beta}(\alpha_1, \beta)\right) d\beta\right] dB$$

sind, wobei die Integrale über die den Schnittpunkten der Transversalen mit den Netzkurven entsprechenden α- bzw. β-Bereiche zu erstrecken sind. Da nun $\cos \omega_\alpha = \frac{dB}{ds_\alpha}$, $\cos \omega_\beta = \frac{dB}{ds_\beta}$ und $\omega_\alpha = \omega_\beta$ gilt, folgt

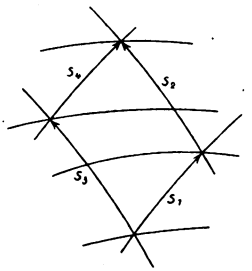
$$\int_{B_1}^{B_2} \frac{d}{dB}\left[\int f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\, d\alpha\right] dB = \int_{B_1}^{B_2} \frac{d}{dB}\left[\int f(u, v, u_\beta, v_\beta)\, d\beta\right] dB,$$

w. z. b. w. Ebenso schließt man, daß die Transversalen auf zwei Kurven $\alpha = \alpha_1$ und $\alpha = \alpha_2$ des Netzes gleiche Längen abschneiden.

Also gilt für jedes einfache Netzviereck $s_1 + s_2 = s_3 + s_4$, womit Satz Ia bewiesen ist.

Um auch (Ib) und (Ic) geometrisch zu beweisen, benutzt man folgenden, für allgemeine (nicht notwendig gestreifte) Gewebe geltenden

Satz II. *Die Transversalen der Winkelhalbierenden eines Gewebes sind schiefe Aequidistante dieses Netzes.*



Figur 2.

Beweis. Die Winkelhalbierenden eines Gewebes genügen der Gleichung (13), sie sind also Extremalen des Variationsproblems

$$\int_{t_0}^{t_1} f(u, v, u', v')\, p(u, v)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{f(u, v, u', v')}{\cos \omega}\, dt = \text{Extr.},$$

und ihre Transversalen sind geodätische Aequidistante im Sinne der Maßbestimmung $\frac{f}{\cos \omega}$; also ist längs irgend einer Transversalen $B = \text{const}$

$$\frac{d}{dB}\left(\int_{t(B_0)}^{t(B)} \frac{f(u_0, v_0, u_0', v_0')}{\cos \omega}\, dt\right) = \frac{f(u_0, v_0, u_0', v_0')}{\cos \omega}\, \frac{dt}{dB}$$

konstant, wobei ω der halbe Maschenwinkel des gegebenen Netzes ist. Nach seiner Definition ist nun

$$\cos \omega = \frac{f(u_0, v_0, u_0', v_0')\frac{dt}{dB}}{f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\frac{d\alpha}{dB}} = \frac{f(u_0, v_0, u_0', v_0')\frac{dt}{dB}}{f(u, v, u_\beta, v_\beta)\frac{d\beta}{dB}}.$$

Digitized by Google

Also folgt, daß $f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\frac{d\alpha}{dB}$ und $f(u, v, u_\beta, v_\beta)\frac{d\beta}{dB}$ längs jeder Transversalen konstant sind, d. h. aber, die Transversalen sind schiefe Aequidistante des Netzes.

Sind die Winkelhalbierenden nun *Extremalen* (Voraussetzung des Satzes Ib), dann gilt weiter $f(u_0, v_0, u_0', v_0')\frac{dt}{dB} = \text{const.}$ längs der Transversalen, also ist $\cos\omega$ längs dieser Kurven konstant, d. h. das Gewebe ist gestreift.

Endlich Satz Ic. Die Transversalen sind geodätische Aequidistante im Sinne der Maßbestimmung $\frac{f(u, v, u', v')}{\cos\omega}$, d. h. es ist

$$\frac{f(u_0(t_1, A_1), v_0(t_1, A_1), u_0', v_0')}{\cos\omega_1}\frac{dt_1}{dB} = \frac{f(u_0(t_2, A_2), v_0(t_2, A_2), u_0', v_0')}{\cos\omega_2}\frac{dt_2}{dB}.$$

Da das Gewebe gestreift ist ($\omega_1 = \omega_2 = \cdots$), sind die Transversalen im Sinne der Maßbestimmung $f(u, v, u', v')$ selbst aequidistant, und also sind ihre Gefällkurven, nämlich die Winkelhalbierenden des Gewebes, Extremalen [6]).

4. Der Hauptsatz über allgemeine Gewebe. Die Integrabilitätsbedingung (13) liefert zusammen mit der Gleichung (5) folgendes Merkmal für allgemeine Gewebe:

Ein Netz ist dann und nur dann ein Gewebe, wenn seine Winkelhalbierenden geodätische Linien im Sinne der Maßbestimmung $\frac{f(u, v, u', v')}{\cos\omega}$ *sind, wobei* $\omega(u, v)$ *den halben Maschenwinkel des Netzes bedeutet.*

Die darin enthaltene *notwendige* Bedingung ist der Inhalt des Satzes II. Die *hinreichende* Bedingung lehrt, daß man allgemeine Gewebe folgendermaßen erzeugen kann:

Satz III. *Man konstruiere zu einer beliebig gegebenen einparametrigen Kurvenschar*

$$(19a)\qquad \begin{cases} u = \bar{U}(\alpha, C) \\ v = \bar{V}(\alpha, C) \end{cases} \quad (C \text{ Scharparameter, } \alpha \text{ Parameter auf den Kurven der Schar})$$

eine beliebige Schar schiefwinkliger Aequidistanten

$$(20)\qquad \begin{cases} u = u_1(\tau, B) \\ v = v_1(\tau, B), \end{cases}$$

bestimme mit Hilfe der Differentialgleichung

$$(3)\qquad \frac{du_1}{d\tau}(u, v) f_{u'}(u, v, u_0', v_0') + \frac{dv_1}{d\tau}(u, v) f_{v'}(u, v, u_0', v_0') = 0$$

6) C. Carathéodory, Die Methode der geodätischen Aequidistanten und das Problem von Lagrange, Acta Mathem., Bd. 47, Heft 3.

Digitized by Google

irgend eine Schar

$$\left\{\begin{aligned} u &= u_0(t, A) \\ v &= v_0(t, A), \end{aligned}\right. \tag{21}$$

deren Transversalen also die Kurven (20) *sind, und suche die Kurvenschar*

$$\left\{\begin{aligned} u &= \bar{\bar{U}}(\beta, D) \\ v &= \bar{\bar{V}}(\beta, D), \end{aligned}\right. \tag{19b}$$

die mit (19a) *zusammen spiegelbildlich zu* (21) *ist. Dann bildet das Netz* (19a, b) *ein Gewebe.*

Beweis. Zunächst zeigt man leicht, daß die beiden Kurvenscharen (19a, b) ein *Netz* bilden, daß also

$$\delta = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \alpha}\frac{\partial \bar{\bar{V}}}{\partial \beta} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \alpha}\frac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial \beta} \neq 0$$

ist. Dann läßt sich dieses Netz in der Form

$$\left\{\begin{aligned} u &= u(\alpha, \beta) \\ v &= v(\alpha, \beta) \end{aligned}\right. \tag{19}$$

darstellen. Um seinen Gewebecharakter nachzuweisen, führe man auf den schiefen Aequidistanten (20) der Kurven $\beta = \text{const.}$ als den die einzelne Kurve charakterisierenden Parameter B den Kurvenparameter α der Kurven $\beta = \text{const.}$ ein, und als Parameter τ auf der einzelnen $B = \alpha = \text{const.}$-Kurve den Scharparameter β der anderen Schar. Das ist, wie man leicht einsieht, möglich und liefert die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} u &= U(\alpha, \beta) \\ v &= V(\alpha, \beta) \end{aligned}\right. \tag{22}$$

für die Schar $\beta = \text{const.}$ und ihre schiefen Aequidistanten $\alpha = \text{const.}$ Wegen der schiefen Aequidistanz der Kurven $\alpha = \text{const.}$ gilt

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha} f\left(U, V, \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) d\alpha \Big|_{\beta=\beta_1} = \int_{\alpha_1}^{\alpha} f\left(U, V, \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) d\alpha \Big|_{\beta=\beta_2}$$

für jedes α, β_1 und β_2, also

$$\frac{\partial}{\partial \beta} f\left(U(\alpha, \beta), V(\alpha, \beta), \frac{\partial U}{\partial \alpha}(\alpha, \beta), \frac{\partial V}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)\right) = 0. \tag{23}$$

Um zu zeigen, daß die Scharen $\alpha = \text{const.}$ auf den Integralkurven $u = u_0(t, A)$, $v = v_0(t, A)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} f_{u'}(u, v, u_0', v_0') + \frac{\partial V}{\partial \beta} f_{v'}(u, v, u_0', v_0') = 0$$

687316

Digitized by Google.

gleiche Längen $\int \frac{f}{\cos\omega}\,dt$ abschneiden, muß die Relation

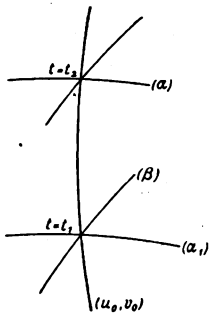


Fig 3.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{t_1}^{t_2}\frac{f(u_0, v_0, u_0', v_0')}{\cos\omega}\,dt \equiv \frac{\partial J}{\partial\beta}(\alpha, \alpha_1, \beta) = 0$$

für jedes α bewiesen werden. Dafür ist

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0 \tag{24}$$

notwendig und auch hinreichend. Denn aus (24) folgt $\frac{\partial J}{\partial\beta} = a(\alpha_1, \beta)$, und da $J(\alpha = \alpha_1, \alpha_1, \beta) = 0$ ist für jedes β, also auch $\frac{\partial J}{\partial\beta}(\alpha = \alpha_1, \alpha_1, \beta) = 0$ gilt, und da α in $a(\alpha_1, \beta)$ nicht vorkommt, ist $\frac{\partial J}{\partial\beta} = a(\alpha_1, \beta) = 0$ für jedes α, wenn nur (24) gilt. Die Differentiation des Integrals ergibt wegen

$$f(u, v, u', v') = u' f_{u'}(u, v, u', v') + v' f_{v'}(u, v, u', v')$$

und $u_0(t, A) = U(\alpha, \beta)$, $v_0(t, A) = V(\alpha, \beta)$

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \frac{f_{u'}(\ldots u_0', v_0')}{\cos\omega}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{f_{v'}(\ldots u_0', v_0')}{\cos\omega}\frac{\partial V}{\partial\alpha},$$

und da

$$\cos\omega = \frac{\frac{\partial U}{\partial\alpha} f_{u'}(\ldots u_0', v_0') + \frac{\partial V}{\partial\alpha} f_{v'}(\ldots u_0', v_0')}{f\left(u, v, \frac{\partial U}{\partial\alpha}, \frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)}$$

ist,

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = f\left(U, V, \frac{\partial U}{\partial\alpha}, \frac{\partial V}{\partial\alpha}\right).$$

Wegen Gleichung (23) ist daher (24) erfüllt. Also sind die schiefen Aequidistanten (20) geodätische Aequidistante im Sinne der Maßbestimmung $\frac{f}{\cos\omega}$. Als Gefällkurven der Schar geodätischer Aequidistanten sind die Kurven

$$\left\{\begin{array}{l} u = u_0(t, A) \\ v = v_0(t, A) \end{array}\right. \tag{21}$$

geodätische Linien der Maßbestimmung $\frac{f}{\cos\omega}$ und befriedigen daher die Gleichung (5) auf Seite 5 für

$$P = \frac{1}{\cos\omega} = p(u, v), \quad u = u_0(t, A), \quad v = v_0(t, A),$$

Digitized by Google

d. h. die Gleichung (13). Also ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt und das Netz ist ein Gewebe.

5. Zusammenhang mit dem Hilbertschen Unabhängigkeitstheorem. Zu den Sätzen II und III über allgemeine Gewebe führten zwei wesentliche Schritte: erstens die Umformung der Integrabilitätsbedingung (7) in die Euler-Weierstraßische Differentialgleichung (13) $G(p.f) = 0$; zweitens der Nachweis, daß schiefe Aequidistante eines Netzes mit dem halben Maschenwinkel ω geodätische Aequidistante im $\frac{f}{\cos\omega}$-Sinne darstellen. Der erste Schritt wurde hier dem eigentlichen Beweis als eine identische Transformation der Integrabilitätsbedingung vorangeschickt, ein Kunstgriff, der sich, wie überhaupt die Aufstellung der Integrabilitätsbedingung, durch Anwendung des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes ersparen läßt.

Für ein Weierstraßisches Variationsproblem

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \varphi(u, v, u', v')\, dt = 0 \tag{25}$$

kann man den Hilbertschen Satz bekanntlich so formulieren: Sind $\frac{du_0}{dt} = u_0'(u, v)$, $\frac{dv_0}{dt} = v_0'(u, v)$ die Differentialgleichungen der ∞^1 Extremalen eines Feldes, dann ist das Integral

$$\int_{(C)} \left\{ u' \frac{\partial}{\partial u'} \varphi(u, v, u_0', v_0') + v' \frac{\partial}{\partial v'} \varphi(u, v, u_0', v_0') \right\} dt$$

von dem ganz im Felde liegenden Integrationsweg $C = \{u(t), v(t)\}$ unabhängig, also eine Funktion allein von dem Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges. Dabei muß der Weg $\{u(t), v(t)\}$ stetig sein und bis auf endlich viele Ecken in jedem Punkte eine Tangente besitzen.

Man setze nun

$$\varphi(u, v, u', v')\, dt = \underset{(\varphi)}{ds}$$

und führe den von der Kurve $\{u(t), v(t)\}$ zu der durch den Punkt gehenden Extremalen $\{u_0(t), v_0(t)\}$ des Problems (25) gemessenen Winkel ω durch

$$\underset{(\varphi)}{\cos\omega} = \frac{u' \varphi_{u'}(\ldots u_0', v_0') + v' \varphi_{v'}(\ldots u_0', v_0')}{\varphi(\ldots u', v')}$$

ein. Dann geht das Hilbertsche unabhängige Integral, längs

Digitized by Google

eines geschlossenen Weges erstreckt, über in

$$\int_0^{(\varphi)} \cos_{(\varphi)} \omega \, ds = 0. \tag{26}$$

Nun sei nach dem Verfahren des Satzes III ein Netz

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u(\alpha, \beta) \\ v = v(\alpha, \beta) \end{array} \right. \tag{19}$$

konstruiert, dessen Winkelhalbierende (im f-Sinne)

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_0(t, A) \\ v = v_0(t, A) \end{array} \right. \tag{21}$$

Extremalen im Sinne der Maßbestimmung $\frac{f}{\cos \omega}$ sind, unter ω den im f-Sinne von den Netzkurven zu der Winkelhalbierenden gemessene Winkel verstanden. Dies wird genau wie oben bewiesen.

Die Konstruktion des Netzes (19) wird wieder auf einen Bereich beschränkt, den die Kurven der Schar (21) eindeutig und lückenlos ausfüllen, sodaß er ein Feld im Sinne des Variationsproblems (25) darstellt, wenn man

$$\varphi(u, v, u', v') \equiv \frac{f(u, v, u', v')}{\cos \omega} \qquad (\cos \omega \neq 0)$$

setzt. Man beachte, daß nach dem auf S. 5 Gesagten

$$\cos_{(\varphi)} \omega = \cos \omega = \cos_{(f)} \omega$$

ist, und wende auf einen aus Netzkurven gebildeten geschlossenen Weg den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Form der Gleichung (26) an:

$$\int_0^{(\varphi)} \cos_{(\varphi)} \omega \, ds = \int_0 \cos \omega \frac{f}{\cos \omega} dt = \int_0 f \, dt = \int_0 ds = 0,$$

womit Satz III schon bewiesen ist.

Beweis des Satzes Ia und des Hilfssatzes. Wenn das Netz spiegelbildlich zu Extremalen im f-Sinne und gestreift bezüglich ihrer Aequidistanten ist, kann man außer wie beim Beweis von Satz III so vorgehen: die Anwendung des Hilbertschen Integralsatzes für $\varphi \equiv f$ auf eine geschlossene Kurve, die aus zwei Aequidistanten und den von ihnen herausgeschnittenen Stücken der Netzkurven besteht, liefert, da längs der Aequidistanten $\cos \omega = 0$ ist, die Gleichung

Digitized by Google

$$\int_{(1)}^{(2)} \cos \omega_\alpha \, ds_\alpha + \int_{(3)}^{(4)} \cos \omega_\beta \, ds_\beta = 0,$$

in der

$$ds_\alpha = f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\, d\alpha\big|_{\beta = \text{const}}, \qquad ds_\beta = f(u, v, u_\beta, v_\beta)\, d\beta\big|_{\alpha = \text{const}}$$

gesetzt ist, oder, wenn die Aequidistanten die Kurven $\beta = \beta_1$ und $\beta = \beta_2$ treffen:

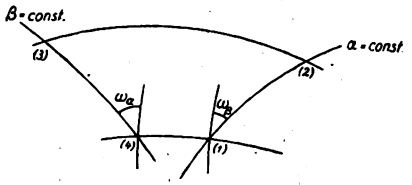
$$\int_{(1)}^{(2)} \cos \omega_{\alpha_1} \, ds_{\alpha_1} + \int_{(3)}^{(4)} \cos \omega_{\alpha_2} \, ds_{\alpha_2} = 0$$

bei

$$ds_{\alpha_1} = f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\, d\alpha\big|_{\beta = \beta_1}, \qquad ds_{\alpha_2} = f(u, v, u_\alpha, v_\alpha)\, d\alpha\big|_{\beta = \beta_2}.$$

Da $\omega_\alpha = \omega_\beta$ längs der Aequidistanten konstant und $\cos \omega_\alpha \neq 0$ ist, folgt durch Grenzübergang

$ds_\alpha + ds_\beta = 0$ und $ds_{\alpha_1} + ds_{\alpha_2} = 0$.



Figur 4.

Integriert man diese Gleichungen über Kurvenstücke des Netzes, die zwischen gleichen Aequidistanten liegen, dann erhält man den Inhalt des Hilfssatzes; durch Integration über ein ganzes Netzviereck dagegen den des Satzes Ia.

Daß sich die Sätze Ib, Ic und II nicht mit Hilfe des Hilbertschen Theorems beweisen lassen, ist einleuchtend.

Bezüglich weiterer Ergebnisse bei der Untersuchung der Gewebe auf Flächen in allgemein-metrischen Räumen darf ich auf die in der Fußnote 1) angeführte Arbeit verweisen.

Digitized by Google

Ein neuer Satz über die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen[1]).

Mit Benutzung eines hinterlassenen Entwurfes des Herrn Siegfried Schicht[1]).

Von Gerhard Haenzel.

1. Die ganze rationale Funktion $n$ten Grades $G_n(z)$ habe die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots z_n$. Ferner seien $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots z_{n-k}^{(k)}$ die Nullstellen ihrer $k$ten Ableitung. Dann besagt ein Satz von Gauß, daß jeder konvexe Bereich, der die Nullstellen von $G_n(z)$ enthält, auch die Nullstellen aller Ableitungen enthält. Da durch die erste Gruppe von Nullstellen, nämlich durch $z_1, z_2, \ldots z_n$, die Nullstellen aller Ableitungen völlig bestimmt sind, gibt der angeführte Satz den geometrischen Zusammenhang dieser Nullstellen nicht erschöpfend wieder. Auf Grund einiger Sätze von Plücker und Siebeck läßt sich aber die eindeutige geometrische Abhängigkeit aller solcher Nullstellengruppen von den Nullstellen der Ausgangsfunktion $G_n(z)$ unmittelbar ableiten.

2. In seiner bekannten Abhandlung über die Brennpunkte der algebraischen ebenen Kurven $n$ter Klasse[2]) gelangt Plücker zu folgendem Resultat: Ist bei Annahme eines rechtwinkligen Koordinatensystemes $ux + vy + w = 0$ die Gleichung einer Geraden und daher:

$$F_n(u, v, w) = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Kurve $n$ter Klasse, so ergibt

1) Vorgetragen in der 243. Sitzung am 14. Dezember 1927. — Siegfried Schicht, geboren 1888 in Berlin, bestand Ostern 1908 die Reifeprüfung an der Hohenzollernschule, Abteilung Oberrealschule, in Berlin-Schöneberg und studierte Mathematik und Physik an der Berliner Universität. Als Student veröffentlichte er eine Abhandlung: „Über die mittlere Entfernung zweier Punktsysteme voneinander" (Archiv der Mathematik u. Physik, III. Reihe, XXI, Heft 3). Nachdem er anfangs 1914 seine Oberlehrerprüfung „mit Auszeichnung" bestanden hatte, trat er in den pädagogischen Vorbereitungsdienst ein und war mit seiner Dissertation beschäftigt als der Krieg ausbrach. Er ging als Freiwilliger ins Feld und fand den Tod bei Ypern.

Durch seinen früheren Lehrer und Direktor, Herrn GStR. Prof. Dr. Müller, erhielt ich das von Herrn Schicht hinterlassene Manuskript, welches der obigen Abhandlung zu Grunde liegt. Ich freue mich aussprechen zu können, daß der Hauptsatz (Absatz 3) dieser Abhandlung in dem genannten Entwurf enthalten ist.

2) Plücker, Crelle, Band 10, S. 84.

Digitized by Google

die Gleichung:

$$F_n(-1, -i, x+iy) = 0$$

die reellen Brennpunkte dieser Kurve. Ferner zeigte Siebeck[3]), daß:

$$\frac{\partial^k F_n(-1, -i, z)}{\partial z^k} = 0, \quad \text{wo } z = x+iy,$$

die Bestimmungsgleichung für die $n-k$ reellen Brennpunkte der $k$ten Polare der unendlich fernen Geraden für die Kurve $F_n(u, v, w) = 0$ ist.

Umgekehrt können n in der Ebene gegebene Punkte $P_1, P_2, \dots P_n$ als die reellen Brennpunkte algebraischer Kurven $n$ter Klasse k^n angesehen werden. Eine dieser Kurven zerfällt in n Strahlenbüschel 1. Ordnung mit den Mittelpunkten $P_1, P_2, \dots P_n$. Die erste Polare der unendlich fernen Geraden für diese zerfallene Kurve k^n ist eine algebraische Kurve $(n-1)$ter Klasse. Sie berührt die $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungsstrecken der n Punkte in deren Halbierungspunkten[4]).

3. Haben die Nullstellen $z_1, z_2, \dots z_\nu, .. z_n$ der ganzen rationalen Funktion $G_n(z)$ die rechtwinkligen Koordinaten x_ν, y_ν, so lautet die Gleichung der in die Punkte $z_1, z_2, \dots z_\nu, .. z_n$ zerfallenen Kurve $n$ter Klasse:

$$\alpha \qquad F_n(u, v, w) \equiv \prod_{\nu=1}^{n} (ux_\nu + vy_\nu + w) = 0.$$

Ihre Brennpunkte sind gegeben (2.) durch die Gleichung:

$$\beta \qquad \prod_{\nu=1}^{n} (-x_\nu - iy_\nu + z) \equiv \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu) = 0,$$

d. h. die Brennpunkte sind die Nullstellen $z_1, z_2, \dots z_\nu, .. z_n$. Ferner ist (2.) die Gleichung für die $n-1$ reellen Brennpunkte der ersten Polare der unendlich fernen Geraden für die zerfallene Kurve $F_n(u, v, w) = 0$:

$$\gamma \qquad \frac{\partial F_n(-1, -i, z)}{\partial z} \equiv \frac{\partial \Pi(z - z_\nu)}{\partial z} = 0.$$

Die reellen Brennpunkte der ersten Polare sind also die Nullstellen der ersten Ableitung von $G_n(z)$. Diese Polare berührt das durch $z_1, z_2, \dots z_\nu, \dots z_n$ bestimmte vollständige n-Eck in seinen Seitenmitten (2.). Daher ist bewiesen:

3) Siebeck, Crelle, Band 10, S. 175.

4) Siebeck, a. a. O S. 180.

Digitized by Google

„Das vollständige Nullstellenpolygon einer ganzen rationalen Funktion $n$ten Grades wird in seinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Seitenmitten von einer algebraischen Kurve $n-1$ter Klasse berührt, diese hat die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion zu reellen Brennpunkten".

Als „vollständiges Nullstellenpolygon" einer ganzen rationalen Funktion bezeichnen wir hier und weiterhin das durch die Nullstellen der Funktion bestimmte vollständige n-Eck, gleichgültig ob zwei oder mehr Nullstellen zusammenfallen.

Neben der Gleichung γ besteht auch die weitere:

$$\frac{\partial^k F_n(-1, -i, z)}{\partial z^k} \equiv \frac{\partial^k \Pi(z - z_\nu)}{\partial z^k} = 0.$$

Das vollständige Nullstellenpolygon der $k$ten Ableitung einer ganzen rationalen Funktion $n$ten Grades $G_n(z)$ wird also in seinen Seitenmitten von einer algebraischen Kurve $(n-k-1)$ter Klasse berührt. Diese hat die Nullstellen der $(k+1)$ten Ableitung zu reellen Brennpunkten und ist in bezug auf das vollständige Nullstellenpolygon der $k$ten Ableitung von $G_n(z)$ die erste Polare der unendlich fernen Geraden. Die Nullstellen der $k$ten Ableitung sind zugleich die reellen Brennpunkte der $k$ten Polare der unendlich fernen Geraden in bezug auf das vollständige Nullstellenpolygon von $G_n(z)$.

Die Polaren der unendlich fernen Geraden in bezug auf das vollständige Nullstellenpolygon einer ganzen rationalen Funktion $G_n(z)$ nennen wir die „Polaren der ganzen rationalen Funktion". Die reellen Brennpunkte der ersten Polare der Funktion sind also die Nullstellen ihrer ersten Ableitung u. s. f.

4. Die Sätze aus 3) bringen die Eigenschaften der ganzen rationalen Funktion $n$ten Grades mit der Polaren- und Fokaltheorie der algebraischen Kurve $n$ter Klasse in organische Verbindung. Daher können nunmehr Sätze aus diesem Gebiete der Geometrie für solche Funktionen nutzbar werden und umgekehrt. So folgt aus 3) in Verbindung mit dem Gauß'schen Satze (1):

„In jedem konvexen Bereich, der die reellen Brennpunkte einer algebraischen Kurve $n$ter Klasse enthält, liegen auch die Brennpunkte sämtlicher Polaren der unendlich fernen Geraden für diese Kurve".

Ganze rationale Funktionen mit gleicher Ableitung haben konfokale Polaren.

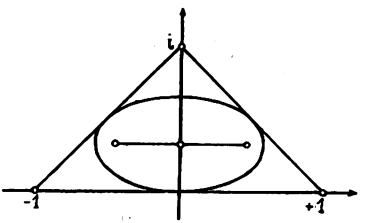
Eine algebraische Kurve $n$ter Klasse mit einer n-fachen Tangente zerfällt in n auf dieser Geraden liegende Punkte. So ergibt sich der bekannte Satz:

Digitized by Google

„Liegen die Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion auf einer Geraden, so liegen auch die Nullstellen aller Ableitnngen auf derselben Geraden und ihre Polaren zerfallen".

5. Eine besondere Klasse bilden diejenigen ganzen rationalen Funktionen, deren erste Polaren in einen oder mehrere konzentrische Kreise zerfallen. Eine solche Funktion ist durch ihren Grad n und durch drei ihrer Nullstellen bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Elementargeometrisch zeigt sich nämlich, daß die n Nullstellen sämtlich voneinander verschieden als Ecken eines regulären n-Ecks auf einem weiteren konzentrischen Kreise liegen. Bei geradem n besteht die erste Polare aus $\frac{n-2}{2}$ konzentrischen Kreisen und einem mit diesen konzentrischen Strahlenbüschel erster Ordnung, bei ungeradem n nur aus $\frac{n-1}{2}$ Kreisen. Die sämtlichen Nullstellen aller Ableitungen fallen in den Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Diese besondere Klasse von ganzen rationalen Funktionen heißt daher „regulär-polygonal". Aus ihr geht eine neue Funktionenklasse durch affine Transformation der regulären Nullstellenpolygone und ihrer Polaren hervor. Die Polaren der so erhaltenen Funktionen zerfallen in ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen. Die besonderen Eigenschaften dieser Funktionen und ihrer Ableitungen lassen sich daher leicht angeben.

Die beigegebene Figur veranschaulicht die Bedeutung des Satzes aus 3) für die Funktion $G(z) = z^3 - iz^2 - z + i$ mit den Nullstellen $+1$, -1, $+i$. Das Nullstellendreieck einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades wird in seinen drei Seitenmitten von einer Ellipse berührt, welche die Nullstellen der ersten Ableitung zu reellen Brennpunkten und die Nullstelle der zweiten Ableitung zum Mittelpunkt hat.



Digitized by Google

Über ganze rationale Funktionen dritten Grades und ihre Kovarianten.

Mit Benutzung eines hinterlassenen Entwurfes des Herrn Siegfried Schicht.

Von Gerhard Haenzel[1]).

1. Die binäre Form $n$ter Ordnung:

$$\text{I.} \quad f_n(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n$$

besitzt für $n > 2$ mehrere Kovarianten $\Pi(a_0, a_1 \ldots . x_1, x_2)$. Dieselben sind ganze rationale Verbindungen der Koeffizienten a_i und der Veränderlichen x_1, x_2. Gegenüber den linearen Substitutionen

$$\text{II.} \quad \begin{cases} x_1' = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 \\ x_2' = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2, \quad \text{wo } r = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0, \end{cases}$$

haben die Kovarianten die bekannte Eigenschaft bis auf ganzzahlige Potenzen von r denselben Wert anzunehmen, gleichviel, ob man sie für die ursprüngliche oder für die transformierte Form bildet.

Dividiert man die allgemeine binäre Form I durch x_2^n und deutet $\frac{x_1}{x_2} = z$ in bekannter Weise als Variable in der Gaußschen Zahlenebene, so geht I über in die ganze rationale Funktion $n$ten Grades einer komplexen Veränderlichen z:

$$\text{III.} \quad f_n(z) = a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n.$$

In ganz derselben Weise wird jede gegebene Kovariante $\Pi(x_1, x_2)$ der binären Form $f(x_1, x_2)$ in eine ganze rationale Funktion $\Pi(z)$ überführt. Die ganzen rationalen Funktionen $\Pi(z)$ nennen wir die „Kovarianten der ganzen rationalen Funktion $f_n(z)$".

Dividiert man die beiden Gleichungen II durcheinander, setzt $\frac{x_1'}{x_2'} = z'$ und dividiert Zähler und Nenner der rechten Seite durch

1) Vorgetragen in der 247. Sitzung am 25. April 1928. — Der Absatz 2 der vorliegenden Abhandlung und das Resultat des Absatzes 4 sind in einem hinterlassenen Manuskript von Siefried Schicht enthalten. Vergl. Anm. 1 der Abhandlung: „Ein neuer Satz über die Nullstellen ganzer rationaler „Funktionen". Sitzungsberichte der Berl. Mathem. Gesellschaft.

Digitized by Google

x_2, so geht II über in:

$$z' = \frac{\alpha_{11} z + \alpha_{12}}{\alpha_{21} z + \alpha_{22}} \text{ mit } \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0,$$

d. h. in die allgemeine lineare Transformation der Zahlenebene. Daher ist bewiesen:

„Die ganze rationale Funktion nten Grades $f_n(z)$ besitzt für $n > 2$ gewisse Kovarianten, welche aus den Kovarianten der binären Form nter Ordnung $f_n(x_1, x_2)$ durch die Substitution $\frac{x_1}{x_2} = z$ hervorgehen. Die Kovarianten der ganzen rationalen Funktion sind gegenüber den linearen Transformatianen $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ invariant bis auf ganzzahlige Potenzen von $(\alpha\delta - \beta\gamma)$".

Die Kovarianten ganzer rationaler Funktionen lassen sich mittels der Kovarianten binärer Formen untersuchen. Von besonderem Interesse ist der Zusammenhang zwischen den Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion und den Nullstellen ihrer Kovarianten.

2. Die binäre Form dritter Ordnung

$$f = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

hat zwei Kovarianten, nämlich:

$$H = (a_1^2 - a_0 a_2) x_1^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) x_1 x_2 + (a_2^2 - a_1 a_3) x_2^2 \text{ und}$$

$$J = (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^3 + 3 (a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x$$
$$- 3 (a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 - (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3) x_2^3.$$

Die ganze rationale Funktion dritten Grades

$$f(z) = a_0 z^3 + 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z + a_3$$

hat daher (1.) die Kovarianten:

$$H(z) = (a_1^2 - a_0 a_2) z^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z + (a_2^2 - a_1 a_3) \text{ und}$$

$$J(z) = (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) z^3 + 3 (a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) z^2$$
$$- 3 (a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) z - (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3).$$

Werden die beiden Nullstellen von $H(z)$ durch lineare Transformation $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ nach $+1$ und -1 verlegt, so nimmt $H(z) = 0$ die Form an:

$$z^2 - 1 = 0.$$

Es wird dann $a_0 = a_2$ und $a_1 = a_3 = \sqrt{1 + a_0^2}$. Mit diesen Werten der Koeffizienten a_1, a_2, a_3 ergibt sich:

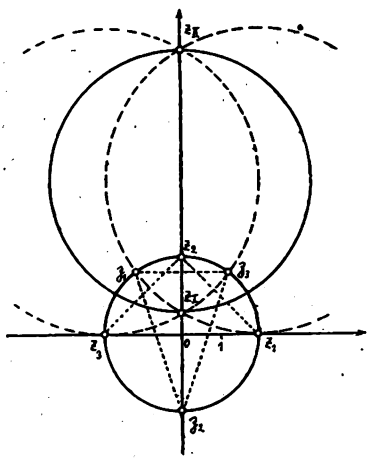
IV.
$$\begin{cases} f(z) = a_0 z^3 + 3\sqrt{1 + a_0^2}\, z^2 + 3 a_0 z + \sqrt{1 + a_0^2} \\ \frac{J(z)}{2} = \sqrt{1 + a_0^2}\, z^3 + 3 a_0 z^2 + 3\sqrt{1 + a_0^2}\, z + a_0, \end{cases}$$

Digitized by Google

d. h. f und $\frac{J}{2}$ gehen durch $w = \frac{1}{z}$ aus einander hervor und es ist bewiesen:

„Hat die Kovariante $H(z)$ einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades $f(z)$ zwei voneinander verschiedene Nullstellen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$, so gehen die drei Nullstellen z_1, z_2, z_3 der Funktion $f(z)$ und die drei Nullstellen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ihrer Kovariante $J(z)$ ineinander über durch Inversion am Kreise über der Verbindungsstrecke der Nullstellen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser“.

In diesem Sinne steht die Kovariante $H(z)$ zwischen der Funktion und der Kovariante $J(z)$. Die Figur veranschaulicht den Zusammenhang für die Funktion $f(z) = z^3 - 2iz^2 - 4z + 8i$ mit den Nullstellen $+2, -2, +2i$.



3. Die ganze rationale Funktion dritten Grades $f(z)$ mit den Nullstellen z_1, z_2, z_3 hat die Kovariante $H(z)$ mit den Nullstellen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ und die Kovariante $J(z)$ mit den Nullstellen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Durch die ganze lineare Transformation

$$\alpha) \qquad z' = \frac{2z - (z_{\mathrm{I}} + z_{\mathrm{II}})}{z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{II}}}$$

gehen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ in $+1, -1$ über. Gleichzeitig gehen die beiden Tripel z_1, z_2, z_3 und $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ in z_1', z_2', z_3' und $\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3'$ über. Durch

$$\beta) \qquad \zeta' = \frac{1}{z'}$$

werden z_1', z_2', z_3' mit $\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3'$ vertauscht (2.), während die Punkte $+1$ und -1 fest bleiben. Schließlich führt die ganze lineare Transformation:

$$\gamma) \qquad \zeta = \frac{(z_{\mathrm{I}} + z_{\mathrm{II}})\zeta' + (z_{\mathrm{I}} + z_{\mathrm{II}})}{2}$$

die Punkte $+1$ und -1 nach z_{I} und z_{II} zurück und gleichzeitig $\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3', z_1', z_2', z_3'$ nach $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, z_1, z_2, z_3$. Aus $\alpha), \beta), \gamma)$ resultiert die gebrochene lineare Transformation:

$$\delta) \qquad \zeta = \frac{(z_{\mathrm{I}} + z_{\mathrm{II}})z - 2z_{\mathrm{I}}z_{\mathrm{II}}}{2z - (z_{\mathrm{I}} + z_{\mathrm{II}})}.$$

Sie hat die Nullstellen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ der Kovariante $H(z)$ zu Fixpunkten

Digitized by Google

und verwandelt die Nullstellen z_1, z_2, z_3 von $f(z)$ in die Nullstellen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ der Kovariante $J(z)$. Somit ist bewiesen:

„Durch eine ganze rationale Funktion dritten Grades $f(z)$ ist eine lineare Transformation δ bestimmt, welche die drei Nullstellen der Funktion $f(z)$ in die drei Nullstellen ihrer Kovariante $J(z)$ überführt und die beiden Nullstellen der Kovariante $H(z)$ zu Fixpunkten hat".

Die Transformation δ wird im folgenden die „Kovariantentransformation der Funktion $f(z)$" genannt; Nullstellen von $f(z)$ und $J(z)$, die durch die Kovariantentransformation ineinander übergehen, heißen „homologe Nullstellen". Das Zusammenfallen zweier Nullstellen einer Funktion $f(z)$ zieht das Zusammenfallen zweier Nullstellen der Kovariante $J(z)$ nach sich.

Hat die eine Nullstelle von $f(z)$ den Wert $\frac{z_I - z_{II}}{2}$, liegt sie also im Mittelpunkt des Kreises über der Strecke z_I, z_{II} als Durchmessersehne, so werden $z_I, \frac{z_I - z_{II}}{2}, z_{II}$ durch die ganze lineare Transformation α nach $+1, 0, -1$ verlegt, $f(z) = 0$ nimmt durch α die Form an

$$a_0 z^3 + 3 a_0 z = 0,$$

weil in den Gleichungen IV. $a_3 = a_1 = \sqrt{1 + a_0^2} = 0$. Demzufolge lautet $\frac{J(z)}{2} = 0$:

$$3 a_0 z^2 + a_0 = 0.$$

Daher ist bewiesen:

„Hälftet eine Nullstelle der ganzen rationalen Funktion $f(z)$ den Abstand der beiden Nullstellen ihrer Kovariante $H(z)$, so ist die Kovariante $J(z)$ vom zweiten Grade".

4. Die Normalform der allgemeinen linearen Transformation mit den Fixpunkten A, B ist bekanntlich:

$$\frac{\zeta - A}{\zeta - B} = \varrho \frac{z - A}{z - B}$$

und die Transformation heißt:

hyperbolisch wenn ϱ positiv reell,
elliptisch wenn $\varrho = e^{i\omega}$,
loxodromisch wenn ϱ allgemein komplex.

Für die Kovariantentransformation δ ergibt sich $\varrho = e^{i\pi}$. Die Kovariantentransformation ist daher elliptisch und führt sowohl jeden der Kreise durch die beiden Fixpunkte in sich selbst über als auch jeden diese Kreise senkrecht schneidenden Kreis. Daraus folgen die Sätze:

Digitized by Google

„Die Nullstellendreiecke einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades $f(z)$ und ihrer Kovariante $J(z)$ haben einen gemeinschaftlichen Umkreis; er schneidet jeden Kreis durch die beiden Nullstellen der Kovariante $H(z)$ rechtwinklig. Die drei Paare homologer Nullstellen von $f(z)$ und $J(z)$ liegen auf drei Kreisen eines Kreisbüschels, der die beiden Nullstellen von $H(z)$ zu Grundpunkten hat“.

5. Die Punkte $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}, z_2, \zeta_2$ der Figur sind vier harmonische Punkte der Geraden $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$. Die lineare Transformation T mit den Fixpunkten $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$, die z_2 in z_1 verwandelt, führt die Gerade $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$ in den Kreis durch $z_1, z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ über. Sie vertauscht die Kreise des Kreisbüschels mit den Grundpunkten $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ untereinander und verwandelt jeden zu diesem Kreisbüschel senkrechten Preis in sich. Zu letzteren Kreisen gehört der gemeinschaftliche Umkreis der beiden Nullstellendreiecke $z_1 z_2 z_3$ und $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ (4.). Der auf $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$ liegende Punkt ζ_2 geht daher durch T in den auf dem Kreise durch $z_1, z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ liegenden Punkt ζ_1 (4.) über, es entsprechen den Punkten $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}, z_3, \zeta_2$ die Punkte $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}, z_1, \zeta_1$. Die letzteren vier Punkte sind daher gleichfalls vier harmonische. Dasselbe gilt von $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}, z_3, \zeta_3$. Also ist bewiesen:

„Die drei Paare homologer Nullstellen der ganzen rationalen Funktion dritten Grades $f(z)$ und ihrer Kovariante $J(z)$ bilden mit den beiden Nullstellen der Kovariante $H(z)$ auf den drei sie verbindenden Kreisen (4.) *je einen harmonischen Wurf“.*

Fallen die beiden Nullstellen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ der Kovariante $H(z)$ in eine einzige $z_{\mathrm{I\,II}}$ zusammen, so artet die Transformation δ aus in die Konstante $\zeta = z_{\mathrm{I\,II}}$, d. h.:

Fallen die beiden Nullstellen der Kovariante $H(z)$ in einen Punkt zusammen, so fallen in diesen Punkt auch die drei Nullstellen der Kovariante $J(z)$.

Digitized by Google

Ein Satz über zwei zusammenhängende Hurwitz'sche Polynome[1].

Von W. Cauer.

Als Hurwitz'sche Polynome bezeichnen wir ganze rationale Funktionen, deren Nullstellen sämtlich negativ reellen Teil besitzen. Uns werden nur Hurwitz'sche Polynome mit reellen Koeffizienten beschäftigen:

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Auf solche stößt man bei vielen Schwingungs- und Stabilitätsaufgaben der Physik und Technik, besonders der Mechanik und Elektrotechnik. Hurwitz selbst, der den Kriterien dafür, daß man es mit einem Polynom zu tun hat, welches nur Nullstellen mit negativ reellem Teil besitzt, eine sehr einfache elegante Form gegeben hat, wurde durch ein Problem der Dampfturbinen zu seiner bekannten Untersuchung in den Mathematischen Annalen Bd. 46, 1895 angeregt. Die wichtigste Form, in welcher ein Hurwitz'sches Polynom in den Anwendungen, z. B. bei den kleinen Schwingungen der Mechanik auftritt, ist die sogenannte Fundamentaldeterminante dreier positiv definiter quadratischer Formen

$$\left(\sum_{i,j=1}^{m} L_{ij}x_ix_j,\ \sum_{i,j=1}^{m} R_{ij}x_ix_j,\ \sum_{i,j=1}^{m} D_{ij}x_ix_j\right)$$

$$a = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

In ihr ist

$$A_{ij} = \lambda^2 L_{ij} + \lambda R_{ij} + D_{ij}. \tag{3}$$

Daß es sich hier tatsächlich um ein Hurwitz'sches Polynom handelt, ist bekannt. Eine ausführliche mathematische und physikalische Darstellung dieser Dinge findet sich z. B. bei Routh[2].

1) Vorgetragen in der 245. Sitzung am 29. Februar 1928.

2) Die Dynamik der Systeme starrer Körper II, Kap. VII, Teubner 1898.

Digitized by Google

Man kann bei der Voraussetzung $a_0 > 0$, die wir machen wollen, jedem Hurwitz'schen Polynom die Form einer Fundamentaldeterminante geben.

Bei der vorliegenden Untersuchung handelt es sich nun nicht um *ein* Polynom, sondern um zwei zusammenhängende Polynome. Ist das erste in der Form einer Fundamentaldeterminante a geschrieben, so soll das zweite durch das Komplement von A_{11} in a gegeben sein, das in (2) durch punktierte Umrahmung hervorgehoben ist. Ein Hurwitz'sches Polynom $p_1(\lambda)$ $n = 2m$ten Grades und ein solches $p_2(\lambda)$ $n-2 = 2m-2$ten Grades — gerade Gradzahlen, weil jene quadratischen Formen als nicht singulär vorausgesetzt werden sollen — hängen nur dann in dieser Weise zusammen, wenn gewisse Bedingungen zwischen den Koeffizienten bzw. Wurzeln beider Polynome bestehen. Eine Aussage hierüber zu machen, ist das Ziel unserer Untersuchung. Diese Beziehungen zwischen den beiden Hurwitz'schen Polynomen besitzen für ein wichtiges Problem der Fernmeldetechnik[3]) Interesse, das mir die Anregung gab, mich mit dieser Frage zu beschäftigen, und für ihre Lösung zugleich einen großen heuristischen Wert hat[4]). Die vollständige Untersuchung der gestellten Aufgabe erfordert eine invariantentheoretische Behandlung[5]). Auf diese soll aber hier nicht eingegangen, sondern der folgende Satz auf verhältnismäßig elementare Weise bewiesen werden, der zwar keine vollständige, aber doch schon eine ziemlich weitgehende Antwort auf unsere Fragestellung gibt:

Es gilt zunächst die notwendige Bedingung

$$\Re^{6}) \frac{p_1(\lambda)}{\lambda p_2(\lambda)} > 0, \tag{4}$$

falls λ rein imaginär ist. Aus dieser notwendigen Bedingung und

3) „Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit", Dissertation Technische Hochschule zu Berlin 1926, abgedruckt im Archiv für Elektrotechnik, Bd. XVII, Heft 4, Dez. 1926, S. 335; s. auch E. T. Z. 1. Halbj. 1927.

4) Da ein rein mathematisches Problem formuliert vorliegt, soll indessen zweckmäßig irgendwelche Benutzung physikalisch-elektrotechnischer Elemente (außer der Wahl einiger Bezeichnungen) vermieden werden. Dadurch wird allerdings der Übelstand mit in Kauf genommen, daß der reine Algebraiker nicht sieht, wieso man dazu kommt, das Problem überhaupt in Angriff zu nehmen und es in der Weise anzufassen, wie es im Text ausgeführt wird.

5) Für $m = 2$ l. c. 1) durchgeführt.

6) $\Re$ bedeutet „reeller Teil von".

Digitized by Google

den Hurwitz'schen Bedingungen[7]) *für* p_2, *d. h. den Bedingungen dafür, daß* p_2 *ein Hurwitz'sches Polynom ist, folgen im Wesentlichen die Hurwitz'schen Bedingungen für* p_1 *und im Grenzfall* $\sum_{i,j=1}^{m} R_{ij}x_ix_j \equiv 0$ *die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß* p_1 *und* p_2 *in der angegebenen Weise durch Determinanten darstellbar sind und zusammenhängen.*

Aus dem letzten Teil des Satzes kann man vermuten, daß (4) zusammen mit den Hurwitz'schen Bedingungen einen wesentlichen Teil der in Frage stehenden Beziehungen zwischen p_1 und p_2 ausmacht. Durch eine invariantentheoretische Untersuchung wird das in der Tat bestätigt.

Der erste Teil ist bekannt, wenigstens dem Elektrotechniker. Die Ungleichung (4) folgt allein daraus, daß $\sum_{i,j=1}^{m} R_{ij}x_ix_j$ positiv definit ist, ohne daß die gleichen Voraussetzungen über die beiden anderen Formen erfüllt zu sein brauchten. Rein algebraisch ist das sehr leicht einzusehen. Dazu betrachten wir für rein imaginäres λ das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}x_j = \lambda\delta_1^i \qquad \left(\begin{matrix}\delta_1^i = 0 \text{ für } i \neq 1\\ \delta_1^i = 1 \text{ für } i = 1\end{matrix}\right), \tag{5}$$

das nach x_1 aufgelöst $\frac{\lambda p_2(\lambda)}{p_1(\lambda)}$ ergibt. Es muß $x_1 + \bar{x}_1 > 0$ bewiesen werden. Dafür multiplizieren wir jede durch λ dividierte Gleichung (5) mit $\bar{x}_i$ und summieren und addieren schließlich dazu den konjugierten Wert:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i,j=1}^{m} (A_{ij}\bar{x}_ix_j - A_{ij}x_i\bar{x}_j) = x_1 + \bar{x}_1. \tag{6}$$

Die linke Seite aber rechnet man leicht aus zu

$$2 \cdot \sum_{i,j=1}^{m} R_{ij}x_i\bar{x}_j.$$

Sie ist nach Vorraussetzung positiv.

Um den zweiten Teil der Behauptung einzusehen, soll der Umstand, daß ein Polynom $p(\lambda)$ nur Nullstellen mit negativ reellem

7) Eine einfache Ableitung der Hurwitz'schen Bedingungen in Determinantenform hat neuerdings J. Schur, Zeitschr. f. angew. Mathematik I, S. 307—311, 1921, gegeben.

Digitized by Google

Teil besitzt, in einer anderen irrationalen Form ausgedrückt werden, die für Hurwitz den Ausgangspunkt bildete, um sein einfaches in den Koeffizienten von p rationales Kriterium aufzustellen: Setzt man $\lambda = -i\omega$, wo ω reell, und

$$i^n p(-i\omega) = U(\omega) + iV(\omega), \tag{7}$$

so besitzen die reellen Polynome U und V nur reelle voneinander verschiedene Nullstellen. Zwischen zwei Nullstellen von U liegt immer eine von V, und die Vorzeichen der Koeffizienten der höchsten Potenz von ω in beiden Polynomen (a_0 und a_1) stimmen überein[8]) (man beweist dies leicht auf Grund der Bemerkung, daß das Argument von $p(-i\omega)$ um $n\pi$ abnehmen muß, wenn ω von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft).

Mit der Abkürzung $\omega^2 = w$ stehen für $n = 2m$ (d. h. $p = p_1$) die Polynome

$$\begin{aligned} u_1(w) &= U(\omega) = a_0 w^m - a_2 w^{m-1} + a_4 w^{m-2} + \cdots + (-1)^m a_n \\ v_1(w) &= \frac{V(\omega)}{\omega} = a_1 w^{m-1} - a_3 w^{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n-1} \end{aligned} \tag{8}$$

zueinander in derselben Beziehung wie U, V. Sie besitzen nur positive Nullstellen. Die entsprechenden aus

$$p_2(\lambda) = b_1 \lambda^{n-2} + b_2 \lambda^{n-3} + \cdots + b_{n-1}$$

abgeleiteten Polynome lauten:

$$\begin{aligned} u_2(w) &= b_1 w^{m-1} - b_3 w^{m-2} + - \cdots + (-1)^{m+1} b_{n-1} \\ v_2(w) &= b_2 w^{m-2} - + \cdots + (-1)^m b_{n-2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Der Ausdruck (4) kann jetzt in der Form

$$\frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_2^2 + w v_2^2}$$

und daher die Ungleichung (4) in der Form

$$u_2 v_1 - u_1 v_2 > 0 \tag{10}$$

geschrieben werden. Allein aus dieser Ungleichung und aus den Hurwitz'schen Bedingungen für p_2, welche sich darin ausdrücken, daß die Polynome u_2, v_2 in der erwähnten Beziehung stehen, d. h. insbesondere nur sich gegenseitig trennende positive Nullstellen besitzen, kann man nun, indem man w von $+\infty$ nach $-\infty$ gehen läßt, schließen, daß nur die folgende Reihenfolge der

8) Satz von Biehler.

Digitized by Google

Nullstellen von u_1, v_1, u_2, v_2 möglich ist:

$$(11) \quad u_1, (u_2, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_1), (u_1, v_2), \ldots, (u_2, v_1), u_1.$$

In dieser Folge sind sämtliche Nullstellen vertreten, die danach alle reell sein müssen. Die Klammern sollen andeuten, daß über die Reihenfolge von (u_2, v_1) bzw. (u_1, v_2) nichts ausgesagt wird. Da der Beweisgedanke wohl klar ist, soll das im Einzelnen nicht weiter ausgeführt werden. Fügt man noch *die Voraussetzung* $a_n > 0$ hinzu, so kann man über (11) hinaus zeigen (indem man umgekehrt w von 0 nach ∞ wachsen läßt), daß die kleinste Nullstelle von u_1 positiv ist. Demnach enthält (11) die Hurwitz'schen Bedingungen für $p_1(\lambda)$, wenn noch gezeigt wird, daß a_1 ebenso wie a_0 positives Zeichen hat. Das aber folgt aus der in (4) enthaltenen Bedingung $a_1 b_1 - a_0 b_2 > 0$.

Wir kommen jetzt zum letzten Teil der Behauptung, daß nämlich aus unseren Voraussetzungen einschließlich $a_n > 0$ im Grenzfall $\sum_{i,j=1}^{m} R_{ij} x_i x_j \equiv 0$ die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür folgen, daß p_1 und p_2 die geschilderte Determinantendarstellung gestatten. Durch (11) ist bewiesen, daß die Nullstellen der Polynome u_1 und u_2, bei denen die Koeffizienten der höchsten Potenzen von w im Vorzeichen übereinstimmen, sämtlich positiv sind und sich gegenseitig trennen, solange $\sum_{i,j=1}^{m} R_{ij} x_i x_j \not\equiv 0$. Nun ist aber

$$(12) \quad \frac{p_1(i\omega)}{i\omega p_2(i\omega)} = \frac{i}{\omega} \cdot \frac{u_1 - i\omega v_1}{u_2 - i\omega v_2}.$$

Im Grenzfall des Verschwindens der zweiten quadratischen Form verschwinden auch v_1 und v_2 identisch. Auch in diesem Grenzfall bleiben die Nullstellen von u_1 und u_2 positiv und trennen sich gegenseitig, wobei noch die Möglichkeit des Zusammenfallens einiger Wurzeln hinzukommt. Das sind aber gerade die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß zwei Polynome p_1 und p_2 in der geschilderten Weise aus den beiden positiv definiten quadratischen Formen $\sum_{i,j=1}^{m} L_{ij} x_i x_j$ und $\sum_{i,j=1}^{m} D_{ij} x_i x_j$ gebildet werden können (Man beweist dies am einfachsten dadurch, daß man $x_2, x_3, \ldots, x_m$ auf Hauptachsen transformiert).

Diese letzten Bedingungen wie auch die Hurwitz'schen Bedingungen lassen sich in übersichtlicher Weise mittels Determinantenungleichungen rational durch die Koeffizienten von p_1 und

Digitized by Google

p_2 ausdrücken. Es muß daher möglich sein, unseren Satz, ohne auf die Nullstellen selbst einzugehen, durch Operieren mit ihren elementarsymmetrischen Funktionen zu beweisen. Ich will den Beweis kurz für $m = 2$ andeuten[9]). Hier enthalten die Hurwitz'schen Bedingungen für p_1 und p_2 außer $a_i > 0$, $b_i > 0$ nur noch eine unabhängige Ungleichung, nämlich

$$H = -a_4 a_1^2 + a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 > 0. \tag{13}$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen im Grenzfall $\sum_{i,j=1}^{m} R_{ij} x_i x_j \equiv 0$ lauten

$$a_2 > 0,\ a_4 > 0,\ b_1 > 0,\ W = -a_0 b_3^2 + a_2 b_3 b_1 - a_4 b_1^2 > 0, \tag{14}$$

worin der Ausdruck W die Resultante von p_1 und p_2 für den Grenzfall bedeutet. Die Bedingung (4) läßt sich für $m = 2$ mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} V_1 &= a_1 b_1 - a_0 b_2 \\ V_2 &= a_2 b_3 - a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ V_3 &= a_3 b_3 - a_4 b_2 \end{aligned} \tag{15}$$

auf die Form

$$V_1 x_1^2 + V_2 x_1 x_2 + V_3 x_2^2 > 0 \text{ für } x_1 : x_2 > 0 \tag{16}$$

bringen. Nun bestehen die Identitäten

$$b_3^2 V_1 + b_3 b_1 V_2 + b_1^2 V_3 = b_2 W, \tag{17}$$

$$a_3^2 V_1 + a_3 a_1 V_2 + a_1^2 V_3 = b_2 H. \tag{18}$$

Mit ihrer Hilfe kann man unseren Satz für $m = 2$ bestätigen. Z. B. folgt aus (16), (17) und den Hurwitz'schen Bedingungen für p_2, d. h. $b_i > 0$, sofort $W > 0$.

Daß die Nullstellen von p_1 nicht in der rechten Halbebene liegen können, wenn die Hurwitz'schen Bedingungen für p_2 und die Bedingung (4) erfüllt sind, folgt auch sofort daraus, daß dann $\frac{p_1(\lambda)}{\lambda p_2(\lambda)}$ in der rechten Halbebene regulär ist und am Rande positiv reellen Teil hat und die harmonische Funktion $\Re \frac{p_1(\lambda)}{\lambda p_2(\lambda)}$ ihr Minimum auf dem Rande der rechten Halbebene annehmen muß.

Endlich gilt für alle in der rechten Halbebene analytischen Funktionen, die dort positiv reellen Teil besitzen und für reelles

9) Vgl. l. c. 3) Schluß des 5. Abschnitts.

Digitized by Google

Argument reelle Werte annehmen, die Integraldarstellung

$$\lambda\left[C+\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda^2+x}\right], \tag{19}$$

worin $C \geqq 0$, ψ eine wachsende Funktion und das Integral im Stieljesschen Sinne zu nehmen ist. Daher muß in dem Grenzfall $\sum_{i,j=1}^{m} R_{ij} x_i x_j \equiv 0$, wo eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{p_1(\lambda)}{\lambda p_2(\lambda)} = \lambda\left[\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_n}{b_{n-1}\lambda^2}+\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{\alpha_\nu}{\lambda^2+\beta_\nu}\right] \quad (\beta_\nu > 0) \tag{20}$$

gilt, notwendig

$$\frac{a_0}{b_1} > 0, \quad \frac{a_n}{b_{n-1}} > 0, \quad \alpha_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{21}$$

sein. Dies ist aber mit den erwähnten notwendigen und hinreichenden Bedingungen im Grenzfall gleichwertig, sodaß damit der letzte Teil unseres Satzes nochmals bewiesen ist.

Ein unserem Satz entsprechender Satz gilt, wenn p_1 mit p_2 vertauscht wird.

Als Ergänzung zu der hiermit beendeten rein mathematischen Untersuchung sollen noch einige physikalische Erläuterungen hinzugefügt werden.

Daß jede komplexe Wurzel einer Fundamentaldeterminante negativ reellen Teil besitzt, besagt physikalisch die einleuchtende Tatsache, daß in einem schwingungsfähigen System mit Energieverzehrung jede freie Schwingung abklingen muß. Das schwingende System wird dabei durch jene drei quadratischen Formen repräsentiert, welche die Bedeutung von kinetischer oder elektromagnetischer Energie, Zerstreuungsenergie oder Joule'scher Wärme, potentieller Energie oder elektrostatischer Energie haben, je nachdem man es mit einem mechanischen oder elektrischen System zu tun hat. Der für unseren Satz besonders wichtige Ausdruck $\Re\frac{p_1(\lambda)}{\lambda p_2(\lambda)}$ ist für $\lambda = i\omega$ proportional zum mittleren Energieverbrauch des Systems, wenn es eine reinperiodische erzwungene Schwingung von der Kreisfrequenz ω ausführt. Reeller und imaginärer Teil von $\frac{p_1(\lambda)}{\lambda p_2(\lambda)}$ sind im Falle eines elektrischen Systems linearer stromdurchflossener Leiter als sogenannter Wechselstromwiderstand, z. B. in einer Wheatstone'schen Brücke, meßbar.

Digitized by Google

Über das Hadamardsche Singularitätenkriterium in der Theorie der Taylorschen und Dirichletschen Reihen[1].

Von Alexander Ostrowski in Basel.

1. In der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ beanspruchen diejenigen Tatsachen das Interesse des Funktionentheoretikers, die bereits in der Theorie der Taylorschen Reihen $\sum a_n e^{-ns}$ auftreten, und die Untersuchung gerade dieser Tatsachen wirft, wie mir scheint, auch auf längst bekannte Sachverhalte in der Theorie der Taylorschen Reihen neues Licht. Ich erwähne nur die vor einigen Jahren von Herrn Pólya gefundene Verallgemeinerung des Cauchyschen Satzes über Singularitäten auf dem Konvergenzkreis einer Potenzreihe auf Dirichletsche Reihen mit *positivem* $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$. Ähnliche Einschränkungen über die λ_n-Folge müssen bei derartigen Übertragungen oft eingeführt werden. Gerade deswegen scheint mir die Tatsache von besonderem Interesse zu sein, daß eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Theorie der Taylorschen Reihen, das Hadamardsche Singularitätenkriterium, sich ohne jede Einschränkung auf allgemeinste Dirichletsche Reihen übertragen läßt; wobei auch für die Theorie der Taylorschen Reihen neue Ergebnisse herausfallen. —

Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1, so läßt sich die Frage, ob ein Punkt des Konvergenzkreises $e^{i\Theta}$ singulär ist, mit Hilfe eines wichtigen, von Hadamard herrührenden Kriteriums[2] entscheiden. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $e^{i\Theta}$ regulär ist, ist nach Hadamard

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|\varphi_n(e^{i\Theta})|} < 1. \tag{1}$$

Hier ist $\varphi_n(z)$ ein Ausdruck von der Gestalt

$$\varphi_n(z) = \sum \varrho_{n+\nu}^{(n)} a_{n+\nu} z^{\nu},$$

wobei die Koeffizienten $\varrho_{n+\nu}^{(n)}$ nicht negative Konstanten sind und

1) Vorgelegt in der 249. Sitzung am 27. Juni 1928.

2) J. Hadamard, J. de math. (7) 6 (1892), sowie die Hadamardsche Monographie: La série de Taylor et son prolongement analytique, Paris 1901, pp. 20—22. Vgl. auch den ersten Band der 2. Auflage, die von Hadamard und Mandelbrojt besorgt wurde.

Digitized by Google

die Summation über alle ganzen ν mit

$$-\lambda n < \nu < \lambda' n$$

für geeignete echte Brüche λ, λ' zu erstrecken ist. In der ursprünglichen Hadamardschen Form des Kriteriums war allerdings

$$(2) \qquad \varphi_n(z) = (1-\beta)^n \left(a_n + \binom{n}{1} a_{n+1} \beta z + \cdots + \binom{n+p}{p} a_{n+p} \beta^p z^p\right)$$

mit beliebigem positivem echtem Bruch β und irgend einem $p > \lambda n$, wo λ ein freilich *von* β *abhängiger* echter Bruch ist. Dieser Ausdruck für $\varphi_n(z)$ entsteht aus der $n$ten Ableitung von $f(z)$ an der Stelle $\beta e^{i\Theta}$, indem die Glieder mit den Indices $> \lambda n + 1$ weggelassen werden. Und die Bedingung (1) entsteht aus der offenbar notwendigen und hinreichenden Bedingung

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(\beta e^{i\Theta})}{n!}\right|} < \frac{1}{1-\beta}.$$

Eine sorgfältige Diskussion der Hadamardschen Form des Kriteriums hat Fabry[3]) zu einer Umformung desselben geführt, die in Fabrys Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt. Dieser ersten Fabryschen Form des Hadamardschen Kriteriums entspricht der Ansatz

$$(3) \quad \varphi_n(z) = a_n + \left(a_{n+1} \frac{n+1}{p+1} \beta z + a_{n-1} \frac{n-1}{p-1} (\beta z)^{-1}\right) + \cdots$$
$$+ \left(a_{n+\nu} \frac{(n+1)\ldots(n+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)} (\beta z)^{\nu} + a_{n-\nu} \frac{(n-1)\ldots(n-\nu)}{(p-1)\ldots(p-\nu)} (\beta z)^{-\nu}\right) + \cdots,$$

wo über alle ganzen ν mit $0 < \nu < \lambda n$ zu summieren ist, λ eine beliebiger (von β unabhängiger, aber) fester echter Bruch, β eine Konstante mit $0 < \beta < 1$ ist, und $p = p_n$ eine solche Folge (von n abhängiger) ganzer Zahlen durchläuft, für die $\frac{p}{n\beta} \to 1$ ist und die Differenz $n-p$ mit ganzzahlig ins Unendliche wachsendem n alle hinreichend großen ganzzahligen Werte annimmt[4]). — Es ist leicht zu sehen,

3) E. Fabry, Ann. sc. de l'Ec. N. S. (3) XIII, 1896; Acta math. XXII (1899).

4) In den Fabryschen Arbeiten wird p_n nur die Bedingung $\frac{p_n}{n\beta} \to 1$ auferlegt. Es ist indessen leicht zu sehen, daß nicht jede solche Folge p_n zu einer hinreichenden Regularitätsbedingung führt, da die Differenz $n - p_n$ den Index der Ableitung angibt, aus der der Ausdruck $\varphi_n(z)$ entstanden ist. Ist $m_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$) eine beliebige monoton ins Unendliche wachsende Folge ganzer positiver Zahlen mit $\frac{m_{\varkappa+1}}{m_\varkappa} \to 1$, so kann die Folge p_n so gewählt werden, daß $n - p$ nur Werte $m_1, m_2, \ldots$ annimmt und $\frac{p_n}{n\beta} \to 1$ ist. Andererseits ist sicher nicht für jede solche

Digitized by Google

daß für jedes β mit $0 < \beta < 1$ sich eine den obigen Bedingungen genügende Folge p_n finden läßt. — Ferner gilt (1) als *notwendige* Bedingung für die Regularität von $e^{i\Theta}$ auch gleichmäßig in β mit $0 < \beta' \leqq \beta \leqq \beta'' < 1$, wenn p_n entsprechend gewählt wird[5]). Endlich gilt (1), wie Hadamard bemerkt[6]), *gleichmäßig* auf einem Regularitätsbogen $\Theta_1 \leqq \Theta \leqq \Theta_2$.

Wir bemerken endlich, daß eine gewisse Bewegungsfreiheit, die in der Wahl von p_n liegt, keine wesentliche Modifikation des Ausdrucks (3) bedingt, da verschiedene Fabrysche $\varphi_n(z)$, die zu einem und demselben Wert von $n - p_n$ gehören, auseinander durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor und Weglassen bzw. Hinzufügen endlich vieler Glieder hervorgehen. Der konstante Faktor ist dann die $n$te Potenz einer gegen 1 konvergierenden Größe, und wegzulassende bzw. hinzuzufügende Glieder haben solche Summe der absoluten Beträge, daß die $n$te Wurzel aus ihr den $\overline{\lim}$ kleiner als 1 hat. Ferner sei bemerkt, daß sämtliche Anwendungen, die Fabry von seiner Form des Hadamardschen Kriteriums gemacht hat, nur von der Tatsache Gebrauch machen, daß es *notwendig* für die Regularität von $z = e^{i\Theta}$ ist.

Von verschiedenen Autoren sind seitdem noch andere Formen des Hadamardschen Kriteriums diskutiert worden (Fabry und Lindelöf[7]), Kößler[8]) usw.).

Diese Formen des Hadamardschen Kriteriums erscheinen aber alle nicht ganz handlich wegen der in ihnen auftretenden Fakultäten. Zudem ist die erste Fabrysche Form wenig explizit, die zweite von Fabry gefundene aber liefert nur notwendige Be-

---

Folge $m_\varkappa$ die Bedingung

$$\overline{\lim} \sqrt[m_\varkappa]{\frac{|f^{(m_\varkappa)}(\beta)|}{m_\varkappa!}} < \frac{1}{1-\beta}$$

hinreichend für die Regularität von $f(s)$ in $z = 1$, wie z. B. mit der Methode von G. Faber (Münch. Ber., 36 (1906)) leicht einzusehen ist.

5) Dagegen ist es nicht richtig, daß man eine notwendige *und hinreichende* Bedingung erhält, wenn man β von n abhängig macht. Es ist leicht, eine solche Folge β_n mit $0 < \beta' \leqq \beta_n \leqq \beta'' < 1$ zu konstruieren, daß für *keine* Folge ganzer p_m mit $\frac{p_n}{n\beta_n} \to 1$ die Bedingung (1) hinreichend für die Regularität ist.

6) Hadamard, La série de Taylor etc., p. 25.

7) E. Fabry, C. R. 20. XII. 1897; J. de M. (5) 7 (1898); E. Lindelöf, C. R. 28. II. 1898; Acta Soc. Sc. Fennicae XXIV (1898). Vgl. ferner A. Pringsheim, Münch. Ber. (1912), und die Darstellung in der Landauschen Monographie: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916.

8) M. Kößler, R. c. r. a. dei Lincei, Bd. 32 (5), 1923, pp. 26, 83, 528.

Digitized by Google

dingungen[9]). Nun wird zwar in den weiteren Untersuchungen von Fabry nur die Notwendigkeit des Hadamardschen Kriteriums benutzt, indessen ist es für andere Zwecke, z. B. für die Untersuchungen von Leau, wesentlich, daß das Hadamardsche Kriterium auch hinreichend ist. — Daher ist es sicher wünschenswert, weitere handliche und durchsichtige Formen des Hadamardschen Kriteriums zur Verfügung zu haben. Eine solche wird nun, wie wir zeigen werden, durch den Ansatz geliefert:

$$(4) \qquad \varphi_n(z) = \sum_{p=-\mu_n' n}^{p=\mu_n'' n} \left(1+\frac{p}{n}\right)^n e^{-p} a_{n+p} z^p,$$

mit willkürlichen μ_n, μ_n' in den Grenzen $0<\mu\leqq\mu_n'<1$, $0<\mu\leqq\mu_n''$ für einen beliebigen aber festen echten Bruch μ[10]). Die Bedeutung dieses Ansatzes für $\varphi_n(z)$, der sich noch durch Einführung eines Parameters σ verallgemeinern läßt, liegt vor allem darin, daß er sich ohne jede Schwierigkeit auf die allgemeinen Dirichletschen Reihen ausdehnen läßt. Ist eine Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo λ_n verschiedene positive Zahlen mit $\lambda_n \uparrow \infty$ sind[11]), konvergent für $\Re s > 0$, so ist für die Regularität eines Punktes it der imaginären Axe notwendig und hinreichend, daß

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|H_{n,\sigma,t}|} < 1$$

ist, wo für einen von n unabhängigen positiven echten Bruch μ

$$H_{n,\sigma,t} = \sum_{\lambda_m > \frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')}^{\lambda_m < \frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} \left(\frac{\lambda_m \sigma e}{n}\right)^n e^{-\lambda_m(\sigma+it)} a_m \qquad \begin{pmatrix} 0<\mu\leqq\mu_n'<1 \\ 0<\mu\leqq\mu_n'' \end{pmatrix}$$

9) Bei der Fabryschen Herleitung. Vgl. hierzu indessen A. Ostrowski, On Hadamard's test for singular points, Journal L. M. S. Bd. 1, 1926, p. 236.

10) Wenn in einer Summe $\sum_{\alpha}^{\beta}$ als Summationsgrenzen nicht ganze reelle Zahlen auftreten, so ist dabei — in dieser Arbeit — die untere Grenze durch die nächste nicht größere ganze Zahl, die obere Grenze die nächste nicht kleinere ganze Zahl zu ersetzen. — Ein Beweis dieser Form des Hadamardschen Kriteriums wurde in Ausführung einer schriftlichen Mitteilung des Verfassers der vorliegenden Note im 2. Bd. des Lehrbuches der Funktionentheorie von L. Bieberbach (pp. 301—305) dargestellt.

11) Wenn eine nicht abnehmende bzw. nicht zunehmende Folge a_n gegen α konvergiert, so deuten wir dies mit $a_n \uparrow \alpha$ bzw. $a_n \downarrow \alpha$ an.

Digitized by Google

zu setzen ist mit einem willkürlichen aber festen Parameter $\sigma > 0$. Ein ganz analoger Ansatz gilt für Integrale von der Form $\int_0^\infty a(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda$ und auch für die allgemeinere Klasse von analytischen Ausdrücken, die die beiden eben genannten umfaßt und durch Stieltjessche Integrale

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda s} dA(\lambda) \tag{5}$$

dargestellt wird. In diesem allgemeinsten Falle ist $H_{n,\sigma,t}$ durch

$$\lambda = \frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')$$
$$H_{n,\sigma,t} = \int \left(\frac{\lambda \sigma e}{n}\right)^n e^{-\lambda(\sigma+it)} dA(\lambda)$$
$$\lambda = \frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')$$

zu definieren.

Es bietet keine größere Schwierigkeit und ist sicher sogar durchsichtiger, den Beweis gleich für die Integrale (5) zu führen. In jedem Falle dürfte bereits der für den Fall Taylorscher Reihen spezialisierte Beweis dem Kenner der Analysis neben den Beweisen anderer Formen des Hadamardschen Kriteriums willkommen sein, da der analytische Teil des Beweises auf eine Abschätzung verschiedener Teile des Γ-Integrals hinausläuft, die an in manchen anderen analytischen Untersuchungen geläufige Dinge anklingt.

Den Beweis führen wir gleich für den allgemeinsten Fall in Nr. 2 dieser Mitteilung. In Nr. 3 zeigen wir, daß das Kriterium auf einer Regularitätsstrecke $t' \leqq t \leqq t''$ der imaginären Axe gleichmäßig gilt, was für die Übertragung der Fabryschen Resultate auf Dirichletsche Reihen, die den Gegenstand einer späteren Mitteilung bilden wird, wesentlich ist.

Bis zu diesem Punkte wurde die Zahl n in $H_{n,\sigma,t}$ als ganz positiv angesehen. Der Ausdruck $H_{n,\sigma,t}$ läßt sich aber formal für beliebige $n \neq 0$ bilden. Daher — und auch mit Rücksicht auf formale Vereinfachungen bei Anwendungen — ist der Nachweis von Interesse, den wir in Nr. 4 erbringen, daß für die Regularitätsstrecke $t' \leqq t \leqq t''$ sogar

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|H_{n,\sigma,t}|} < 1$$

gleichmäßig in $t' \leqq t \leqq t''$ für *stetig* ins Unendliche strebende n notwendig ist.

2. Es sei $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ eine allgemeine für $\Re s > 0$ konvergente Dirichletsche Reihe, wobei wir ohne Beschränkung

Digitized by Google

der Allgemeinheit annehmen, daß $1 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ ist. Wir werden in dieser Nr. beweisen: Dafür, daß der Nullpunkt ein regulärer Punkt von $f(s)$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|H_{n,\sigma}|} < 1$$

ist, wo

$$H_{n,\sigma} = \sum_{\substack{\lambda_m < \frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'') \\ \lambda_n > \frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')}} \left(\frac{\lambda_m \sigma e}{n}\right)^n a_m e^{-\sigma\lambda_m} \text{ 12)}$$

ist, $0 < \mu \leqq \mu_n' \leqq 1$, $0 < \mu \leqq \mu_n''$ gilt und μ ein beliebiger positiver echter Bruch ist, während σ eine beliebige positive Zahl sein darf.

Für $\sigma = 1$ nimmt der Ausdruck $H_{n,\sigma}$ die besonders einfache Gestalt an:

$$H_n = H_{n,1} = \sum_{-\mu_n' n < \lambda_m - n < \mu'' n} \left(1 + \frac{\lambda_m - n}{n}\right)^n e^{-(\lambda_m - n)} a_m,$$

die im Falle $\lambda_m = m$ nach einer trivialen Transformation die in der Einleitung für den Fall Taylorscher Reihen angegebene Formulierung liefert.

Setzt man

$$A(\lambda) = \sum_{\lambda_m < \lambda} a_m,$$

so läßt sich offenbar $f(z)$ in der Form des Stieltjesschen Integrals schreiben:

$$f(s) = \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda s} dA(\lambda).$$

Auf dieselbe Form lassen sich auch Integrale $\int_0^\infty a(\lambda) e^{-\lambda s} ds$ mit nach Riemann integrablen $a(\lambda)$ bringen, indem $A(\lambda) = \int_0^\lambda a(\lambda) d\lambda$ gesetzt wird, so daß alle von uns zu betrachtenden Fälle mit dem Satz umspannt werden:

Ist $A(\lambda)$ eine im Intervall $0 \leqq \lambda < \infty$ definierte Funktion, die in jedem endlichen Teilintervall dieser Intervalls von beschränkter

12) In der Summe $\sum_{\lambda_m > a}^{\lambda_m < b}$ durchläuft λ_m alle innerhalb des Intervalls $a \ldots b$ liegenden Elemente der Folge λ_m. Ähnlich ist die Summe $\sum_{\lambda_m \geqq a}^{\lambda_m < b}$ zu verstehen usw.

Digitized by Google

Schwankung ist, und konvergiert

$$f(s) = \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda s}\, dA(\lambda)$$

für $\Re s > 0$, *so ist dafür, daß der Nullpunkt ein regulärer Punkt von* $f(s)$ *ist, notwendig und hinreichend, daß*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|H_{n,\sigma}|} < 1 \tag{7}$$

ist, wo

$$H_{n,\sigma} = \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')}^{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} \left(\frac{\lambda\sigma e}{n}\right)^n e^{-\lambda\sigma}\, dA(\lambda)$$

gesetzt wurde und $0 < \mu \leqq \mu_n' < 1$, $0 < \mu \leqq \mu_n''$ *gilt für einen beliebigen aber festen positiven echten Bruch* μ *und beliebiges aber festes positives* σ.

Beim Beweise können wir ohne Schaden für die Allgemeinheit annehmen, daß $A(\lambda) = 0$ für $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ist.

Man bedenke nun, daß für die Regularität von $s = 0$ notwendig und hinreichend ist, daß die Potenzreihenentwickelung von $f(s)$ in der Umgebung von $s = \sigma$ $(\sigma < 0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-\sigma)}{n!} f^{(n)}(\sigma), \qquad f^{(n)}(\sigma) = (-1)^n \int_0^{\infty} \lambda^n e^{-\lambda\sigma}\, dA(\lambda)\,^{13})$$

einen Konvergenzradius $> \sigma$ hat, d. h., nach dem Cauchy-Hadamardschen Kriterium, daß

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_0^{\infty} \lambda^n e^{-\lambda s}\, dA(\lambda)\right|} < \frac{1}{\sigma} \tag{8}$$

ist. Wir teilen hier für jedes n das Integral in drei Teilintegrale:

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')} + \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')}^{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} + \int_{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')}^{\infty} = A_n + S_n + R_n$$

und schätzen zunächst die beiden äußeren Integrale A_n und R_n ab: Zu dem Zwecke benutzen wir die aus der Konvergenz des Integrals für $\Re s > 0$ folgenden Abschätzungen[13]) $(\lambda > 1)$:

13) Aus der Konverganz von (7) für ein $s = \varepsilon > 0$ folgt für $\lambda \uparrow \infty$ und

Digitized by Google

$$(9)\qquad \lg\left|\int_0^\lambda dA(\lambda)\right| = \lg|A(\lambda)| = o(\lambda), \quad |A(\lambda)| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon\lambda}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ mit nur von ε (und $f(s)$) abhängigem C_ε. Dann folgt durch partielle Integration

$$A_n = \int_0^{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')} \lambda^n e^{-\lambda\sigma}\, dA(\lambda) = -\int_0^{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')} \left(\frac{n}{\lambda} - \sigma\right) \lambda^n e^{-\lambda\sigma} A(\lambda)\, d\lambda$$

$$+ (\lambda^n e^{-\lambda\sigma})_{\lambda = \frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')} A\left(\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')\right).$$

Im ersten Summand ist hier offenbar $\frac{n}{\lambda} \geqq \frac{\sigma}{1-\mu_n'} > \sigma$, so daß für seinen absoluten Betrag nach (9) die Abschätzung folgt:

$$< C_\varepsilon n \int_0^{\frac{n}{\sigma}(1-\mu)} \lambda^{n-1} e^{-\lambda(\sigma-\varepsilon)}\, d\lambda = C_\varepsilon n \int_0^n \bar{\lambda}^{n-1} \left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)^n e^{-\bar{\lambda}} e^{\bar{\lambda}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1-\mu)\right)}\, d\bar{\lambda},$$

wenn wir $\bar{\lambda} = \frac{\lambda\sigma}{1-\mu}$ als neue Integrationsvariable einführen.

---

geeignete $\mu \leqq \lambda$

$$\int_0^\lambda dA(\lambda) = \int_0^\lambda e^{\lambda\varepsilon} e^{-\lambda\varepsilon}\, dA(\lambda) = O\left(e^{\lambda\varepsilon} \int_0^\mu e^{-\lambda\varepsilon}\, dA(\lambda)\right) = O(e^{\lambda\varepsilon}),$$

da $e^{\lambda\varepsilon}$ für $\lambda \uparrow \infty$ monoton zunimmt. Wenn umgekehrt $A(\lambda) = O(e^{\lambda\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ ist, folgt für jedes $n \geqq 0$, und $\Re s \geqq \varepsilon_1 > 0$, $q > p > 1$, $p \to \infty$

$$\int_p^q \lambda^n e^{-\lambda s}\, dA(\lambda) = -\int_p^q \left(\frac{n}{\lambda} - s\right) \lambda^n e^{-\lambda s} A(\lambda)\, d\lambda + [\lambda^n e^{-\lambda s} A(\lambda)]_p^q$$

$$= O\left((n+|s|)\int_p^q \lambda^n e^{-\lambda\Re s} e^{\lambda\frac{\varepsilon_1}{2}}\, d\lambda\right) + O\left(p^n e^{-p\varepsilon_1} e^{p\frac{\varepsilon_1}{2}} + q^n e^{-q\varepsilon_1} e^{q\frac{\varepsilon_1}{2}}\right)$$

$$= O\left((n+|s|)\int_p^q e^{\lambda\frac{\varepsilon_1}{4}} e^{-\lambda\left(\Re s - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)}\, d\lambda\right) + O\left(e^{-p\frac{\varepsilon_1}{4}}\right) = O\left(\frac{n+|s|}{\Re s - \frac{3\varepsilon_1}{4}} e^{-p\frac{\varepsilon_1}{4}}\right),$$

woraus erstens die Konvergenz von $\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda s}\, dA(\lambda)$ für $\Re s > 0$ folgt, sodann die Gleichmäßigkeit dieser Konvergenz für $|\Im s| \leqq$ konst., $\Re s \geqq 0$. Daher läßt sich das Integral $\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda s}\, dA(\lambda)$ elementenweise nach s integrieren und stellt demzufolge für ganze positive n die mit $(-1)^n$ multiplizierte $n$te Ableitung von $f(s)$ dar. — Aus der obigen Überlegung folgt zugleich leicht, daß das Konvergenzgebiet eines solchen Integrals eine Halbebene ist.

Digitized by Google

Der Ausdruck rechts ist aber

$$\leqq C_\varepsilon \left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)^n e^{n\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1-\mu)\right)} n \int_0^n \lambda^{n-1} e^{-\lambda}\, d\lambda$$

$$\leqq C_\varepsilon n \left(\frac{(1-\mu)\, e^{\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1-\mu)\right)}}{\sigma}\right)^n \int_0^\infty \lambda^{n-1} e^{-\lambda}\, d\lambda$$

$$\leqq C_\varepsilon n! \left(\frac{(1-\mu)\, e^{\frac{\varepsilon}{\sigma}+\mu}}{\sigma}\right)^n.$$

Im zweiten Summand von A_n ist die Ableitung des Ausdrucks $\lambda_1^n e^{-\lambda\sigma} : \lambda^n e^{-\lambda\sigma}\left(\frac{n}{\lambda} - \sigma\right)$ positiv für $\lambda < \frac{n}{\sigma}$, so daß wir diesen Ausdruck sicher vergrößern, wenn wir $\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')$ durch $\frac{n}{\sigma}(1-\mu)$ ersetzen. Daher ist der absolute Betrag des zweiten Summanden von A_n

$$\leqq C_\varepsilon \left(\frac{(1-\mu)\, n}{\sigma}\right)^n e^{-n(1-\mu)} e^{\varepsilon \frac{n(1-\mu_n')}{\sigma}} \leqq C_\varepsilon \left(\frac{(1-\mu)\, e}{\sigma}\right)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-n(1-\mu)} e^{\varepsilon \frac{n(1-\mu)}{\sigma}}$$

$$= C_\varepsilon \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{(1-\mu)\, e^{\mu+\frac{\varepsilon}{\sigma}-\frac{\varepsilon\mu}{\sigma}}}{\sigma}\right)^n \leqq C_\varepsilon n! \left(\frac{(1-\mu)\, e^{\mu+\frac{\varepsilon}{\sigma}}}{\sigma}\right)^n,$$

wegen $\frac{n^n}{n!} < e^n$, $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$. So ergibt sich

$$|A_n| < 2C_\varepsilon \left(\frac{S_1}{\sigma}\right)^n n!, \quad S_1 = (1-\mu)\, e^{\mu+\frac{\varepsilon}{\sigma}}.$$

In derselben Weise folgt für R_n durch partielle Integration unter Berücksichtigung von (9) für $\varepsilon < \sigma$

$$R_n = \int_{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')}^\infty \lambda^n e^{-\lambda\sigma}\, dA(\lambda)$$

$$= -\int_{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')}^\infty \left(\frac{n}{\lambda} - \sigma\right) \lambda^n e^{-\lambda\sigma} A(\lambda)\, d\lambda - \left(\lambda^n e^{-\lambda\sigma}\right)_{\lambda = \frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} A\left(\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')\right).$$

Hier ist im ersten Summand $\frac{n}{\lambda} < \frac{\sigma}{1+\mu_n''} < \sigma$. Daher ergibt sich für den absoluten Betrag dieses Summanden, wenn wir (9) be-

Digitized by Google

nutzen und $\bar{\lambda} = \frac{\lambda\sigma}{1+\mu}$ als neue Integrationsvariable einführen, die Abschätzung:

$$\leqq C_\varepsilon \sigma \int_{\frac{n}{\sigma}(1+\mu)}^{\infty} \lambda^n e^{-\lambda(\sigma-\varepsilon)} d\lambda$$

$$= C_\varepsilon \sigma \left(\frac{1+\mu}{\sigma}\right)^{n+1} \int_n^\infty \bar{\lambda}^n e^{-\bar{\lambda}} e^{\bar{\lambda}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1+\mu)\right)} d\bar{\lambda}$$

$$\leqq C_\varepsilon \sigma \left(\frac{1+\mu}{\sigma}\right)^{n+1} e^{n\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1+\mu)\right)} \int_n^\infty \lambda^n e^{-\lambda} d\lambda,$$

wenn ε so klein angenommen wird, daß $\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1+\mu) > 1$ und daher der Koeffizient von $\bar{\lambda}$ im Exponenten des dritten Faktors des Integranden *negativ* ist. Der letzte Ausdruck ist aber kleiner als

$$C_\varepsilon \sigma \left(\frac{1+\mu}{\sigma}\right) \left(\frac{(1+\mu) e^{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1+\mu)}}{\sigma}\right)^n \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda} d\lambda$$

$$< 2 C_\varepsilon n! \left(\frac{(1+\mu) e^{\frac{\varepsilon}{\sigma} - \mu + \frac{\mu\varepsilon}{\sigma}}}{\sigma}\right)^n.$$

Der zweite Summand des Ausdrucks für R_n ist absolut $\leqq$

$$C_\varepsilon \left(\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')\right)^n e^{-n(1+\mu_n'')} e^{\varepsilon \frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} = C_\varepsilon \left(\frac{n}{\sigma}\right)^n \left((1+\mu_n'') e^{-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1+\mu_n'')}\right)^n.$$

Für so kleine ε, daß $\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1+\mu) > 1$ ist, ist aber die Ableitung von $(1+x) e^{-\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1+x)}$ nach x für $x \geqq \mu$ negativ und so erhalten wir für den absoluten Betrag dieses zweiten Summanden die Abschätzung:

$$< C_\varepsilon \left(\frac{(1+\mu) e^{-\mu}}{\sigma}\right)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\varepsilon \frac{n}{\sigma}(1+\mu_n)} < C_\varepsilon n! \left(\frac{(1+\mu) e^{-\mu + \frac{2\varepsilon}{\sigma}}}{\sigma}\right)^n.$$

Damit erhalten wir für R_n, wegen $\frac{\varepsilon\mu}{\sigma} < \frac{\varepsilon}{\sigma}$:

Digitized by Google

$$|R_n| \leqq \frac{C_\varepsilon n!}{\sigma^n}\left\{2\left((1+\mu)\,e^{\frac{\varepsilon}{\sigma}-\mu+\frac{\varepsilon\mu}{\sigma}}\right)^n+\left((1+\mu)\,e^{-\mu+\frac{2\varepsilon}{\sigma}}\right)^n\right\}$$

$$\leqq 3\,C_\varepsilon n!\left(\frac{(1+\mu)\,e^{\frac{2\varepsilon}{\sigma}-\mu}}{\sigma}\right)^n,$$

$$|R_n| < 3\,C_\varepsilon\left(\frac{S_2}{\sigma}\right)^n n!, \quad S_2 = (1+\mu)\,e^{2\frac{\varepsilon}{\sigma}-\mu},$$

und daher wegen

$$(1-\mu)e^{\mu} = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\,\mu^n}{n!} < (1+\mu)\,e^{-\mu}$$

$$= 1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)\,\mu^n}{n!},$$

$$\frac{|A_n+R_n|}{n!} < 4\,C_\varepsilon\left(\frac{S}{\sigma}\right)^n, \quad S = e^{2\frac{\varepsilon}{\sigma}}(1+\mu)\,e^{-\mu} \tag{10}$$

für solche $\varepsilon > 0$, daß $\varepsilon < \sigma$ und $\left(1-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)(1+\mu) > 1$ ist. Da aber

$$(1+\mu)\,e^{-\mu} = \frac{1+\mu}{1+\mu+\frac{\mu^2}{2!}+\cdots} < 1$$

ist und ε beliebig klein angenommen werden kann, folgt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|A_n+B_n|}{n!}} < \frac{1}{\sigma}.$$

Daher reduziert sich wegen $\sqrt[n]{n!}\,.\,\frac{e}{n} \to 1$ für $n \to \infty$ die Bedingung (8) auf die in unserem Satze behauptete Bedingung, w. z. b. w.

Wir heben noch hervor, daß beim Beweise der Ungleichung (10) kein Gebrauch von der Ganzzahligkeit von n gemacht wurde, wenn wir auch $n!$ für $\Gamma(n+1)$ geschrieben haben.

3. Die Bedingung (7) des hiermit bewiesenen Satzes läßt sich auf eine etwas allgemeinere Weise formulieren, die eine einfache, aber in der Folge wichtige Verschärfung nahelegt. Wollen wir die notwendige und hinreichende Bedingung für die Regularität des Punktes $s = it$ der imaginären Axe aufzustellen, so genügt es offenbar, das oben hergeleitete Kriterium auf das Integral $\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,dA_t(\lambda)$ anzuwenden, wo (unter der lediglich normierenden Bedingung $A(0) = 0$)

Digitized by Google

$$A_t(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-\lambda i t}\, dA(\lambda) = it \int_0^\lambda e^{-\lambda i t} A(\lambda)\, d\lambda + e^{-\lambda i t} A(\lambda),$$

$$|A_t(\lambda)| \leqq (|t|+1)\, C_\varepsilon (\lambda+1)\, e^{\varepsilon\lambda} \tag{11}$$

ist. Dann ergibt sich die Bedingung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|H_{n,\sigma,t}|} < 1, \tag{12}$$

$$H_{n,\sigma,t} = \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')}^{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} \left(\frac{\lambda\sigma e}{n}\right)^n e^{-\lambda\sigma}\, dA_t(\lambda) = \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')}^{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} \left(\frac{\lambda\sigma e}{n}\right)^n e^{-\lambda(\sigma+it)}\, dA(\lambda).$$

Ist nun $t' \leqq t \leqq t''$ ein Regularitätsintervall τ, so muß (12) für t aus diesem Intervall gelten. Wir zeigen nun, daß (12) *gleichmäßig in diesem Intervall* für festes μ gilt.

Um dies zu beweisen, bemerke man erstens, daß für die Belegung $A_t(\lambda)$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine Ungleichung

$$|A_t(\lambda)| < \overline{C}_t\, e^{\varepsilon\lambda} \tag{13}$$

gilt, *gleichmäßig* für alle t aus τ. Denn aus (11) folgt zuerst $|A_t(\lambda)| \leqq (|t|+1)\,(\lambda+1)\, C_{\frac{\varepsilon}{2}}\, e^{\frac{\varepsilon}{2}\lambda}$ und daher für hinreichend große λ auch $|A_t(\lambda)| \leqq C_{\frac{\varepsilon}{2}}\, e^{\varepsilon\lambda}$, und durch Vergrößerung der Konstante $C_{\frac{\varepsilon}{2}}$ können wir offenbar erreichen, daß (13) für alle $\lambda \geqq 0$ gilt. Daher gilt die Abschätzung (10) in τ gleichmäßig, wenn C_ε durch $\overline{C}_\varepsilon$ ersetzt wird. Andererseits folgt aus unserer Voraussetzung über τ, daß es zu jedem $\sigma > 0$ ein $\sigma_1 > \sigma$ gibt, so daß $f(s)$ regulär in und auf jedem mit dem Radius σ_1 um einen Punkt $\sigma + it$ mit t aus τ beschriebenen Kreise ist. Ist B der durch alle diese Kreise überdeckte Bereich, auf dem $f(s)$ regulär ist, und M das Maximum von $|f(s)|$ auf B, so gilt offenbar gleichmäßig in t aus τ nach den Cauchyschen Abschätzungen

$$\frac{1}{n!} \left| \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda(\sigma+it)}\, dA(\lambda) \right| \leqq \frac{M}{\sigma_1^n}, \tag{14}$$

woraus in Verbindung mit (10) die Richtigkeit unserer Behauptung folgt.

4. In den Bedingungen (7) und (12) durchläuft n die Folge aller ganzen positiven Zahlen. Wir wollen nun zeigen, daß für

Digitized by Google

die Regularität von $s = 0$ bzw. $s = it$, $t' \leqq t \leqq t''$ sogar notwendig ist, daß (gleichmäßig in t mit $t' \leqq t \leqq t''$)

$$(15) \qquad \overline{\lim} \sqrt[n]{|H_{n,\sigma}|} < 1 \text{ bzw. } \overline{\lim} \sqrt[n]{|H_{n,\sigma,t}|} < 1,$$

wenn n *stetig* ins Unendliche strebt. Wir brauchen offenbar nur die zweite Form der Bedingung zu behandeln. Sodann genügt es aber offenbar zu zeigen, daß für das Regularitätsintervall $\tau: t' \leqq t \leqq t''$ notwendig ist

$$(16) \qquad \overline{\lim} \sqrt[n]{|H_{n,\sigma,t,k}|} < 1, \quad H_{n,\sigma,t,k} = \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')}^{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} \left(\frac{\lambda \sigma e}{n}\right)^n e^{-\lambda(\sigma+it)} \lambda^k \, dA(\lambda)$$

gleichmäßig in $t' \leqq t \leqq t''$ *und* $-2 \leqq k \leqq -1$, wenn n durch *ganze* positive Werte ins Unendliche strebt. In der Tat wird offenbar die Abweichung eines positiven n in $H_{n,\sigma,t}$ von einem geeigneten ganzzahligen n in den Integrationsgrenzen durch eine erlaubte Änderung von μ_n', μ_n'' aufgewogen, im Exponenten der Wurzel macht diese Abweichung nichts aus, und der von λ unabhängige Faktor des Integranden $\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n$ multipliziert sich dabei nur mit einem Faktor, dessen $n$te Wurzel gegen 1 konvergiert. — Beim Beweise von (16) darf offenbar angenommen werden, daß $A(\lambda) = 0$ für $\lambda \leqq 1$ ist, da dies durch Subtraktion einer ganzen Funktion von $f(s)$ stets erreicht werden kann und die Werte von $H_{n,\sigma,t,k}$ für große n durch eine solche Abänderung offenbar unwesentlich beeinflußt werden. Betrachten wir nun die Schar der Funktionen:

$$f_k(s) = \int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda s} e^{-\lambda i t} \, dA(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \, dA_{t,k}(\lambda),$$

für $-2 \leqq k \leqq -1$, wo (wegen $A(\lambda) = 0$ für $0 \leqq \lambda \leqq 1$)

$$A_{t,k}(\lambda) = \int_0^\lambda \lambda^k e^{-\lambda i t} dA(\lambda) = \int_0^\lambda \left(it - \frac{k}{\lambda}\right) \lambda^k e^{-\lambda i t} A(\lambda) d\lambda + \lambda^k e^{-\lambda i t} A(\lambda)$$

ist, so folgt wegen (11)

$$|A_{t,k}| \leqq (|t|+1)(\lambda+1) e^{\varepsilon\lambda} C_\varepsilon < C_\varepsilon^* e^{\varepsilon\lambda},$$

wo C_ε^* eine Konstante ist, die von λ, t und k unabhängig ist und nur von $f(s)$ und dem Intervall τ abhängt. Betrachten wir daher die Differenz zwischen

Digitized by Google

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda\sigma e}{n}\right)^n \lambda^k e^{-\lambda(\sigma+it)}\, dA(\lambda) \quad \text{und} \quad \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\mu_n')}^{\frac{n}{\sigma}(1+\mu_n'')} \left(\frac{\lambda\sigma e}{n}\right)^n \lambda^k e^{-\lambda(\sigma+it)}\, dA(\lambda),$$

so gilt für sie die Abschätzung (10), in der nur C_ε durch C_ε^* zu ersetzen ist. Daher genügt es, wegen $\sqrt[n]{n!}\,\frac{e}{n} \to 1$, für $n \to \infty$, für die $n$te Ableitung von $f_k(s)$:

$$f_k^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} \lambda^n e^{-\lambda(\sigma+it)} \lambda^k\, dA(\lambda), \qquad s = \sigma + it$$

eine zu (14) analoge Abschätzung gleichmäßig in k mit $-2 \leqq k \leqq -1$ und t aus τ zu beweisen:

$$\frac{1}{n!} |f_k^{(n)}(s)| \leqq \frac{M}{\sigma_1^n}, \qquad \sigma_1 > \sigma. \tag{17}$$

Und diese Ungleichnng folgt sofort aus den Cauchyschen Abschätzungen, wenn wir die folgende Tatsache beweisen:

Ist $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s}\, dA(\lambda)$ *mit* $A(\lambda) = 0$ *für* $0 \leqq \lambda \leqq 1$ *konvergent für* $\Re s > 0$ *und ist* $f(s)$ *regulär für*

$$s = \sigma + it \left\{ \begin{matrix} t' \leqq t \leqq t'' \\ -\delta \leqq \sigma \leqq \delta \end{matrix} \right\}, \qquad \delta > 0 \tag{18}$$

so sind auch alle Integrale $f_k(s) = \int_0^{\infty} \lambda^k e^{-\lambda s}\, dA(\lambda)$ *für* $-2 \leqq k \leqq -1$ *regulär in (18) und es gibt eine von* k *unabhängige Konstante* M^**, so daß in (18) durchweg*

$$|f_k(s)| \leqq M^*$$

ist.

Zum Beweise zeigen wir zuerst, daß $f_k(s)$ aus $f(s)$ durch die Integraloperation [14]):

$$f_k(s) = \frac{1}{\Gamma(-k)} \int_0^{\infty} u^{-k-1} f(s+u)\, du, \qquad -2 \leqq k \leqq -1 \tag{19}$$

hervorgeht, und zwar gilt diese Gleichung für $\Re s > 0$ und all-

14) Der Integrationsprozeß (19) stellt eine der Verallgemeinerungen des Begriffs der Ableitung auf nicht ganzzahlige Indizes dar. Vgl. für diese Verallgemeinerung die in der Fußnote (2) zitierten Hadamardschen Arbeiten. Ferner vgl. man für eine der Entwicklung des Textes ähnliche Betrachtung Landau, Ark. för math., astr. och fys., Bd. 3 (1907), Nr. 17, Über einen Konvergenzsatz des Herrn Phragmén.

Digitized by Google

gemeiner für jeden Punkt s, für den der Strahl $s+u\,(0 \leqq u < \infty)$ aus lauter regulären Punkten von $f(s)$ besteht. Dabei wird geradlinig längs der positiven reellen Axe integriert. Diese Gleichung folgt für $\Re s = \delta > 0$ aus der folgenden bekannten und sofort zu beweisenden Tatsache[15]):

In $\int_0^\infty \varphi(u) \sum_{n=0}^{\infty} g_n(u)\,du$ *kann die Summation mit der Integration vertauscht werden, wenn* $\int_0^\infty |\varphi(u)|\,du$ *existiert und die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(u)$ *für* $0 < u < \infty$ *gleichmäßig konvergiert.*

Um diesen Satz anzuwenden, setzen wir

$$f(s+u) = \int_1^\infty e^{-\lambda(s+u)}\,dA(\lambda)$$

$$= e^{-\frac{u+s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-(\lambda-\frac{1}{2})(s+u)}\,dA(\lambda),$$

wo die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1}$ gleichmäßig für $0 \leqq u < \infty$ konvergiert, wie aus der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals

$$\int_1^\infty e^{-(\lambda-\frac{1}{2})s}\,dA(\lambda)$$

für $\delta \leqq \Re s < \infty$ sofort folgt. Da aber auch das Integral

$$\int_0^\infty u^{-k-1} e^{-\frac{u}{2}}\,du$$

existiert, folgt

$$\frac{1}{\Gamma(-k)} \int_0^\infty u^{-k-1} f(s+u)\,du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(-k)} \int_0^\infty du \int_n^{n+1} u^{-k-1} e^{-\lambda(s+u)}\,dA(\lambda)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\lambda s}\,dA(\lambda) \frac{1}{\Gamma(-k)} \int_0^\infty u^{-k-1} e^{-\lambda u}\,du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \lambda^k e^{-\lambda s}\,dA(\lambda)$$

$$= \int_1^\infty \lambda^k e^{-\lambda s}\,dA(\lambda) = f_k(s).$$

15) Vgl. Bromwich, Infinite series, 2nd ed., pp. 495, 499.

Digitized by Google

Ist nun aber s ein Punkt, für den der ganze Strahl $s+u$, $0 \leqq u < \infty$ aus regulären Punkten von $f(s)$ besteht, so gibt es einen Kreis Ω um s, so daß der ganze Streifen $\Omega + u$ $(0 \leqq u < \infty)$ aus regulären Punkten von $f(s)$ besteht. Dann aber konvergiert das Integral auf der rechten Seite von (19) wegen (mit einem nur von $f(s)$ abhängigen C)

$$f(s) = \int_1^\infty e^{-\lambda s}\, dA(\lambda) = O\left(e^{-\frac{\Re s}{2}}\right), \tag{20}$$

$$|f(s+u)| < C e^{-\frac{u}{2}} \qquad u \geqq -\Re s - \delta$$

gleichmäßig in s aus Ω, und $f_k(s)$ ist analytisch in Ω.

Es sei nun $\overline{M}$ die obere Grenze von $|f(s+\delta)|$ in (18). Dann gilt für alle s aus (18) (wegen $-2 \leqq k \leqq -1$ und (20))

$$\Gamma(-k) f_k(s) = \int_0^\infty u^{-k-1} f(s+u)\, du = \int_0^{-\Re s+\delta} + \int_{-\Re s+\delta}^\infty,$$

$$\Gamma(-k)\,|f_k(s)| < \overline{M} \int_0^{-\Re s+\delta} u^{-k-1}\, du + C \int_{-\Re s+\delta}^\infty u^{-k-1} e^{-\frac{u}{2}}\, du < \overline{M}\, \frac{(-\Re s+\delta)^{-k}}{-k}$$

$$+ C \int_0^\infty u^{-k-1} e^{-\frac{u}{2}}\, du,$$

$$|f_k(s)| < \overline{M}(1+2\delta)^2 + 4C,$$

wo die rechte Seite in der Tat, wie behauptet, von k unabhängig ist. Damit sind die Behauptungen (15) vollständig bewiesen.

Digitized by Google

Über die Parameterdarstellung einer von C. Segre betrachteten Kongruenz (4,4) mittels Thetafunktionen ($p = 2$).

Von E. A. Weiß in Bonn [1]).

C. Segre [2]) hat gezeigt, daß die bei der zweieindeutigen Abbildung des tetraedralen Komplexes auf den Punktraum auftretende Grenzfläche eine Kummersche Fläche ist. Die ihr im tetraedralen Komplex entsprechende Grenzkongruenz (4,4) ist daher einer Parameterdarstellung mittels Thetafunktionen von zwei Veränderlichen fähig. Diese soll im Folgenden angegeben werden.

1. In der genannten Abhandlung über die, später nach ihm benannte, dreidimensionale Mannigfaltigkeit 3. Ordnung im $\mathfrak{R}_4$ mit 10 Doppelpunkten hat C. Segre die Eigenschaften dieser S_3^3 zunächst aus der projektiven Geometrie des $\mathfrak{R}_4$ heraus abgeleitet, dann aber auch einen Zusammenhang mit der Geometrie im $\mathfrak{R}_3$ angegeben: Die Abbildung der Geraden des $\mathfrak{R}_3$ auf Punkte einer M_4^2 im $\mathfrak{R}_5$ liefert als Bild eines tetraedralen Komplexes eine spezielle M_3^4. Der scheinbare Umriß dieser M_3^4 von einem ihrer Punkte aus gesehen und von einem $\mathfrak{R}_4$ allgemeiner Lage aufgefangen gibt die S_3^3.

Ein anderer Zusammenhang zwischen $\mathfrak{R}_3$ und S_3^3 ist von G. Castelnuovo gefunden und von A. Dragoni [3]) untersucht worden: Bildet man das System 5. Stufe der Flächen 2. Ordnung durch 5 Punkte des $\mathfrak{R}_3$ auf die Flache (R_3) des $\mathfrak{R}_4$ ab, so entsprechen den Punkten des $\mathfrak{R}_3$ die Punkte, den Kegeln des Systems die Tangentialflache einer S_3^3 im $\mathfrak{R}_4$.

I. *Der Übergang zwischen den Abbildungen von Segre und Castelnuovo wird im $\mathfrak{R}_3$ durch die eineindeutige Abbildung des tetraedralen Komplexes auf den Punktraum vermittelt.*

Ein tetraedraler Komplex kann nämlich nach Reye auf $\infty^{2\cdot 2}$ Weisen als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier

1) Vorgetragen in der 245. Sitzung am 29. Februar 1928.

2) C. Segre, Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni. Atti di Torino XXII (1887).

3) G. Castelnuovo, Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni. Atti del Ist. Ven. Ser. VII, 2 (1890). — A. Dragoni, Sulla varietà cubica di S_4 dotata di dieci punti doppi. Giornale di Mat. XL (1902).

Digitized by Google

kollinearer Räume erzeugt werden. Wählt man das Koordinatentetraeder zur Singularitätenfläche und:

$$(1) \qquad \underline{x}_i = \varrho_i x_i \quad \varrho_i \neq 0; \quad \varrho_i - \varrho_k \neq 0 \ (i \neq k) \quad i,k = 0,1,2,3$$

als erzeugende Kollineation, so erhält man eine Parameterdarstellung der Geraden $\mathfrak{X}_{ik}$ des tetraedralen Komplexes, wenn man die Punkte x und $\underline{x}$ verbindet:

$$(2) \qquad \mathfrak{X}_{ik} = (\varrho_i - \varrho_k) x_i x_k.$$

Die Koordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ genügen dann neben der Plückerschen Identität der Gleichung:

$$(3) \quad (\varrho_0\varrho_1 + \varrho_2\varrho_3)\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + (\varrho_0\varrho_2 + \varrho_3\varrho_1)\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + (\varrho_0\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2)\mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0$$

des tetraedralen Komplexes. Deutet man die $\mathfrak{X}_{ik}$ als Punktkoordinaten im $\mathfrak{R}_5$, so ist (2) eine Parameterdarstellung der Bild-M_3^4 des tetraedralen Komplexes und (3) die Gleichung einer M_4^2, welche sie aus der Plückerschen Mannigfaltigkeit ausschneidet.

Die Gleichungen (2) geben gleichzeitig den analytischen Ausdruck für die eineindeutige Abbildung des tetraedralen Komplexes auf den Punktraum, nämlich den mit bekannten[4]) Singularitäten behafteten Zusammenhang zwischen Geraden $\mathfrak{X}$ des tetraedralen Komplexes und Punkten x des „Bildraumes".

Umgekehrt berechnen sich aus vorgegebenen Koordinaten:

$$(4) \qquad \mathfrak{X}_{ik} = (\varrho_i - \varrho_k)\mathfrak{Y}_{ik}$$

einer Geraden des tetraedralen Komplexes die Koordinaten des Bildpunktes mittels der Gleichungen:

$$(5) \quad x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 = \mathfrak{Y}_{01}\mathfrak{Y}_{02}\mathfrak{Y}_{03} : \mathfrak{Y}_{01}\mathfrak{Y}_{31}\mathfrak{Y}_{12} : \mathfrak{Y}_{23}\mathfrak{Y}_{02}\mathfrak{Y}_{12} : \mathfrak{Y}_{23}\mathfrak{Y}_{31}\mathfrak{Y}_{03}.$$

Sie versagen, wenn $\mathfrak{X}$ einer Koordinatenebene angehört und können dann durch einfachere ersetzt werden. Wegen (2) führt das Ausziehen der Quadratwurzeln nicht zu Mehrdeutigkeiten.

Den Geraden einer Kongruenz (2,2), die von einem linearen Komplexe $\mathfrak{C}$ aus dem tetraedralen Komplex ausgeschnitten wird, entsprechen die Punkte der Fläche 2. Ordnung:

$$(6) \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{X}) = \mathfrak{C}_{01}(\varrho_2 - \varrho_3)x_2x_3 + \mathfrak{C}_{02}(\varrho_3 - \varrho_1)x_3x_1 + \mathfrak{C}_{03}(\varrho_1 - \varrho_2)x_1x_2$$
$$+ \mathfrak{C}_{23}(\varrho_0 - \varrho_1)x_0x_1 + \mathfrak{C}_{31}(\varrho_0 - \varrho_2)x_0x_2 + \mathfrak{C}_{12}(\varrho_0 - \varrho_3)x_0x_3 = 0$$

durch die Eckpunkte des Koordinatentetraeders. Die Gleichung (6) vermittelt eine Abbildung dieser F^3 auf die linearen Komplexe im Raume des tetraedralen Komplexes oder auf die R_4 im $\mathfrak{R}_5$.

4) Vgl. die duale Abbildung bei R. Sturm, Liniengeometrie I, S. 369.

Digitized by Google

Eine singuläre Fläche (6), deren Koordinaten also der Gleichung:

$$(7)\qquad \sqrt{(\varrho_0-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho_3)\,\mathfrak{C}_{01}\mathfrak{C}_{23}}+\sqrt{(\varrho_0-\varrho_2)(\varrho_3-\varrho_1)\,\mathfrak{C}_{02}\mathfrak{C}_{31}}+\sqrt{(\varrho_0-\varrho_3)(\varrho_1-\varrho_2)\,\mathfrak{C}_{03}\mathfrak{C}_{12}}=0$$

genügen, gibt einen R_4, der M_3^4 berührt.

Die singulären Flächen des Systems (6) durch einen festen Punkt a des Bildraums werden hiernach auf die Tangential-R_4 der M_3^4 durch ihren Punkt $\mathfrak{A}_{ik}=(\varrho_i-\varrho_k)\,a_i a_k$ abgebildet, die, von einem $\mathfrak{R}_4$ allgemeiner Lage aufgefangen nach C. Segre die Tangentialflache einer S_3^3 liefern. So ergibt sich die Abbildung von Castelnuovo durch Zusammensetzung der eineindeutigen Abbildung des tetraedralen Komplexes auf den Punktraum mit der Segreschen Konstruktion der S_3^3 aus dem tetraedralen Komplex.

2. Die Einzelheiten der auf diese Weise entstandenen geschlossenen Kette von Abbildungen übergehen wir und zeigen nur an einem, den einzelnen Schritten nach bekannten[5]) Beispiel, wie sie geometrische Figuren der verschiedenen Räume miteinander verbindet.

Einer Fläche 2. Ordnung F^2 durch die fünf Basispunkte des Bildraumes — die Eckpunkte des Koordinatentetraeders und den Punkt a — entspricht nacheinander eine Kongruenz (2,2), eine Zyklide als Schnitt zweier M_3^2 im $\mathfrak{R}_4$, eine Fläche 3. Ordnung als Projektion der Zyklide von einem ihrer Punkte aus oder als Schnitt der S_3^3 mit einem R_3.

Die vier Koordinateneckpunkte auf F^2, ihre 2.4 Erzeugenden durch diese Punkte und ihre Schnitt-C^2 mit den Koordinatenebenen geben nacheinander die 16 singulären Büschel der Kongruenz (2,2) (Kummersche Konfiguration), die 16 Geraden der Zyklide und 16 Geraden der Fläche 3. Ordnung.

Der fünfte Basispunkt a auf F^2 zeichnet zwei weitere Erzeugende durch a, zwei Kurven 3. Ordnung durch alle fünf Basispunkte und sechs ebene Schnitte durch a und je zwei Koordinateneckpunkte auf F^2 aus. Sie geben in der Kongruenz (2,2) die Gerade $\mathfrak{A}$ und die zehn durch $\mathfrak{A}$ hindurchlaufenden Reguli 2. Ordnung der Kongruenz, auf der Zyklide den Punkt $\mathfrak{A}$ und die zehn durch ihn hindurchlaufenden Kurven 2. Ordnung, auf der kubischen Fläche $1+10$ weitere Geraden.

---

5) $F^2 \to$ Kongruenz (2,2) (Geradenkugeltransformation) $\to$ Zyklide (Baker, Principles of geometry IV (1925), S. 172) $\to$ Fläche 3. Ordnung (Bertini-Duschek, Einführung in die Geometrie mehrdimensionaler Räume (1924), S. 198) $\to F^2$.

Digitized by Google

Es bietet keine Schwierigkeiten, die bekannten Inzidenzsätze über die 16 Büschel der Kummerschen Konfiguration, die 16 Geraden der Zyklide, die 27 Geraden der kubischen Fläche und die in der Kongruenz (2,2) enthaltenen Reguli 2. Ordnung aus der übersichtlichen Figur auf F^2 abzulesen. Projiziert man diese Figur vom Punkte a aus auf eine Ebene, so erhält man die von Clebschs ebener Abbildung der Fläche 3. Ordnung her bekannte Figur von 6 Punkten in der Ebene mit ihren 15 Verbindungsgeraden zu je zweien und ihren 6 Verbindungskegelschnitten zu je fünf.

3. Nach C. Segre ist nun der scheinbare Umriß der S_3^3 von einem ihrer Punkte aus oder also der scheinbare Umriß der M_3^4 von zweien ihrer Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus gesehen eine Kummersche Fläche. Die Tangential-R_4 der M_3^4 durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche sie aus einem $\mathfrak{R}_3$ allgemeiner Lage ausschneiden, geben bei der Abbildung von Castelnuovo die Kegel 2. Ordnung durch die Eckpunkte des Koordinatentetraeders und die Punkte a, b. Die Kummersche Fläche als Punktort wird daher auf die durch diese sechs Punkte bestimmte Weddlesche Fläche abgebildet[6]).

Segres Abbildung der S_3^3 auf den tetraedralen Komplex vermittelt andererseits eine zweieindeutige Abbildung des tetraedralen Komplexes[7]) auf den Raum der Kummerschen Fläche: Eine Ebene durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ trifft die M_3^4 in zwei weiteren Punkten und den Raum der Kummerschen Fläche in einem Punkt, dem Bildpunkt der beiden variablen Punkte von M_3^4. Oder (in der Sprache des $\mathfrak{R}_3$): ein Regulus 2. Ordnung durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ schneidet den tetraedralen Komplex in zwei weiteren Strahlen. Der Kummerschen Fläche als Grenzfläche dieser zweieindeutigen Abbildung entspricht dabei eine Grenzkongruenz (4,4) im tetraedralen Komplex.

Faßt man diese beiden Resultate mittels I zusammen, so folgt:

II. *Die bei der zweieindeutigen Abbildung des tetraedralen Komplexes auf den Punktraum auftretende Grenzkongruenz* (4,4) *gibt bei der eineindeutigen Abbildung eine Weddlesche Fläche. Ihre Doppelpunkte sind die Eckpunkte des singulären Tetraeders und die Bildpunkte der bei der zweieindeutigen Abbildung ausgezeichneten Geraden*[8]).

6) Die Beziehung, welche so zwischen dem Raum der Kummerschen und dem Raum der Weddleschen Fläche entsteht, ist unabhängig von Th. Reye (Crelles Journal, 86, 1879), F. Schottky (Crelles Journal, 105, 1889) und De Paolis (Rend. Ac. Linc., Ser. IV, Vol. 6, 1890) untersucht worden.

7) Über die zweieindeutige Abbildung des allgemeinen quadratischen Komplexes vgl. R. Sturm, Liniengeometrie III, S. 262.

8) Dasselbe läßt sich, wenn man auf die Einsicht in den größeren Zusammen-

Digitized by Google

4. Die bei der zweieindeutigen Abbildung eines quadratischen Komplexes auf den Punktraum auftretende Grenzkongruenz ist nach einem Satze von Sturm[9]) Schnitt zweier quadratischer Komplexe. Ein zweiter Komplex läßt sich in unserem Falle auf Grund von II folgendermaßen konstruieren:

Die Weddlesche Fläche des Satzes II kann als Erzeugnis zweier projektiver Büschel von Kegeln 2. Ordnung durch die Eckpunkte der singulären Tetraeders und mit den Scheiteln in a und b gewonnen werden[10]). In der Projektivität entsprechen sich Kegel, deren Erzeugende die Eckpunkte des Tetraeders im gleichen Wurfe projizieren. Es sind sich also insbesondere zugeordnet: die beiden Komplexkegel, die beiden Weddleschen Kegel (die von einem Doppelpunkte aus die übrigen fünf projizieren) und die drei Ebenenpaare der beiden Büschel.

Die Abbildung liefert nun:

III. *Die Grenzkongruenz ist Schnitt des tetraedralen Komplexes und eines quadratischen Komplexes mit zwei windschiefen Doppelstrahlen. Man erhält ihn als Erzeugnis der Tangentialkomplexbüschel des tetraedralen Komplexes in* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$. *Die Projektivität zwischen diesen Büscheln ist dadurch bestimmt, daß sich je zwei Komplexe entsprechen, die ein Paar gegenüberliegender Kanten des singulären Tetraeders enthalten.*

Setzen wir:

$$c_{ik} = a_i b_k - a_k b_i, \tag{8}$$

so ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} &c_{23}(\mathfrak{Y}_{02}\mathfrak{Y}_{03} - \mathfrak{Y}_{31}\mathfrak{Y}_{12}) + c_{01}(\mathfrak{Y}_{02}\mathfrak{Y}_{12} - \mathfrak{Y}_{31}\mathfrak{Y}_{03}) \\ &+ c_{31}(\mathfrak{Y}_{03}\mathfrak{Y}_{01} - \mathfrak{Y}_{12}\mathfrak{Y}_{23}) + c_{02}(\mathfrak{Y}_{03}\mathfrak{Y}_{23} - \mathfrak{Y}_{12}\mathfrak{Y}_{01}) = 0 \\ &+ c_{12}(\mathfrak{Y}_{01}\mathfrak{Y}_{02} - \mathfrak{Y}_{23}\mathfrak{Y}_{31}) + c_{03}(\mathfrak{Y}_{01}\mathfrak{Y}_{31} - \mathfrak{Y}_{23}\mathfrak{Y}_{02}) \end{aligned} \tag{9}$$

hang verzichtet, kürzer so einsehen: Ein Regulus 2. Ordnung durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, der den tetraedralen Komplex in zwei weiteren Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ schneidet, ist Basis eines Bündels von linearen Komplexen durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Dies Komplexbündel geht bei der eineindeutigen Abbildung des tetraedralen Komplexes auf den Punktraum in ein Bündel von F^2 durch die Eckpunkte des Tetraeders und die Punkte a, b über. Das Flächenbündel hat als Basis acht assoziierte Punkte, außer den genannten sechs festen „Basispunkten" zwei variable Punkte x, x'. Für Geraden der Grenzkongruenz ist nun $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'$. Die entsprechenden Punkte $x = x'$ erfüllen die durch die Basispunkte bestimmte Weddlesche Fläche; denn diese ist der Ort der Ruhepunkte der durch die Basispunkte gegebenen „Geiserschen Verwandtschaft", die jedem Punkte x den Punkt x' zuordnet, der x und die sechs Basispunkte zu einem Oktupel assoziierter Punkte ergänzt.

9) R. Sturm, Liniengeometrie III, S. 264.

10) Hierholzer, Math. Ann. 2 (1871), S. 179.

Digitized by Google

dieses quadratischen Komplexes aus der Gleichung[11]):

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ a_0x_0 & a_1x_1 & a_2x_2 & a_3x_3 \\ b_0x_0 & b_1x_1 & b_2x_2 & b_3x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

der Weddleschen Fläche, wenn man darin die Quadrate der Punktkoordinaten und ihre Produkte zu je zweien nach (2), (4) und (5) durch Linienkoordinaten ersetzt.

5. Die *Parameterdarstellung der Grenzkongruenz* folgt nun unmittelbar aus Schottkys[12]) Parameterdarstellung[13]):

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \vartheta[123]\,\vartheta[1]\,\vartheta[2]\,\vartheta[3] \\ x_1 &= \vartheta[023]\,\vartheta[0]\,\vartheta[2]\,\vartheta[3] \\ x_2 &= \vartheta[031]\,\vartheta[0]\,\vartheta[3]\,\vartheta[1] \\ x_3 &= \vartheta[012]\,\vartheta[0]\,\vartheta[1]\,\vartheta[2] \end{aligned}$$

der Weddleschen Fläche (10) mit den Eckpunkten des Koordinatentetraeders und den Punkten:

$$(12)\qquad \begin{aligned} a_0 : a_1 : a_2 : a_3 &= [b01][b02][b03] : [b01][a02][a03] \\ &\quad : [a01][b02][a03] : [a01][a02][b03] \\ b_0 : b_1 : b_2 : b_3 &= [a01][a02][a03] : [a01][b02][b03] \\ &\quad : [b01][a02][b03] : [b01][b02][a03] \end{aligned}$$

als Doppelpunkten. Die Abbildungsformeln (2), (4) leiten daraus die Parameterdarstellung:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Y}_{01} &= \vartheta[123]\,\vartheta[023]\,\vartheta[2]\,\vartheta[3] & \mathfrak{Y}_{23} &= \vartheta[031]\,\vartheta[012]\,\vartheta[0]\,\vartheta[1] \\ \mathfrak{Y}_{02} &= \vartheta[123]\,\vartheta[031]\,\vartheta[3]\,\vartheta[1] & \mathfrak{Y}_{31} &= \vartheta[012]\,\vartheta[023]\,\vartheta[0]\,\vartheta[2] \\ \mathfrak{Y}_{03} &= \vartheta[123]\,\vartheta[012]\,\vartheta[1]\,\vartheta[2] & \mathfrak{Y}_{12} &= \vartheta[023]\,\vartheta[031]\,\vartheta[0]\,\vartheta[3] \end{aligned}$$

der Grenzkongruenz ab, die sich bei der zweieindeutigen Abbildung des tetraedralen Komplexes (3) ergibt, wenn man dazu die Geraden:

$$(14)\qquad \mathfrak{A}_{ik} = (\varrho_i - \varrho_k)\,a_i a_k = (\varrho_i - \varrho_k)\,\mathfrak{A}^*_{ik}, \quad \mathfrak{B}_{ik} = (\varrho_i - \varrho_k)\,b_i b_k = (\varrho_i - \varrho_k)\,\mathfrak{B}^*_{ik}$$

auszeichnet. Dabei ist

11) Wir machen schon hier von den, die Allgemeinheit nicht einschränkenden Beziehungen $a_i b_i = a_k b_k$ Gebrauch, die sich aus (12) ergeben.

12) F. Schottky, Über die Beziehungen zwischen den 16 Thetafunktionen von zwei Variablen. Crelles Journal, 105 (1889).

13) Bezeichnungen wie in meiner Arbeit: Crelles Journal, 159 (1928).

Digitized by Google

$$(15) \qquad \begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{01} : \mathfrak{A}^*_{02} : \mathfrak{A}^*_{03} : \mathfrak{A}^*_{23} : \mathfrak{A}^*_{31} : \mathfrak{A}^*_{12} \\ = \frac{[b01]}{[a01]} : \frac{[b02]}{[a02]} : \frac{[b03]}{[a03]} : \frac{[a01]}{[b01]} : \frac{[a02]}{[b02]} : \frac{[a03]}{[b03]} = \\ \mathfrak{B}^*_{23} : \mathfrak{B}^*_{31} : \mathfrak{B}^*_{12} : \mathfrak{B}^*_{01} : \mathfrak{B}^*_{02} : \mathfrak{B}^*_{03}. \end{matrix}$$

Die Koordinaten (13) genügen trivialerweise der Plückerschen Relation und der Gleichung (3) des tetraedralen Komplexes, auf Grund einer Thetarelation der Gleichung (9) des schneidenden Komplexes.

Die Abbildung gestattet jetzt die *Angabe sämtlicher in der Kongruenz enthaltenen Geradenbüschel und Reguli 2. Ordnung.* Sie entstehen aus der C^3 und den $15 + 10$ auf der Weddleschen Fläche gelegenen Geraden. Die Paare zusammengehöriger halber Perioden entsprechen bei der Schottkyschen Parameterdarstellung der C^3 durch die sechs Doppelpunkten und den 15 Verbindungsgeraden dieser Doppelpunkte zu je zweien. Die Abbildung gibt die Bedeutung dieser Periodenpaare für die Parameterdarstellung (13).

Für die Paare zusammengehöriger halber Perioden mit den Charakteristiken (0), (ab); $(a0)$, $(a1)$, $(a2)$, $(a3)$; $(b0)$, $(b1)$, $(b2)$, $(b3)$ versagt diese Parameterdarstellung. Die Charakteristiken (0) und (ab) entsprechen (der C^3 und der Geraden $\widehat{ab}$ auf der Weddleschen Fläche, also:) den beiden durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ laufenden Reguli 2. Ordnung des tetraedralen Komplexes und zwar gibt (0) den Regulus, der die Eckpunkte, (ab) den Regulus, der die Ebenen des singulären Tetraeders enthält.

Die übrigen Charakteristiken gehören zu acht Geradenbüscheln der Kongruenz. So gibt z. B. $(a0)$ das Geradenbüschel mit dem Schnittpunkt von $\mathfrak{A}$ mit der Ebene $x_0 = 0$ als Scheitel und der Verbindungsebene von $\mathfrak{A}$ mit dem Punkte $u_0 = 0$ als Ebene.

Die Paare zusammengehöriger halber Perioden mit den Charakteristiken (01), (02), (03), (23), (31), (12) liefern die Kanten des singulären Tetraeders mit eben diesen Indizes.

Bei der Abbildung entsprechen ferner den sechs Weddleschen Kegeln und den zehn im Flächengebüsche enthaltenen Ebenenpaaren 16 ausgezeichnete lineare Komplexe durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Acht davon sind singuläre Komplexe:

1) [0], [1], [2], [3]. Der Kegel [0] gibt die gemeinsame Treffgerade von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch den Punkt $u_0 = 0$.

2) $[0ab]$, $[1ab]$, $[2ab]$, $[3ab]$. Das Ebenenpaar $[0ab]$ gibt die gemeinsame Treffgerade von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in der Ebene $x_0 = 0$.

Digitized by Google

Die übrigen acht Komplexe sind regulär:

3) $[a]$, $[b]$. Der Kegel $[a]$ gibt den linearen Komplex durch die Reguli (0) und (ab), welcher den Schnittpunkten von $\mathfrak{A}$ mit den Tetraederebenen die Verbindungsebenen von $\mathfrak{A}$ mit den gegenüberliegenden Tetraedereckpunkten als Nullebenen zuordnet.

4) $[a01], \ldots [a12]$. Diese sechs Komplexe sind zu Paaren angeordnet. Je zwei zusammengehörige z. B. $[a01] = [b23]$ und $[a23] = [b01]$ enthalten ein Paar gegenüberliegender Kanten (01) und (23) des Tetraeders. Dazu läuft $[a01] = [b23]$ durch die Büschel $(a0)$, $(a1)$, $(b2)$, $(b3)$ der Kongruenz.

Durch Nullsetzen der Thetafunktionen mit den genannten Charakteristiken erhält man die Schnitte der ausgezeichneten linearen Komplexe mit der Kongruenz. Sieht man hier davon ab, daß die entstehenden Gleichungen auch durch Einsetzen von Paaren zusammengehöriger halber Perioden befriedigt werden können, so kommt man zu folgendem Ergebnis:

Durch Nullsetzen der Funktionen mit den Charakteristiken $[0ab]$, $[1ab]$, $[2ab]$, $[3ab]$ erhält man die vier in den Ebenen des singulären Tetraeders liegenden Kurven 2. Klasse der Kongruenz. Die Ebene $[0ab]$ beispielsweise schneidet $x_0 = 0$ in einer geraden Punktreihe, welche durch die den tetraedralen Komplex erzeugende Kollineation in eine projektive Punktreihe transformiert wird. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden projektiven Punktreihen erzeugen die genannte Kurve 2. Klasse. Durch Nullsetzen der Funktionen mit den Charakteristiken [0], [1], [2], [3] erhält man dual die vier von den Ecken des Tetraeders ausgehenden Kegel 2. Ordnung der Kongruenz. (Komplexkegelschnitte und Komplexkegel von (9).)

Das Nullsetzen der sechs Funktionen mit Charakteristiken vom Typus $[a01] = [b23]$ liefert sechs Reguli 2. Ordnung der Kongruenz. Der Regulus $[a01] = [b23]$ läuft durch die Kanten (01), (23) des Tetraeders und enthält die Schnittpunkte von $\mathfrak{A}$ mit den Ebenen $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, von $\mathfrak{B}$ mit $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und ihre Verbindungsebenen mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Tetraeders..

6. Aus der Parameterdarstellung (11) der Weddleschen Fläche ergibt sich die Parameterdarstellung:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&[a01][a23]\vartheta^2[a01]x_0x_1 + [a01][a23]\vartheta^2[a23]x_2x_3\\
&+[a02][a31]\vartheta^2[a02]x_0x_2 + [a02][a31]\vartheta^2[a31]x_3x_1\\
&+[a03][a12]\vartheta^2[a03]x_0x_3 + [a03][a12]\vartheta^2[a12]x_1x_2 = 0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

der durch ihre sechs Doppelpunkte laufenden Kegel 2. Ordnung. Daraus folgt auf Grund von (6) die Parameterdarstellung:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{C}_{01}(\varrho_2-\varrho_3) = [a01][a23]\vartheta^2[a23], \quad \mathfrak{C}_{23}(\varrho_0-\varrho_1) = [a01][a23]\vartheta^2[a01]\\
&\mathfrak{C}_{02}(\varrho_3-\varrho_1) = [a02][a31]\vartheta^2[a31], \quad \mathfrak{C}_{31}(\varrho_0-\varrho_2) = [a02][a31]\vartheta^2[a02]\\
&\mathfrak{C}_{03}(\varrho_1-\varrho_2) = [a03][a12]\vartheta^2[a12], \quad \mathfrak{C}_{12}(\varrho_0-\varrho_3) = [a03][a12]\vartheta^2[a03]
\end{aligned}
\tag{17}
$$

der linearen Komplexe durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche den tetraedralen Komplex (M_3^4) berühren, also die Gleichung (7) befriedigen.

Man bestätigt nun hiermit auch leicht analytisch, daß der scheinbare Umriß der M_3^4 von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus gesehen, eine Kummersche Fläche ist; denn die R_4 (17) schneiden aus einem $\mathfrak{R}_3$ allgemeiner Lage, etwa $\mathfrak{C}_{03} = 0$, $\mathfrak{C}_{12} = 0$ die Kummersche Fläche in der bekannten Parameterdarstellung aus, die sich ergibt, wenn man die homogenen Ebenenkoordinaten den Thetaquadraten eines Goepelschen Vierersystems proportional setzt. Die Gleichung dieser Kummerschen Fläche folgt aus (7), wenn man darin $\mathfrak{C}_{03}$ und $\mathfrak{C}_{12}$ auf Grund der Thetaformeln, welche sämtliche Thetaquadrate als lineare Funktionen der vier Thetaquadrate des Goepelschen Vierersystems ausdrücken, durch ihre linearen Ausdrücke in $\mathfrak{C}_{01}, \mathfrak{C}_{02}, \mathfrak{C}_{23}, \mathfrak{C}_{31}$ ersetzt.

Digitized by Google

Über eine dritte geometrische Deutung der für die Affinsphären aufgestellten Transformationstheorie [1]).

Von H. Jonas.

1. *Einleitung.* — Auf die interessanten Eigenschaften der durch die Relation

$$\text{(A)} \qquad \frac{K}{W^4} = \text{konst.}$$

charakterisierten Flächen, für die also das Krümmungsmaß proportional mit der vierten Potenz des Tangentialebenenabstandes vom Koordinatenanfang ist, hat zuerst Tzitzéica [2]) aufmerksam gemacht. In der affinen Differentialgeometrie, die sich bei uns in Deutschland unabhängig von den projektiven Methoden der Italiener in jüngster Zeit entwickelt hat, nehmen diese Flächen eine ausgezeichnete Stelle ein. Sie führen jetzt den Namen *Affinsphären.* Den Ausgangspunkt für die Untersuchungen Tzitzéicas bildete übrigens ein *metrisches* Problem: die Bestimmung der allgemeinsten Flächen, die durch isometrische Deformation aus den Flächen der tetraedralen Klasse

$$\text{(B)} \qquad ax^{\frac{2}{3}} + by^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{2}{3}} = 1$$

hervorgehen [3]).

Unter den Ergebnissen Tzitzéicas heben wir als für unsere Zwecke wichtig die *Transformation* T_n hervor, die von einer Affinsphäre zu neuen derartigen Flächen führt [4]). Sie gehört der allgemeineren Klasse der *asymptotischen Transformationen* an, bei denen die gegebene und die transformierte Fläche die mit Zuordnung der Asymptotenlinien aufeinander bezogenen Brennflächenmäntel eines Strahlensystems, einer sogen. W-Kongruenz, bilden.

Durch eine *zweite geometrische Deutung*, die mit dem erwähnten Biegungsproblem zusammenhängt, erhöht sich der Wert dieser Me-

1) Vorgetragen in der 246. Sitzung am 28. März 1928.

2) Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces. Palermo Rend. 25 (1908), 180; 28 (1909), 210.

3) Tzitzéica, Deformarea unei classe de suprafețe tetraedrale. Ann. der rumän. Akad. 38 (1920), 241.

4) Tzitzéica, C. R. de l'Acad. des Sc. 150 (1910), 955 u. 1227.

Digitized by Google

thode. Aus ihr ging nämlich als ein bislang vermißtes Gegenstück zur Bianchischen Transformation B_k der auf die Flächen zweiten Grades abwickelbaren Flächen eine Transformation[5]) hervor, die zwischen Flächen vom Typus

$$(C) \qquad ds^2 = \tfrac{9}{4}(udu^2 - 2\,dudv + vdv^2)$$

vermittelt. Es ist dies die gemeinsame Form des Linienelements, die für die tetraedralen Flächen (B) im Falle hyperbolischer Krümmung, d. i. für $abc < 0$ gilt. Sie läßt sich unter Heranziehung einer Ähnlichkeitstransformation stets herstellen, wenn ein gewisser die Konstanten a, b, c enthaltender Ausdruck von Null verschieden ist.

Aus der Theorie dieser *Transformation* Θ_n, wie ich sie genannt habe, seien hier einige wesentliche Punkte in Erinnerung gebracht, die gleichzeitig zu der neuen Fragestellung überleiten. Die laufenden Koordinaten einer Fläche vom Linienelement (C) ergeben sich mittels dreier Quadraturen aus einer als bekannt vorausgesetzten Affinsphäre. Wird diese der Tritzéicaschen Transformation T_n unterworfen, so gehört zu der transformierten Affinsphäre eine neue Fläche vom Typus (C). An Hand einer Verallgemeinerung der Lelieuvreschen Formeln, die dabei auf ein System von 6 Lösungen einer Moutardschen Differentialgleichung angewendet werden, gelingt es, das abermalige Auftreten von Quadraturen zu vermeiden. Die Lage der transformierten Biegungsfläche relativ zu der gegebenen ist damit völlig bestimmt. Hinzuweisen ist auf eine an sich geringfügige, in geometrischer Hinsicht aber bedeutsame Modifikation, die der Zusammenhang der beiden als Hilfsflächen dienenden Affinsphären gegenüber der ursprünglichen Operation T_n erfährt. Der Umstand, daß bei dieser die Konstante der Relation (A) notwendig ihren Wert wechselt, bedingt die Einführung eines *normierenden* Faktors $n^{\frac{2}{3}}$, der den Ausdrücken für die Koordinaten der transformierten Affinsphäre beigefügt wird. Die so gestaltete Transformation Θ_n, bei der auch zwischen den beiden Biegungsflächen vom Typus (C), die sie verbindet, Korrespondenz der Asymptotenlinien besteht, erweist sich nicht mehr als asymptotische Transformation, läßt sich aber, wie ich gezeigt habe, durch Einschalten einer *Zwischenfläche*, die dem Typus (C) nicht angehört, in zwei aufeinander folgende asymptotische Transformationen zerlegen. Die Aufdeckung dieses trotz seines

5) Jonas, Aufstellung einer Transformationstheorie für eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen. Math. Ann. 92 (1924), 214.

Digitized by Google

anschaulichen Charakters ziemlich tief liegenden Sachverhalts gelang im Anschluß an den Nachweis, daß die Transformationen Θ_n sich zu *dreigliedrigen Zyklen* zusammensetzen lassen[6]).

Die Idee einer *dritten geometrischen Deutung* des zugrunde liegenden analytischen Prozesses knüpft sich an eine besondere Eigenschaft, die im Falle der eben erwähnten, auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Zwischenfläche die zugehörige Moutardsche Differentialgleichung besitzt. Man folgert nämlich leicht aus § 7, 4 der unter[5]) genannten Abhandlung, daß das Produkt ihrer drei partikulären Integrale, mit deren Hilfe man auf dem Wege der Moutardschen Transformation zu den drei den Zyklus bildenden Biegungsflächen gelangt, den Wert 1 hat. Es bietet sich danach die Möglichkeit, *eine Transformationstheorie für diejenigen Flächen aufzubauen, die sich mittels der bekannten Lelieuvreschen Formeln aus drei durch die Relation* $\xi\eta\zeta = 1$ *verbundenen Lösungen einer Moutardschen Gleichung* $\xi_{\alpha\beta} = M\xi$ *konstruieren lassen.* Die für die neue Flächenklasse charakteristische Differentialgleichung lautet in den seit Monge üblichen Bezeichnungen:

$$(D) \qquad s^2 - rt = (pq)^{\frac{4}{3}}.$$

Das Hauptergebnis dieser nachstehend entwickelten Transformationstheorie sei hier angemerkt: *auch die neue Transformation* t_n *der Flächen* (D) *gestattet die Zerlegung in zwei sukzessive asymptotische Transformationen.* Diese Analogie überrascht umso mehr, als es sich durchaus nicht um eine vonvornherein zu erwartende Folgerung aus dem entsprechenden Satze über die Transformation Θ_n handelt. In der Tat hat man beim Aufstellen der Transformation t_n neuartigen Komplikationen zu begegnen, die insbesondere der Umstand mit sich bringt, daß man hinsichtlich der drei Koordinaten drei simultane, aber *verschiedene* Moutardsche Operationen ins Auge fassen muß.

2. *Hilfsmittel aus der Theorie der Moutardschen Transformation.* — Es seien u, v, ... partikuläre Lösungen einer Moutardschen Differentialgleichung:

$$u_{\alpha\beta} = Mu.$$

Gleiches möge von σ, der *transformierenden Funktion*, gelten. Wir

6) Die Existenz der dreigliedrigen Zyklen habe ich für den Fall der Transformation T_n bereits in einer früheren Arbeit hergeleitet [Sopra una classe di trasformazioni asintotiche etc., Annali di Mat. (3) **30** (1921), 223]. Sie sind dann aber, da der normierende Faktor dabei nicht auftritt, nur insoweit geschlossen, als sie auf eine zur Ausgangsfläche *homothetische* Affinsphäre führen.

Digitized by Google

schreiben dies mit Benutzung des Darbouxschen Zeichens

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{u_{\alpha\beta}}{u}$$

auch in der Form:

$$\mathfrak{F}(u) = \mathfrak{F}(v) = \ldots = \mathfrak{F}(\sigma) = M. \tag{1}$$

Mittels zweier der Größen werde

$$\langle u, v\rangle = \int[(u_\alpha v - v_\alpha u)\,d\alpha - (u_\beta v - v_\beta u)\,d\beta] \tag{2}$$

gebildet, wobei der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck infolge von (1) ein exaktes Differential ist.

Die Differentialrelationen der durch σ definierten Moutardschen Transformation lauten:

$$(\sigma u_1)_\alpha = -\sigma^2\left(\frac{u}{\sigma}\right)_\alpha, \quad (\sigma u_1)_\beta = \sigma^2\left(\frac{u}{\sigma}\right)_\beta \tag{3}$$

und liefern die Größen $u_1, v_1, \ldots$, die sich mit Hilfe des für Quadraturen von der Form (2) bereits in der früheren Arbeit eingeführten Symbols, wie folgt, darstellen lassen:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma}\langle\sigma, u\rangle, \quad v_1 = \frac{1}{\sigma}\langle\sigma, v\rangle, \ldots \tag{4}$$

Sie genügen einer neuen Moutardschen Gleichung

$$\mathfrak{F}(u_1) = \mathfrak{F}(v_1) = \ldots = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = M_1,$$

wobei

$$M_1 = -M + 2\frac{\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma^2} \tag{5}$$

ist, was auf die Identität

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = -\mathfrak{F}(\sigma) + 2\frac{\sigma_\alpha\sigma_\beta}{\sigma^2}$$

hinausläuft. Zu der inversen Operation gehört $\frac{1}{\sigma}$ als transformierende Funktion. Der zu (2) analoge Ausdruck $\langle u_1, v_1\rangle$ ergibt sich unter Fortfall der neuen Quadratur und gleichzeitiger Fixierung der dem Symbol $\langle\,\rangle$ anhaftenden additiven Konstanten aus der Formel:

$$\langle u_1, v_1\rangle = \langle u, v\rangle + u_1 v - v_1 u. \tag{6}$$

Im Falle *dreier* Lösungen haben wir damit die von Guichard herrührende Konstruktion der W-Kongruenzen zu einem

Digitized by Google

gegebenen Brennflächenmantel, wir können sagen: die *klassische* Methode der asymptotischen Flächentransformation. Ist nämlich $\mathfrak{F}(\xi) = \mathfrak{F}(\eta) = \mathfrak{F}(\zeta)$, so wird durch die Lelieuvreschen Formeln

$$x = \langle \eta, \zeta \rangle, \quad y = \langle \zeta, \xi \rangle, \quad z = \langle \xi, \eta \rangle$$

eine auf ihre Asymptotenlinien (α, β) bezogene Fläche definiert. Durch eine Moutardsche Transformation erhält man mit Berücksichtigung von (6) als Koordinaten des zweiten Brennflächenmantels die Ausdrücke:

$$x_1 = \langle \eta_1, \xi_1 \rangle = x + \eta_1 \xi - \xi_1 \eta \text{ usw.} \tag{7}$$

Auf die Zusammensetzung der Moutardschen Transformationen und den Bianchischen Vertauschbarkeitssatz soll hier nicht eingegangen werden. Wir fügen indessen noch eine für das Folgende wichtige Bemerkung hinzu. *Geht man von u mittels der durch σ definierten Transformation zu u_1 über, so gelangt man gleichzeitig von* $\frac{1}{u}$ *zu* $\frac{1}{u_1}$ *mit Hilfe der transformierenden Funktion* $\frac{\sigma u_1}{u}$. Die letztere Transformation entspricht nämlich den Differentialrelationen:

$$\left(\frac{\sigma u_1}{u} \cdot \frac{1}{u_1}\right)_\alpha = -\frac{\sigma^2 u_1^2}{u^2}\left(\frac{u}{\sigma u_1} \cdot \frac{1}{u}\right)_\alpha, \quad \left(\frac{\sigma u_1}{u} \cdot \frac{1}{u_1}\right)_\beta = \frac{\sigma^2 u_1^2}{u^2}\left(\frac{u}{\sigma u_1} \cdot \frac{1}{u}\right)_\beta,$$

die durch eine leichte Umformung aus den als bestehend vorausgesetzten Relationen (3) hervorgehen. Es gelten hiernach neben den Formeln

$$\mathfrak{F}(u) = \mathfrak{F}(\sigma), \quad \mathfrak{F}(u_1) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

auch die beiden weiteren:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{u}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{\sigma u_1}{u}\right), \quad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{u_1}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{u}{\sigma u_1}\right).$$

3. *Bestimmung der Integralflächen der Differentialgleichung* (D). — Gegenstand der Untersuchung sollen jetzt also die Moutardschen Gleichungen

$$\mathfrak{F}(\xi) = \mathfrak{F}(\eta) = \mathfrak{F}(\zeta) = M \tag{8}$$

mit einem der Bedingung

$$\xi \eta \zeta = 1 \tag{9}$$

unterworfenen Lösungstripel sein. Nehmen wir ein solches für einen Augenblick als bereits bekannt an, so wird dadurch eine auf

Digitized by Google

ihre Asymptotenlinien (α, β) bezogene Fläche S mit den laufenden Koordinaten

$$x = \langle \eta, \zeta \rangle, \quad y = \langle \zeta, \xi \rangle, \quad z = \langle \xi, \eta \rangle \tag{10}$$

bestimmt, für die

$$X = \frac{\xi}{\sqrt{\varrho}}, \quad Y = \frac{\eta}{\sqrt{\varrho}}, \quad Z = \frac{\zeta}{\sqrt{\varrho}} \quad (\varrho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

die Richtungskosinus der Normalen sind und das Krümmungsmaß den Wert

$$K = -\frac{1}{\varrho^2}$$

hat. Die für die neue Flächenklasse charakteristische Eigenschaft spricht sich hiernach in der Gleichung

$$XYZ = \varrho^{-\frac{3}{2}}$$

aus, die, wenn z als Funktion von x und y aufgefaßt wird und X, Y, Z, K mittels bekannter Formeln durch die Ableitungen p, q, r, s, t ausgedrückt werden, in die *partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$s^2 - rt = (pq)^{\frac{4}{3}} \text{ [7]} \tag{D}$$

übergeht. Die vom Punkte (ξ, η, ζ) beschriebene kubische Hilfsfläche Σ mit der Gleichung $\xi\eta\zeta = 1$ möge als *Bildfläche der Normalen* bezeichnet werden [8].

Zwecks Ermittlung dreier die Bedingungen (8), (9) erfüllender Funktionen von α und β führen wir zwei neue Größen ϑ, ϑ' ein, indem wir

$$\xi = \frac{1}{\vartheta\vartheta'}, \quad \eta = \frac{\vartheta^2}{\vartheta'}, \quad \zeta = \frac{\vartheta'^2}{\vartheta} \tag{11}$$

setzen. Es müssen dann nach (8) die folgenden Gleichungen bestehen:

$$(12) \quad \begin{cases} -\dfrac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta} - \dfrac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'} + 2\dfrac{\vartheta_\alpha\vartheta_\beta}{\vartheta^2} + 2\dfrac{\vartheta'_\alpha\vartheta'_\beta}{\vartheta'^2} + \dfrac{2}{\vartheta\vartheta'}(\vartheta_\alpha\vartheta'_\beta + \vartheta_\beta\vartheta'_\alpha) = M, \\ 2\dfrac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta} - \dfrac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'} + 2\dfrac{\vartheta_\alpha\vartheta_\beta}{\vartheta^2} + 2\dfrac{\vartheta'_\alpha\vartheta'_\beta}{\vartheta'^2} - \dfrac{2}{\vartheta\vartheta'}(\vartheta_\alpha\vartheta'_\beta + \vartheta_\beta\vartheta'_\alpha) = M, \\ -\dfrac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta} + 2\dfrac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'} + 2\dfrac{\vartheta_\alpha\vartheta_\beta}{\vartheta^2} + 2\dfrac{\vartheta'_\alpha\vartheta'_\beta}{\vartheta'^2} - \dfrac{2}{\vartheta\vartheta'}(\vartheta_\alpha\vartheta'_\beta + \vartheta_\beta\vartheta'_\alpha) = M. \end{cases}$$

7) Gleichwertig mit (D) ist die durch die Legendresche Transformation gewonnene Differentialgleichung $s^2 - rt = (xy)^{-\frac{4}{3}}$.

8) Die Tatsache, daß Σ selber eine spezielle Affinsphäre ist, bleibt für das Folgende belanglos. Auf die Möglichkeit, S der durch die Formeln $\bar{\xi} = c_1\xi$, $\bar{\eta} = c_2\eta$, $\bar{\zeta} = c_3\zeta$ $(c_1c_2c_3 = 1)$ definierten Affintransformation zu unterwerfen, sei gleichfalls nur beiläufig hingewiesen.

Digitized by Google

Aus der ersten und zweiten bzw. der ersten und dritten folgt:

$$\vartheta_{\alpha\beta} = e^{\varphi}\vartheta, \quad \vartheta'_{\alpha\beta} = e^{\varphi}\vartheta', \tag{13}$$

wobei

$$\frac{1}{\vartheta\vartheta'}(\vartheta_\alpha\vartheta'_\beta + \vartheta_\beta\vartheta'_\alpha) = e^{\varphi}$$

gesetzt ist. Durch die Schreibweise e^{φ}, die aus formalen Gründen gewählt wird, sollen negative Werte nicht ausgeschlossen werden (es ist dann $\varphi = \varphi + \pi i$ bei reellem $\tilde{\varphi}$). Differentiert man die Relation

$$e^{-\varphi}(\vartheta_\alpha\vartheta'_\beta + \vartheta_\beta\vartheta'_\alpha) - \vartheta\vartheta' = 0 \tag{14}$$

mit Berücksichtigung von (13) nach α und β, so findet man:

$$(\vartheta_{\alpha\alpha} - \varphi_\alpha\vartheta_\alpha)\vartheta'_\beta + (\vartheta'_{\alpha\alpha} - \varphi_\alpha\vartheta'_\alpha)\vartheta_\beta = 0,$$
$$(\vartheta_{\beta\beta} - \varphi_\beta\vartheta_\beta)\vartheta'_\alpha + (\vartheta'_{\beta\beta} - \varphi_\beta\vartheta'_\beta)\vartheta_\alpha = 0,$$

sodaß sich nach Einführung zweier Hilfsgrößen p, q und unter Hinzufügung von (13) die folgenden beiden Systeme ergeben:

$$\vartheta_{\alpha\alpha} = \varphi_\alpha\vartheta_\alpha + p\vartheta_\beta, \quad \vartheta_{\alpha\beta} = e^{\varphi}\vartheta, \quad \vartheta_{\beta\beta} = q\vartheta_\alpha + \varphi_\beta\vartheta_\beta, \tag{15}$$
$$\vartheta'_{\alpha\alpha} = \varphi_\alpha\vartheta'_\alpha - p\vartheta'_\beta, \quad \vartheta'_{\alpha\beta} = e^{\varphi}\vartheta', \quad \vartheta'_{\beta\beta} = -q\vartheta'_\alpha + \varphi_\beta\vartheta'_\beta. \tag{16}$$

Als Integrabilitätsbedingung erhält man, wenn man beachtet, daß nach (14) $\vartheta_\alpha\vartheta'_\beta + \vartheta_\beta\vartheta'_\alpha \neq 0$ ist, die Gleichungen:

$$\varphi_{\alpha\beta} = e^{\varphi} - pq, \quad p_\beta + p\varphi_\beta = 0, \quad q_\alpha + q\varphi_\alpha = 0.$$

Wir behandeln hier nur den *allgemeinen Fall, daß keine der beiden Größen p und q identisch Null ist.* Es wird dann zunächst

$$p = \psi_1(\alpha)e^{-\varphi}, \quad q = \psi_2(\beta)e^{-\varphi}.$$

Führen wir nun die Substitution $e^{\varphi} \mid e^{\varphi}\sqrt[3]{\psi_1(\alpha)}\sqrt[3]{\psi_2(\beta)}$ aus und nehmen als neue Variablen die Größen $\int\sqrt[3]{\psi_1(\alpha)}\,d\alpha$ und $\int\sqrt[3]{\psi_2(\beta)}\,d\beta$, die nachträglich wieder mit α und β bezeichnet werden mögen, so lautet das System (15):

$$\vartheta_{\alpha\alpha} = \varphi_\alpha\vartheta_\alpha + e^{-\varphi}\vartheta_\beta, \quad \vartheta_{\alpha\beta} = e^{\varphi}\vartheta, \quad \vartheta_{\beta\beta} = e^{-\varphi}\vartheta_\alpha + \varphi_\beta\vartheta_\beta, \tag{17}$$

während die Integrabilitätsbedingung sich auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ reduziert:

$$\varphi_{\alpha\beta} = e^{\varphi} - e^{-2\varphi}. \tag{18}$$

Das System (17), in dem jetzt unter φ ein bekanntes Integral von (18) zu verstehen ist, fällt mit demjenigen zusammen, auf das

Digitized by Google

Tzitzéica die Bestimmung der *Affinsphären* zurückgeführt hat. Es besitzt *drei* linear-unabhängige partikuläre Lösungen, durch die sich das allgemeine Integral in der Form $c_1\vartheta + c_2\bar{\vartheta} + c_3\bar{\bar{\vartheta}}$ ausdrückt; ϑ, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\bar{\vartheta}}$ können als laufende Koordinaten einer Affinsphäre gedeutet werden. Der analytische Zusammenhang zwischen unseren Flächen (D) und den Affinsphären ist damit klargelegt.

Ist ϑ eine partikuläre Lösung von (17), so handelt es sich für unseren Zweck noch darum, ϑ' auf Grund des anderen, der polarreziproken Affinsphäre entsprechenden Systems

$$(19)\quad \vartheta'_{\alpha\alpha} = \varphi_\alpha \vartheta'_\alpha - e^{-\varphi}\vartheta'_\beta, \quad \vartheta'_{\alpha\beta} = e^{\varphi}\vartheta', \quad \vartheta'_{\beta\beta} = -e^{-\varphi}\vartheta'_\alpha + \varphi_\beta \vartheta'_\beta$$

zu ermitteln, zu dem (14) hinzutritt. Da, wie man durch Differentiation bestätigt, auf jeden Fall

$$e^{-\varphi}(\vartheta_\alpha \vartheta'_\beta + \vartheta_\beta \vartheta'_\alpha) - \vartheta\vartheta' = C = \text{konst.}$$

ist, so bedeutet $C = 0$ nur eine den Anfangswerten von ϑ', ϑ'_α, ϑ'_β für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ auferlegte Bedingung. Es sei bemerkt, daß man zur Bestimmung von ϑ' auch von einem zweiten Integral $\bar{\vartheta}$ von (17) ausgehen kann. Man hat dann:

$$\vartheta' = e^{-\varphi}(\vartheta_\alpha \bar{\vartheta}_\beta - \vartheta_\beta \bar{\vartheta}_\alpha),$$

während der umgekehrte Übergang von ϑ' zu $\bar{\vartheta}$ mittels einer Quadratur

$$\bar{\vartheta} = -\vartheta \int \frac{1}{\vartheta^2}(\vartheta'_\alpha d\alpha - \vartheta'_\beta d\beta)$$

gelingt.

Als Ergänzung der hiermit gewonnenen Methode zur Konstruktion der Flächen (D) stellen wir eine neue wichtige Eigenschaft der Funktionen ϑ, ϑ' fest, die ihrem Wesen nach mit den bereits erwähnten dreigliedrigen Transformationszyklen eng verwandt ist: *Aus* ϑ, ϑ' *gehen zwei weitere Paare* $\frac{\vartheta'}{\vartheta}, \frac{1}{\vartheta}$ *und* $\frac{1}{\vartheta'}, \frac{\vartheta}{\vartheta'}$ *hervor, die völlig analogen Relationen genügen; dabei treten für* φ *bezüglich die Größen* φ' *und* φ'' *ein, die durch die Formeln*

$$(20)\qquad e^{\varphi'} = -e^{\varphi} + 2\frac{\vartheta_\alpha \vartheta_\beta}{\vartheta^2}, \quad e^{\varphi''} = -e^{\varphi} + 2\frac{\vartheta'_\alpha \vartheta'_\beta}{\vartheta'^2}$$

gegeben sind und gleichfalls Integrale der Differentialgleichung (18) *vorstellen.* Für das Folgende genügt übrigens die in diesem allgemeinen Satz enthaltene, durch einfache Rechnung erweisbare Tatsache, daß neben

$$(21)\qquad \mathfrak{F}(\vartheta) = \mathfrak{F}(\vartheta') = e^{\varphi}$$

Digitized by Google

auch die Gleichungen

$$(22)\qquad \mathfrak{F}\left(\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = e^{\varphi'}, \quad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\vartheta'}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta'}\right) = e^{\varphi''}$$

gelten, in denen $e^{\varphi'}$ und $e^{\varphi''}$ die Ausdrücke (20) sind.

Die rechte Seite der von ξ, η, ζ erfüllten Moutardschen Gleichung (8) kann, wie aus (13), (14), (20) zu entnehmen ist, auf die bemerkenswerte Form

$$M = e^{\varphi} + e^{\varphi'} + e^{\varphi''}$$

gebracht werden. Es ist also:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{\vartheta\vartheta'}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{\vartheta^2}{\vartheta'}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{\vartheta'^2}{\vartheta}\right) = e^{\varphi} + e^{\varphi'} + e^{\varphi''}.$$

Trägt man noch die Werte (11) in die Lelieuvreschen Formeln (10) ein, so erhalten diese die folgende Gestalt:

$$(23)\qquad x = 3\langle\vartheta, \vartheta'\rangle, \quad y = 3\left\langle\frac{\vartheta'}{\vartheta}, \frac{1}{\vartheta}\right\rangle, \quad z = 3\left\langle\frac{1}{\vartheta'}, \frac{\vartheta}{\vartheta'}\right\rangle.$$

Danach erscheinen nun die drei nebeneinander bestehenden Moutardschen Differentialgleichungen (21), (22) und ihre Lösungspaare einzeln den drei Koordinaten x, y, z des Flächenpunktes zugeordnet. Die grundlegende Bedeutung dieses Ergebnisses für die Transformation der Flächen (D) liegt auf der Hand: *dem für ϑ, ϑ' bereits bekannten speziellen Moutardschen Prozeß sind zwei simultane Prozesse anzugliedern, durch die auch die beiden Gleichungen* (22) *und die Paare* $\frac{\vartheta'}{\vartheta}$, $\frac{1}{\vartheta}$ *und* $\frac{1}{\vartheta'}$, $\frac{\vartheta}{\vartheta'}$ *erfaßt werden.*

4. *Die Transformation t_n der Flächen* (D). — Die von Tzitzéica herrührende Operation T_n liefert uns die auf ϑ anzuwendende Transformationsformel. Wir versehen sie aber wieder mit dem in Art. 1 erwähnten *normierenden* Faktor $n^{\frac{2}{3}}$, dessen Einführung sich bei der Aufstellung der Transformation Θ_n für die Biegungsflächen vom Typus (C) als notwendig erwies. Unter Hinzufügung einer entsprechend gebildeten Formel zur Transformation von ϑ' haben wir:

$$(24)\qquad \begin{cases} \vartheta_1 = n^{\frac{2}{3}} \left\{\vartheta - e^{-\varphi}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{R_\beta}{R}\vartheta_\alpha + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{R_\alpha}{R}\vartheta_\beta\right]\right\}, \\ \vartheta'_1 = n^{-\frac{2}{3}}\left\{\vartheta' - e^{-\varphi}\left[\,(1+n)\,\frac{R_\beta}{R}\vartheta'_\alpha + \,(1-n)\,\frac{R_\alpha}{R}\vartheta'_\beta\right]\right\}. \end{cases}$$

Dabei ist die *transformierende Funktion* R ein Integral des Sy-

Digitized by Google

stems:

$$(25)\qquad \begin{cases} R_{\alpha\alpha} = \varphi_\alpha R_\alpha + \dfrac{1+n}{1-n} e^{-\varphi} R_\beta, \\ R_{\alpha\beta} = e^{\varphi} R, \\ R_{\beta\beta} = \dfrac{1-n}{1+n} e^{-\varphi} R_\alpha + \varphi_\beta R_\beta. \end{cases}$$ [9])

Die *willkürliche* Konstante n muß von $0, \infty, \pm 1$ verschieden sein.

Die Ausdrücke (24) erfüllen nun zunächst die Differentialrelationen einer durch R definierten Moutardschen Transformation des Paares ϑ, ϑ':

$$(26)\qquad \begin{cases} (n^{\frac{1}{3}} R\vartheta_1)_\alpha = -R^2\left(\dfrac{\vartheta}{R}\right)_\alpha, \quad (n^{\frac{1}{3}} R\vartheta_1)_\beta = R^2\left(\dfrac{\vartheta}{R}\right)_\beta, \\ (n^{-\frac{1}{3}} R\vartheta_1')_\alpha = -R^2\left(\dfrac{\vartheta'}{R}\right)_\alpha, \quad (n^{-\frac{1}{3}} R\vartheta_1')_\beta = R^2\left(\dfrac{\vartheta'}{R}\right)_\beta. \end{cases}$$

Man bestätigt dieselben, indem man $R\vartheta_1$ und $R\vartheta_1'$ aus (24) entnimmt und mit Berücksichtigung von (17), (19), (25) differentiiert. Wie ersichtlich, führt diese Moutardsche Transformation ϑ in $n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1$ und ϑ' in $n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_1'$ über.

Es gelingt dann weiter der Nachweis, daß für das neue Funktionenpaar $\vartheta_1, \vartheta_1'$ die zu (14), (17), (19) analogen Beziehungen bestehen. Dabei tritt für φ die Größe φ_1 ein, die in Übereinstimmung mit (5) durch die Formel

$$(27)\qquad e^{\varphi_1} = -e^{\varphi} + 2\frac{R_\alpha R_\beta}{R^2}$$

gegeben ist und wieder ein Integral von (18), d. h. von

$$(\varphi_1)_{\alpha\beta} = e^{\varphi_1} - e^{-2\varphi_1}$$

darstellt. Um die fraglichen Beziehungen in Identitäten überzuführen, haben wir die zweiten Ableitungen von $\vartheta_1, \vartheta_1'$ aus den mit (26) gleichwertigen Formeln

$$(28)\qquad \begin{cases} (\vartheta_1)_\alpha = -\dfrac{R_\alpha}{R}\vartheta_1 - n^{-\frac{1}{3}}\left(\vartheta_\alpha - \dfrac{R_\alpha}{R}\vartheta\right), \\ (\vartheta_1)_\beta = -\dfrac{R_\beta}{R}\vartheta_1 + n^{-\frac{1}{3}}\left(\vartheta_\beta - \dfrac{R_\beta}{R}\vartheta\right) \text{ usw.} \end{cases}$$

9) Vergleicht man die Systeme (25) und (17), so erkennt man, daß auch R ganz ähnlich wie ϑ zur Konstruktion einer Fläche der Klasse (D) benutzt werden kann. Es liegt hier ein Analogon zur Lieschen Transformation der pseudosphärischen Flächen vor, auf das ich für den Fall der Affinsphären in § 4 der unter [5]) genannten Arbeit hingewiesen habe.

Digitized by Google

zu bilden, alsdann die ersten Ableitungen durch die Ausdrücke (28) und schließlich $\vartheta_1, \vartheta_1'$ selber durch (24) zu ersetzen. Insbesondere sei angemerkt, daß wieder

$$e^{-\varphi_1}[(\vartheta_1)_\alpha(\vartheta_1')_\beta + (\vartheta_1)_\beta(\vartheta_1')_\alpha] - \vartheta_1\vartheta_1' = 0$$

wird. Damit sind wir in der Lage, die transformierte Fläche S_1 zu bestimmen, die gleichfalls der Klasse (D) angehört und der gegebenen S mit Korrespondenz der Asymptotenlinien (α, β) zugeordnet ist. Wir haben

$$\xi_1 = \frac{1}{\vartheta_1\vartheta_1'}, \quad \eta_1 = \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_1'}, \quad \zeta_1 = \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_1} \tag{29}$$

und erhalten:

$$x_1 = \langle \eta_1, \xi_1 \rangle = 3\langle \vartheta_1, \vartheta_1' \rangle, \quad y_1 = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = 3\left\langle \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}, \frac{1}{\vartheta_1} \right\rangle,$$

$$z_1 = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle = 3\left\langle \frac{1}{\vartheta_1'}, \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1'} \right\rangle.$$

Unsere nächste Aufgabe ist die Beseitigung der hierbei von neuem auftretenden Quadraturen. Da

$$\langle \vartheta_1, \vartheta_1' \rangle = \langle n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1, n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_1' \rangle$$

ist, so läßt sich auf Grund der Hilfsformel (6) die gewünschte Relation für x_1 unmittelbar angeben:

$$x_1 = x + 3\left(n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1\vartheta' - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_1'\vartheta\right).$$

Um das Gleiche für die beiden anderen Koordinaten zu erreichen, hat man den am Ende des vorigen Artikels bezeichneten Weg einzuschlagen und die simultanen Moutardschen Prozesse für die beiden anderen Paare $\frac{\vartheta'}{\vartheta}, \frac{1}{\vartheta}$ und $\frac{1}{\vartheta'}, \frac{\vartheta}{\vartheta'}$ aufzusuchen. Dazu dient der am Schluß von Art. 2 aufgestellte Hilfssatz. Für y_1 gestaltet sich die Überlegung folgendermaßen. Da ϑ mittels R in $n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1$ übergeführt wird, so verwandelt sich gleichzeitig $\frac{1}{\vartheta}$ in $\frac{n^{-\frac{1}{3}}}{\vartheta_1}$ durch die zu $\frac{n^{\frac{1}{3}}R\vartheta_1}{\vartheta}$ gehörige Moutardsche Transformation. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß durch dieselbe Operation auch $\frac{\vartheta'}{\vartheta}$ in $\frac{n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1'}{\vartheta_1}$ übergeht. Hierzu ist aber das Bestehen zweier Differentialrelationen vom Typus (3) erforderlich. Wir begnügen uns damit, die erste, auf die Variable α bezügliche Relation

Digitized by Google

$$\left(\frac{n^{\frac{1}{3}} R\vartheta_1}{\vartheta}\cdot\frac{n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1'}{\vartheta_1}\right)_\alpha = -\frac{n^{\frac{2}{3}} R^2\vartheta_1^2}{\vartheta^2}\left(\frac{\vartheta}{n^{\frac{1}{3}} R\vartheta_1}\cdot\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right)_\alpha$$

als tatsächlich erfüllt nachzuweisen. Zu dem Ende geben wir dem Ausdruck

$$\mathsf{A} = n^{\frac{1}{3}}\frac{\vartheta^2}{R}\left(\frac{R\vartheta_1'}{\vartheta}\right)_\alpha + R\vartheta_1^2\left(\frac{\vartheta}{R\vartheta_1}\right)_\alpha,$$

um dessen Verschwinden es sich handelt, zunächst die folgende Gestalt:

$$\mathsf{A} \doteq n^{\frac{1}{3}}\frac{\vartheta}{R}(R\vartheta_1')_\alpha - \frac{\vartheta'}{R}(R\vartheta_1)_\alpha + \vartheta_1\vartheta_\alpha' - n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1'\vartheta_\alpha.$$

Wir beachten (26) und bedienen uns zur weiteren Reduktion einer noch an späterer Stelle zu verwendenden Hilfsformel, die wir durch Kombinieren der beiden Formeln (24) unter Berücksichtigung von (14) erhalten:

$$(30)\quad \vartheta_1\vartheta_\alpha' - n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1'\vartheta_\alpha = n^{\frac{2}{3}}\vartheta\vartheta_\alpha' - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta'\vartheta_\alpha + \left(n^{-\frac{1}{3}} - n^{\frac{2}{3}}\right)\frac{R_\alpha}{R}\vartheta\vartheta'.$$

Es ergibt sich: $\mathsf{A} = 0$. Bei z_1 ist entsprechend zu verfahren. Wir verfügen damit über ein *Formelsystem, durch das der Übergang zu den Koordinaten der transformierten Fläche S_1 mittels endlicher Operationen dargestellt wird:*

$$(31)\quad \begin{cases} x_1 = x + 3\left(n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1\vartheta' - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_1'\vartheta\right), \\ y_1 = y + \dfrac{3}{\vartheta_1\vartheta}\left(n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1' - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta'\right), \\ z_1 = z + \dfrac{3}{\vartheta_1'\vartheta'}\left(n^{\frac{1}{3}}\vartheta - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_1\right). \end{cases}$$

Was den Grad der Allgemeinheit der hiermit aufgestellten *Transformation t_n für die Flächen der Klasse* (D) anbetrifft, so gilt hinsichtlich des Systems (25) wieder die Bemerkung, die sich an (17) knüpfte. Es existieren *drei* linear unabhängige Lösungen, aus denen sich das allgemeine Integral in der Form $\mathfrak{c}_1 R_1 + \mathfrak{c}_2 R_2 + \mathfrak{c}_3 R_3$ zusammensetzt. Da ϑ_1, ϑ_1' nur von $\frac{R_\alpha}{R}$, $\frac{R_\beta}{R}$ abhängen, so treten bei gegebenem n nur *zwei* wesentliche Konstanten auf. *Man gewinnt also für einen bestimmten Wert von n durch die Operation t_n eine Schar von ∞^2 transformierten Flächen der Klasse* (D).

Diese Tatsache ist einer anschaulichen Deutung zugänglich. Wir eliminieren ϑ_1 und ϑ_1' aus den drei Gleichungen (31) und

Digitized by Google

finden:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x, & -3n^{\frac{1}{3}}\vartheta', & 3n^{-\frac{1}{3}}\vartheta \\ 3n^{-\frac{1}{3}}\vartheta', & \vartheta(y_1 - y), & -3n^{\frac{1}{3}} \\ -3n^{\frac{1}{3}}\vartheta, & 3n^{-\frac{1}{3}}, & \vartheta'(z_1 - z) \end{vmatrix} = 0$$

oder nach Entwicklung der Determinante und Wiedereinführung der Größen ξ, η, ζ:

$$(32) \quad (x_1 - x)(y_1 - y)(z_1 - z) + 9[\xi(x_1 - x) + \eta(y_1 - y) + \zeta(z_1 - z)] - 27\left(n - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Daraus entnehmen wir zunächst den Satz: *Ort der Punkte* (x_1, y_1, z_1), *die bei Anwendung der* ∞^2 *zu demselben n gehörigen Transformationen* t_n *aus einem Punkte* (x, y, z) *von S hervorgehen, ist eine mit diesem Punkte verbundene, durch* (32) *definierte kubische Fläche* σ_n. Denken wir uns nun *vor* Ausführung einer Transformation t_n für jeden Punkt von S die zugehörige Hilfsfläche σ_n konstruiert, so erkennt man auf Grund einer einfachen Erwägung, die sich auf die Festsetzung der verfügbaren Konstanten (etwa der Anfangswerte von $\frac{R_\alpha}{R}$ und $\frac{R_\beta}{R}$ oder der Verhältnisse von c_1, c_2, c_3) bezieht, die Gültigkeit des folgenden Zusatzes: *Bei gegebenem n kann die Transformation* t_n *noch der Bedingung unterworfen werden, daß ein Punkt von S in einen willkürlich gewählten Punkt der zugehörigen Hilfsfläche* σ_n *übergeht.*

Wichtig ist noch die Feststellung, daß *die zu* t_n *inverse Operation eine Transformation* $t_{\frac{1}{n}}$ *mit der transformierenden Funktion* $\frac{1}{R}$ *ist.* Dies erhellt aus den Differentialrelationen (26); doch bedarf es noch des Nachweises, daß auch die endlichen Relationen (24) sich umkehren lassen, daß also

$$(33) \quad \begin{cases} \vartheta = n^{-\frac{2}{3}}\left\{\vartheta_1 + e^{-\varphi_1}\left[(1+n)\frac{R_\beta}{R}(\vartheta_1)_\alpha + (1-n)\frac{R_\alpha}{R}(\vartheta_1)_\beta\right]\right\}, \\ \vartheta' = n^{\frac{2}{3}}\left\{\vartheta_1' + e^{-\varphi_1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{R_\beta}{R}(\vartheta_1')_\alpha + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{R_\alpha}{R}(\vartheta_1')_\beta\right]\right\} \end{cases}$$

ist. Dazu hat man rechts wieder die Ableitungen von $\vartheta_1, \vartheta_1'$ durch (28) und schließlich $\vartheta_1, \vartheta_1'$ selber durch (24) auszudrücken und (27) zu berücksichtigen.

Kombiniert man (31) mit der zu der inversen Transformation $t_{\frac{1}{n}}$ gehörigen analogen Gleichung, so erhält man die folgende Be-

Digitized by Google

ziehung, die man durch Einsetzen der Ausdrücke (11), (29), (31) auch unmittelbar bestätigen kann:

$$(\xi_1-\xi)(x_1-x)+(\eta_1-\eta)(y_1-y)+(\zeta_1-\zeta)(z_1-z) = 0.$$

Sie besagt, daß *die Verbindungslinien entsprechender Punkte von S und S_1 und die zwischen den Bildpunkten der Normalen ausgespannten Sehnen von Σ sich rechtwinklig kreuzen.*

5. *Dreigliedrige Zyklen von Transformationen t_n.* — Wir verzichten auf die Behandlung des auch hier geltenden *Vertauschbarkeitssatzes*, demzufolge sich die Transformationen t_n zu viergliedrigen Zyklen zusammenfügen lassen. Die Herleitung desselben würde sich ziemlich eng an § 6 der unter [5]) zitierten Abhandlung anschließen. Das Ziel unserer Untersuchung, die Zerlegung der Transformation t_n in zwei aufeinander folgende asymptotische Transformationen, verlangt die Betrachtung eines Sonderfalles, der sich darbietet, wenn S gleichzeitig zwei Transformationen t_n und $t_{\frac{1}{n}}$ unterworfen wird, die überdies, wie wir in Anlehnung an ähnliche bei anderen Transformationen vorliegende Verhältnisse sagen, ein *harmonisches Paar* bilden.

Es werde also auf $S(x, y, z)$ neben der durch R definierten Transformation t_n, die $S_1(x_1, y_1, z_1)$ liefert, eine Transformation $t_{\frac{1}{n}}$ ausgeübt, deren transformierende Funktion R' ein Integral des Systems (25) ist, in dem $\frac{1}{n}$ an der Stelle von n steht, und außerdem die damit vereinbare Relation

$$e^{-\varphi}(R_\alpha R'_\beta + R_\beta R'_\alpha) - R R' = 0 \tag{34}$$

erfüllt, die genau so wie (14) den Charakter einer Anfangsbedingung besitzt. Beiläufig sei bemerkt, daß die *harmonische Relation* (34) die Anwendung des Vertauschbarkeitssatzes in dem *singulären Falle* $n_1 = n$, $n_2 = \frac{1}{n}$ ermöglicht und daß dabei die vierte, den Zyklus schließende Fläche infolge der dann auftretenden Quadratur sich auf ∞^1 Weisen verwirklichen läßt. Für unsere Zwecke genügt es, die durch die zweite Transformation $t_{\frac{1}{n}}$ aus S gewonnene Fläche $S_2(x_2, y_2, z_2)$ [es gibt, wie man im Hinblick auf (34) leicht feststellt, ∞^1 solcher Flächen] einzuführen. Die zu (24), (29), (31) analogen Formeln sind:

$$\begin{cases} \vartheta_2 = n^{-\frac{2}{3}}\left\{\vartheta - e^{-\varphi}\left[(1+n)\frac{R'_\beta}{R'}\vartheta_\alpha + (1-n)\frac{R'_\alpha}{R'}\vartheta_\beta\right]\right\}, \\ \vartheta'_2 = n^{\frac{2}{3}}\left\{\vartheta' - e^{-\varphi}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{R'_\beta}{R'}\vartheta'_\alpha + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{R'_\alpha}{R'}\vartheta'_\beta\right]\right\}, \end{cases} \tag{35}$$

Digitized by Google

$$\xi_2 = \frac{1}{\vartheta_2 \vartheta_2'}, \quad \eta_2 = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_2'}, \quad \zeta_2 = \frac{\vartheta_2'^2}{\vartheta_2}, \tag{36}$$

$$\begin{cases} x_2 = x + 3\left(n^{-\frac{1}{3}} \vartheta_2 \vartheta' - n^{\frac{1}{3}} \vartheta_2' \vartheta\right), \\ y_2 = y + \dfrac{3}{\vartheta_2 \vartheta}\left(n^{-\frac{1}{3}} \vartheta_2' - n^{\frac{1}{3}} \vartheta'\right), \\ z_2 = z + \dfrac{3}{\vartheta_2' \vartheta'}\left(n^{-\frac{1}{3}} \vartheta' - n^{\frac{1}{3}} \vartheta\right). \end{cases} \tag{37}$$

Wir stellen nun den wichtigen Satz auf: *Gehen S_1 und S_2 aus S durch zwei ein harmonisches Paar bildende Transformationen t_n und $t_{\frac{1}{n}}$ hervor, so führt auch eine Transformation t_n von S_1 zu S_2. Die drei Flächen S, S_1, S_2 sind also durch einen dreigliedrigen Zyklus von Transformationen t_n (im umgekehrten Sinne $t_{\frac{1}{n}}$) verbunden.*

Zum Beweise werde mit Berücksichtigung von (27) zunächst festgestellt, daß analog zu (22) auch

$$\mathfrak{F}\left(\frac{R'}{R}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{R}\right) = e^{\varphi_1} \tag{38}$$

ist. Wir können ferner (34) in die entsprechende Relation für das Paar $\frac{R'}{R}, \frac{1}{R}$ verwandeln:

$$e^{-\varphi_1}\left[\left(\frac{R'}{R}\right)_\alpha \left(\frac{1}{R}\right)_\beta + \left(\frac{R'}{R}\right)_\beta \left(\frac{1}{R}\right)_\alpha\right] - \frac{R'}{R} \cdot \frac{1}{R} = 0.$$

Differentiiert man diese Gleichung und beachtet dabei neben (38) den Umstand, daß $\frac{1}{R}$ die von S_1 zu S führende inverse Transformation $t_{\frac{1}{n}}$ definiert und demnach ein System von der Form (25) erfüllt, wobei $\frac{1}{n}$ für n und φ_1 für φ zu schreiben ist, so erkennt man unschwer, daß $\frac{R'}{R}$ als transformierende Funktion eine neue auf S_1 anwendbare Operation t_n bestimmt. Durch diese geht dann aus $\vartheta_1, \vartheta_1'$ ein Größenpaar hervor, für das wir, um den Formeln gleich ihre endgültige Gestalt geben zu können, wieder die Bezeichnungen $\vartheta_2, \vartheta_2'$ benutzen:

$$\begin{cases} \vartheta_2 = n^{\frac{2}{3}} \left\{\vartheta_1 - e^{-\varphi_1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{R_\beta'}{R'} - \frac{R_\beta}{R}\right)(\vartheta_1)_\alpha + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{R_\alpha'}{R'} - \frac{R_\alpha}{R}\right)(\vartheta_1)_\beta\right]\right\}, \\ \vartheta_2' = n^{-\frac{2}{3}} \left\{\vartheta_1' - e^{-\varphi_1}\left[(1+n)\left(\frac{R_\beta'}{R'} - \frac{R_\beta}{R}\right)(\vartheta_1')_\alpha + (1-n)\left(\frac{R_\alpha'}{R'} - \frac{R_\alpha}{R}\right)(\vartheta_1')_\beta\right]\right\}. \end{cases} \tag{39}$$

Digitized by Google

Die Gleichwertigkeit der Formeln (35) und (38) muß nun bestätigt werden. Die dazu erforderliche Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn man in (35) die aus (26) entnommenen Werte der Ableitungen von ϑ und ϑ':

$$\vartheta_\alpha = \frac{R_\alpha}{R}\vartheta - n^{\frac{1}{3}}\left[(\vartheta_1)_\alpha + \frac{R_\alpha}{R}\vartheta_1\right] \text{ usw.}$$

einsetzt, alsdann ϑ und ϑ' durch (33) ausdrückt und zuletzt die Relationen (27), (34) heranzieht. Die Formeln gehen so in (39) über.

Die Existenz des dreigliedrigen Transformationszyklus erscheint erst gesichert, wenn die zwischen den Koordinaten von S_1 und S_2 vermittelnden Relationen:

$$(40)\qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + 3\left(n^{\frac{1}{3}}\vartheta_2\vartheta_1' - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_2'\vartheta_1\right), \\ y_2 = y_1 + \dfrac{3}{\vartheta_2\vartheta_1}\left(n^{\frac{1}{3}}\vartheta_2' - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_1'\right), \\ z_2 = z_1 + \dfrac{3}{\vartheta_2'\vartheta_1'}\left(n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1 - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_2\right) \end{cases}$$

als Folgerungen aus (31) und (37) erkannt sind. Man hat nämlich in Anbetracht der dem Symbol $\langle\ \rangle$ anhaftenden additiven Konstanten mit der Möglichkeit zu rechnen, daß die durch (40) bestimmte Fläche S_2 von der durch (37) gegebenen durch eine Translation verschieden ist.

Um noch diesen Punkt des Beweises zu erledigen, betrachten wir den Ausdruck:

$$\mathsf{B} = n\left(n^{-\frac{2}{3}}\vartheta_1 - \vartheta\right)\left(n^{-\frac{2}{3}}\vartheta_2' - \vartheta'\right) - \frac{1}{n}\left(n^{\frac{2}{3}}\vartheta_2 - \vartheta\right)\left(n^{\frac{2}{3}}\vartheta_1' - \vartheta'\right) - \left(n - \frac{1}{n}\right)\vartheta\vartheta'.$$

Beseitigt man $\vartheta_1, \vartheta_1', \vartheta_2, \vartheta_2'$ durch Anwendung der Formeln (24), (35) und berücksichtigt schließlich die Beziehungen (14), (34), so ergibt sich $\mathsf{B} = 0$. Wir erhalten daraus durch eine leichte Umformung die Gleichung:

$$(41)\qquad n^{-\frac{1}{3}}(\vartheta\vartheta_1' + \vartheta_1\vartheta_2' + \vartheta_2\vartheta') = n^{\frac{1}{3}}(\vartheta\vartheta_2' + \vartheta_2\vartheta_1' + \vartheta_1\vartheta'),$$

die wir als die *bilineare Relation* des dreigliedrigen Transformationszyklus bezeichnen. Sie ist von grundlegender Bedeutung für die weiteren Entwicklungen, deren es zur Erreichung unseres Zieles bedarf. Um zunächst die Formeln (40) herzuleiten, bilden wir aus

Digitized by Google

(37) und (31):

$$x_2 - x_1 = 3\left[n^{-\frac{1}{3}}(\vartheta\vartheta_1' + \vartheta_2\vartheta') - n^{\frac{1}{3}}(\vartheta\vartheta_2' + \vartheta_1\vartheta')\right]$$

und finden an Hand der bilinearen Relation tatsächlich:

$$x_2 - x_1 = 3\left(n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_2\vartheta_1' - n^{\frac{1}{3}}\vartheta_2'\vartheta_1\right).$$

In ähnlicher Weise schließt man auf das Bestehen der beiden anderen Formeln (40).

6. *Zerlegung der Transformation t_n in zwei aufeinander folgende asymptotische Transformationen.* — Wir machen abermals Gebrauch von (41) beim Nachweis der folgenden wichtigen Tatsache: *Für die Ebene, die durch drei korrespondierende Punkte der dem dreigliedrigen Zyklus angehörigen Flächen S, S_1, S_2 geht, verhalten sich die Richtungskosinus der Normalen wie*

$$1 : \vartheta\vartheta_1\vartheta_2 : \vartheta'\vartheta_1'\vartheta_2'. \tag{42}$$

Man zeigt nämlich durch Einsetzen der Ausdrücke (31), (37) mit Benutzung von (41), daß

$$x_1 - x + \vartheta\vartheta_1\vartheta_2(y_1 - y) + \vartheta'\vartheta_1'\vartheta_2'(z_1 - z) = 0,$$
$$x_2 - x + \vartheta\vartheta_1\vartheta_2(y_2 - y) + \vartheta'\vartheta_1'\vartheta_2'(z_2 - z) = 0$$

ist.

Auf Grund der bilinearen Relation gelangen wir ferner zu einem ausgezeichneten Punkt der soeben betrachteten Ebene. Wir werden dann nachweisen, daß dieser Punkt die einzuschaltende Fläche beschreibt, die mit S und S_1 (und auch mit S_2) durch asymptotische Transformationen zusammenhängt. Zunächst führen wir, an (41) anknüpfend, die Größe

$$\omega = \frac{n^{-\frac{1}{3}}}{3}(\vartheta\vartheta_1' + \vartheta_1\vartheta_2' + \vartheta_2\vartheta') = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{3}(\vartheta\vartheta_2' + \vartheta_2\vartheta_1' + \vartheta_1\vartheta') \tag{43}$$

ein, bringen die erste der Relationen (31) in die Form:

$$x_1 - x = \frac{1}{\omega}\left[\vartheta_1\vartheta'(\vartheta\vartheta_1' + \vartheta_1\vartheta_2' + \vartheta_2\vartheta') - \vartheta\vartheta_1'(\vartheta\vartheta_2' + \vartheta_2\vartheta_1' + \vartheta_1\vartheta')\right]$$

und ersehen daraus die Gleichheit der beiden folgenden Ausdrücke, deren gemeinsamer Wert mit x^* bezeichnet sei:

$$x + \frac{1}{\omega}(\vartheta_1\vartheta_2\vartheta'^2 - \vartheta_1'\vartheta_2'\vartheta^2) = x_1 + \frac{1}{\omega}(\vartheta\vartheta_2\vartheta_1'^2 - \vartheta'\vartheta_2'\vartheta_1^2) = x^*.$$

Offenbar ist auch:

$$x_2 + \frac{1}{\omega}(\vartheta\vartheta_1\vartheta_2'^2 - \vartheta'\vartheta_1'\vartheta_2^2) = x^*.$$

Digitized by Google

Werden die übrigen Koordinaten in derselben Weise behandelt, so entsteht das Formelsystem:

$$(44)\quad \begin{cases} x^* = x + \dfrac{1}{\omega}(\vartheta_1\vartheta_2\vartheta'^2 - \vartheta'_1\vartheta'_2\vartheta^2) = x_1 + \dfrac{1}{\omega}(\vartheta\vartheta_2\vartheta'^2_1 - \vartheta'\vartheta'_2\vartheta^2_1) \\ \qquad = x_2 + \dfrac{1}{\omega}(\vartheta\vartheta_1\vartheta'^2_2 - \vartheta'\vartheta'_1\vartheta^2_2), \\ y^* = y + \dfrac{1}{\omega\vartheta}(\vartheta'_1\vartheta'_2 - \vartheta'^2) = y_1 + \dfrac{1}{\omega\vartheta_1}(\vartheta'\vartheta'_2 - \vartheta'^2_1) \\ \qquad = y_2 + \dfrac{1}{\omega\vartheta_2}(\vartheta'\vartheta'_1 - \vartheta'^2_2), \\ z^* = z + \dfrac{1}{\omega\vartheta'}(\vartheta^2 - \vartheta_1\vartheta_2) = z_1 + \dfrac{1}{\omega\vartheta'_1}(\vartheta^2_1 - \vartheta\vartheta_2) \\ \qquad = z_2 + \dfrac{1}{\omega\vartheta'_2}(\vartheta^2_2 - \vartheta\vartheta_1). \end{cases}$$

Da nun, wie man mit Hilfe von (41) bestätigt,

$$x^* - x + \vartheta\vartheta_1\vartheta_2(y^* - y) + \vartheta'\vartheta'_1\vartheta'_2(z^* - z) = 0$$

ist und die Differenzen $x^* - x_1, \ldots$ sowie $x^* - x_2, \ldots$ die gleiche Beziehung erfüllen, so liegt der Punkt (x^*, y^*, z^*) tatsächlich in der Ebene der drei Punkte (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). Man überzeugt sich außerdem davon, daß

$$x^* - x + \vartheta^3(y^* - y) + \vartheta'^3(z^* - z) = 0$$

wird und daß analoge Relationen für die Indizes 1 und 2 gelten. Damit ist gezeigt, daß *die Ebene dreier korrespondierender Punkte der durch den Zyklus verbundenen Flächen* S, S_1, S_2 *den Schnittpunkt* (x^*, y^*, z^*) *ihrer Tangentialebenen enthält.*

S^* sei die Ortsfläche des Punktes (x^*, y^*, z^*), in dem, wie aus dem letzten Ergebnis hervorgeht, drei in einer Ebene liegende Tangenten von S, S_1, S_2 zusammenstoßen. Es liegt die Vermutung nahe, daß diese Ebene Tangentialebene der Fläche S^* ist, daß also die drei Tangenten von S, S_1, S_2 auch Tangenten an S^* sind [10]).

10) Es handelt sich eigentlich nur noch darum, die Differentialrelation

$$dx^* + \vartheta\vartheta_1\vartheta_2\,dy^* + \vartheta'\vartheta'_1\vartheta'_2\,dz^* = 0$$

zu verifizieren, da man auf die Korrespondenz der Asymptotenlinien, die für die W-Kongruenzen charakteristisch ist, hier leicht ohne Rechnung schließen kann. Die linke Seite der fraglichen Differentialrelation nimmt aber beim Einsetzen der betreffenden Ausdrücke eine außerordentlich komplizierte Gestalt an, so daß der im folgenden eingeschlagene Weg, bei dem die zwischen S und S^* vermittelnde Moutardsche Transformation wirklich aufgestellt wird, auch in rechnerischer Hinsicht den Vorzug verdient.

Digitized by Google

Um dies zu untersuchen, führen wir die den Normalenkosinus der Ebene proportionalen Größen

$$(45) \qquad \xi^* = \frac{1}{\omega}, \quad \eta^* = \frac{\vartheta\vartheta_1\vartheta_2}{\omega}, \quad \zeta^* = \frac{\vartheta'\vartheta_1'\vartheta_2'}{\omega}$$

ein, mit deren Hilfe wir die erste Gruppe der Formeln (44) folgendermaßen schreiben:

$$(46) \quad x^*-x = \eta^*\xi-\xi^*\eta, \quad y^*-y = \xi^*\xi-\xi^*\xi, \quad z^*-z = \xi^*\eta-\eta^*\xi,$$

während sich mit Berücksichtigung von (29), (36) gleichzeitig

$$x^*-x_1 = \eta^*\xi_1-\xi^*\eta_1, \ \ldots, \quad x^*-x_2 = \eta^*\xi_2-\zeta^*\eta_2, \ \ldots$$

ergibt. Vergleicht man (46) mit den für die allgemeine asymptotische Flächentransformation geltenden Relationen (7), so erkennt man, daß es noch darauf ankommt, *eine Moutardsche Transformation aufzufinden, die* ξ, η, ζ *in* ξ^*, η^*, ζ^* *überführt.*

Zu diesem Zweck verfahren wir zunächst ganz so wie in § 7 der unter [5]) genannten Abhandlung. Wir gehen von der an Hand von (14) und (34) leicht zu bestätigenden Tatsache aus, daß die Produkte $\vartheta\vartheta'$ und RR' Integrale der Moutardschen Differentialgleichung

$$\mathfrak{F}(\vartheta\vartheta') = \mathfrak{F}(RR') = 3e^{\varphi}$$

sind, und zeigen, daß $\vartheta\vartheta'$ *mittels der durch* RR' *definierten Moutardschen Transformation in* ω *übergeht.* Das erfordert den Nachweis der Differentialrelationen:

$$(47) \quad (RR'\omega)_\alpha = -R^3R'^2\left(\frac{\vartheta\vartheta'}{RR'}\right)_\alpha, \quad (RR'\omega)_\beta = R^2R'^2\left(\frac{\vartheta\vartheta'}{RR'}\right)_\beta.$$

Wir differentiieren den ersten der beiden für ω gegebenen Ausdrücke (43) nach α, benutzen für die Ableitungen von $\vartheta_1, \vartheta_1', \vartheta_2, \vartheta_2'$ die Formeln (28) sowie die analogen:

$$(48) \qquad (\vartheta_2)_\alpha = -\frac{R_\alpha'}{R'}\vartheta_2 - n^{\frac{1}{3}}\left(\vartheta_\alpha - \frac{R_\alpha'}{R'}\vartheta_\alpha\right) \text{ usw.}$$

und finden so:

$$(49) \quad \omega_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'}\omega = \frac{1}{3}\left[-(\vartheta\vartheta')_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'}\vartheta\vartheta'\right] + P + Q,$$

wobei

$$P = \frac{n^{-\frac{1}{3}}}{3}\left[\vartheta_2\vartheta_\alpha' - n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_2'\vartheta_\alpha - n^{-\frac{1}{3}}\left(\vartheta_1\vartheta_\alpha' - n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1'\vartheta_\alpha\right)\right],$$

$$Q = \frac{n^{-\frac{1}{3}}}{3}\left[\vartheta\left(\frac{R_\alpha'}{R'}\vartheta_1' + n^{-\frac{1}{3}}\frac{R_\alpha}{R}\vartheta_2'\right) + \vartheta'\left(n^{-\frac{1}{3}}\frac{R_\alpha'}{R'}\vartheta_1 + \frac{R_\alpha}{R}\vartheta_2\right)\right]$$

Digitized by Google

ist. Zur Reduktion von P dient uns die Beziehung (30) und die entsprechende für den Index 2:

$$\vartheta_2 \vartheta'_\alpha - n^{-\frac{1}{3}} \vartheta'_2 \vartheta_\alpha = n^{-\frac{2}{3}} \vartheta \vartheta'_\alpha - n^{\frac{1}{3}} \vartheta' \vartheta_\alpha + \left(n^{\frac{1}{3}} - n^{-\frac{2}{3}}\right) \frac{R'_\alpha}{R'} \vartheta \vartheta'.$$

Es wird:

$$P = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[-(\vartheta\vartheta')_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'} \vartheta\vartheta'\right].$$

Um Q zu vereinfachen, bilden wir uns aus (24), (35) mit Berücksichtigung von (34):

$$(50) \quad \begin{cases} \dfrac{R'_\alpha}{R'} \vartheta'_1 + n^{-\frac{1}{3}} \dfrac{R_\alpha}{R} \vartheta'_2 = n^{\frac{1}{3}} \vartheta' \left(\dfrac{R_\alpha}{R} + \dfrac{1}{n} \dfrac{R'_\alpha}{R'}\right) - n^{\frac{1}{3}} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \vartheta'_\alpha, \\ n^{-\frac{1}{3}} \dfrac{R'_\alpha}{R'} \vartheta_1 + \dfrac{R_\alpha}{R} \vartheta_2 = n^{\frac{1}{3}} \vartheta \left(\dfrac{R'_\alpha}{R'} + \dfrac{1}{n} \dfrac{R_\alpha}{R}\right) - n^{\frac{1}{3}} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \vartheta_\alpha \end{cases}$$

und erhalten:

$$Q = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[-(\vartheta\vartheta')_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'} \vartheta\vartheta'\right].$$

Durch Einsetzen der für P und Q gefundenen Werte verwandelt sich (49) in:

$$(51) \qquad \omega_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'} \omega = -(\vartheta\vartheta')_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'} \vartheta\vartheta'.$$

Die erste der beiden Differentialrelationen (47) ist damit bestätigt; die zweite ergibt sich auf analoge Weise.

Wir folgern nun unmittelbar, indem wir abermals den am Schluß von Art. 2 aufgestellten Hilfssatz heranziehen, daß $\xi = \frac{1}{\vartheta\vartheta'}$ *mittels der durch* $\frac{RR'\omega}{\vartheta\vartheta'}$ *definierten Moutardschen Transformation in* $\xi^* = \frac{1}{\omega}$ *übergeht.* Das Ziel der Untersuchung wird erreicht sein, sobald der Nachweis erbracht ist, daß *man durch dieselbe Operation von* $\eta = \frac{\vartheta^2}{\vartheta'}$ *zu* $\eta^* = \frac{\vartheta\vartheta_1\vartheta_2}{\omega}$ *und von* $\zeta = \frac{\vartheta'^2}{\vartheta}$ *zu* $\zeta^* = \frac{\vartheta'\vartheta'_1\vartheta'_2}{\omega}$ *gelangt.* Es genügt, die erforderliche Rechnung für den Übergang von η zu η^* durchzuführen. Wir beschränken uns außerdem auf diejenige der beiden Differentialrelationen, die sich auf die Variable α bezieht. Behauptet wird also, daß

$$\left(\frac{RR'\omega}{\vartheta\vartheta'} \cdot \frac{\vartheta\vartheta_1\vartheta_2}{\omega}\right)_\alpha = -\left(\frac{RR'\omega}{\vartheta\vartheta'}\right)^2 \cdot \left(\frac{\vartheta\vartheta'}{RR'\omega} \cdot \frac{\vartheta^2}{\vartheta'}\right)_\alpha$$

Digitized by Google

ist, oder, was dasselbe bedeutet, daß der Ausdruck

$$\Gamma = \frac{\vartheta'}{RR'}\left[\left(\frac{RR'\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta'}\right)_\alpha + \frac{R^2R'^2\omega^2}{\vartheta^2\vartheta'^2}\left(\frac{\vartheta^3}{RR'\omega}\right)_\alpha\right]$$

identisch verschwindet. Wir schreiben

$$\Gamma = (\vartheta_1\vartheta_2)_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'}\vartheta_1\vartheta_2 - \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta'}\vartheta'_\alpha + 3\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta'}\omega - \frac{\vartheta}{\vartheta'}\left[\omega_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'}\omega\right], \tag{52}$$

formen die Summe der beiden ersten Glieder mittels (28) und (48) um:

$$(\vartheta_1\vartheta_2)_\alpha + \frac{(RR')_\alpha}{RR'}\vartheta_1\vartheta_2 = -\vartheta_\alpha\left(n^{\frac{1}{3}}\vartheta_1 + n^{-\frac{1}{3}}\vartheta_2\right) + \vartheta\left(n^{\frac{1}{3}}\frac{R'_\alpha}{R'}\vartheta_1 + n^{-\frac{1}{3}}\frac{R_\alpha}{R}\vartheta_2\right),$$

ersetzen in (52) ferner ω durch den ersten Ausdruck (43) und die an letzter Stelle stehende Klammer durch (51). Nach einigen Reduktionen wird:

$$\Gamma = -n^{-\frac{2}{3}}\frac{\vartheta}{\vartheta'}\left(\vartheta_1\vartheta'_\alpha - n^{\frac{1}{3}}\vartheta'_1\vartheta_\alpha\right) + n^{-\frac{1}{3}}\vartheta\left(n^{-\frac{1}{3}}\frac{R'_\alpha}{R'}\vartheta_1 + \frac{R_\alpha}{R}\vartheta_2\right) + \vartheta\vartheta_\alpha + \frac{\vartheta^2}{\vartheta'}\vartheta'_\alpha - \vartheta^2\frac{(RR')_\alpha}{RR'}.$$

Ziehen wir schließlich noch (30) sowie die zweite Formel (50) heran, so folgt tatsächlich $\Gamma = 0$.

Wir erinnern jetzt an die Relationen (46), durch die sich S^* als zweiter Brennflächenmantel der W-Kongruenz darstellt, die das Ergebnis der zwischen ξ, η, ζ und ξ^*, η^*, ζ^* vermittelnden Moutardschen Transformation ist. Damit ist auch klar, daß die Normalenkosinus von S^* den Größen ξ^*, η^*, ζ^* proportional sind. In betreff der beiden anderen asymptotischen Transformationen, die S^* mit S_1 und S_2 verbinden, bedarf es keiner weiteren Entwicklungen. Wir können das Schlußresultat, wie folgt, aussprechen: *Die Transformation t_n, die von einer Fläche S der Klasse* (D) *zu einer neuen derartigen Fläche S_1 führt, kann durch Einschaltung einer Fläche S^*, die nicht zu* (D) *gehört, in zwei aufeinander folgende asymptotische Transformationen zerlegt werden. Es gelingt dies durch Konstruktion einer dritten Fläche S_2 der Klasse* (D), *die mit S und S_1 einen dreigliedrigen Transformationszyklus bildet. Die Zwischenfläche S^* ist die Enveloppe der Ebenen, die durch korrespondierende Punkte von S, S_1, S_2 gelegt sind.*

Digitized by Google

Es sei noch bemerkt, daß mit S_2 zusammen auch S^* auf ∞^1 Weisen gewählt werden kann. Das entspricht den bekannten geometrischen Verhältnissen, die sich an das Bianchische Kompositionstheorem für die asymptotischen Transformationen knüpfen. Insbesondere gilt auch die Eigenschaft, daß sie ∞^1 Zwischenflächen S^* auf den Schnittlinien der Tangentialebenen von S und S_1 projektive Punktreihen bestimmen.

Digitized by Google

„Wellenmechanik" und Wellenmechanik [1]).

Von Arthur Korn.

Die Schwingungs- und Wellenprobleme der mathematischen Physik, mit welchen sich die Mathematiker seit mehr als $1^1/_2$ Jahrhunderten mit Vorliebe beschäftigt haben, knüpfen an die Integration der Wellengleichung

$$\Delta\varphi = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \psi(x, y, z, t) \tag{1}$$

bzw. der Gleichung der gedämpften Welle

$$\Delta\varphi = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \psi(x, y, z, t) \tag{1'}$$

mit oder ohne Störungsglied ψ an. Nachdem die Beschäftigung mit der einfacheren Differentialgleichung

$$\Delta f + kf = \chi \tag{2}$$

bei geeigneten Grenzbedingungen zu der Erkenntnis geführt hatte, daß für eine unendlich abzählbare Folge von Werten

$$k_1, k_2, k_3, \ldots,$$

den sogenannten „Eigenwerten", Funktionen

$$f_1, f_2, f_3, \ldots,$$

die sogenannten „Eigenfunktionen", existieren, welche die Gleichungen erfüllen:

$$\Delta f_j + k_j f_j = 0, \tag{3}$$

und Funktionen sehr allgemeiner Art in der Form

$$\sum_1^\infty{}^j a_j f_j$$

nach den „Eigenfunktionen" entwickelt werden können, war die Möglichkeit gegeben, auch die Lösungen der Wellengleichung bzw. der Gleichung der gedämpften Welle in Reihen von der Form:

$$\sum{}^j \varphi_j(x, y, z)\, e^{\lambda_j t}$$

1) Vorgetragen in der 248. Sitzung am 23. Mai 1928.

Digitized by Google

zu entwickeln, in welchen die im allgemeinen komplexen λ_j mit den Eigenwerten k_j in einem einfachen algebraischen Zusammenhange stehen.

Aus diesen mathematischen Untersuchungen sind für die Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, für die Elastizitätstheorie, die Theorie des Elektromagnetismus, die Optik und die Wärmetheorie außerordentlich wertvolle Resultate gewonnen werden, bei denen die Funktion φ oder ihre Ableitungen ganz bestimmte, konkrete Bedeutungen hatten. Bei der Zurückführung der den Anwendungen zugänglichen Erscheinungen auf die oben genannten Differentialgleichungen wird freilich im allgemeinen mit ersten Annäherungen gerechnet, die gestatten, die Probleme auf solche lineare Differentialgleichungen zurückzuführen. Man vernachlässigt im allgemeinen Terme, die von zweiter und höherer Ordnung in bezug auf

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

sind, unter der Voraussetzung, daß diese Differentialquotienten ihrerseits nicht außerordentlich groß sind.

Mit besonderer Rücksicht auf die Arbeiten Schrödinger's ist die Berücksichtigung von additiven Gliedern der Form

$$\alpha\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right\}$$

in den Gleichungen (1) bzw. (1′) von besonderem Interesse, und wir wollen die abgeänderte Gleichung

$$(4)\quad \Delta\varphi=\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\alpha\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right\}+\psi$$

untersuchen, unter der besonderen Voraussetzung, daß die Störungsfunktion ψ explizite t nicht enthält.

Führt man anstelle von φ die neue unbekannte Funktion Φ durch die Substitution

$$(5)\qquad \psi=-\frac{1}{\alpha}\log\Phi,\quad \Phi=e^{-\alpha\varphi}$$

ein, so folgt:

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta\Phi}{\Phi}+\frac{1}{\alpha\Phi^2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}=-\frac{1}{\alpha C^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$
$$+\frac{1}{\alpha C^2\Phi^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2-\frac{\varkappa}{\alpha\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{\alpha\Phi^2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2\right\}+\psi,$$

Digitized by Google

oder:

$$\Delta\Phi + \alpha\psi\Phi = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \varkappa\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{6}$$

Bezeichnen wir mit

$$F_j,\ K_j$$

die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte, welche bei geeigneten Grenzbedingungen die Gleichungen

$$\Delta F_j + (\alpha\psi + K_j)F_j = 0 \tag{7}$$

erfüllen, so erkennt man, daß man die Lösungen von (6) im allgemeinen in der Form

$$\sum_1^\infty{}_j F_j(x, y, z)\, e^{\Lambda_j t} \tag{7a}$$

darstellen kann, wo die im allgemeinen komplexen Λ_j mit den Eigenwerten K_j durch einfache algebraische Relationen verknüpft sind.

Die Gleichung (7) ist nun nichts anderes, als die Gleichung [2]), welche der Schrödingerschen „Wellenmechanik“ zugrunde liegt. Sie unterscheidet sich von der der gewöhnlichen Wellenmechanik zugrunde liegenden Gleichung dadurch, daß das additive Glied

$$\alpha\psi F_j$$

zu berücksichtigen ist, wobei ψ eine gegebene Funktion der Koordinaten x, y, z ist.

In der Schrödingerschen „Wellenmechanik“ wird nun angenommen, daß mit jeder Bewegung eines materiellen Teilchens, dessen Bewegung nach der klassischen Mechanik Bewegungsgleichungen von der Form

$$\frac{du}{dt} = -\text{const.}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \ldots$$

gehorcht, ein Wellenvorgang verbunden ist, über den konkrete, mechanische Voraussetzungen nicht gemacht werden, der indessen von einer Funktion Φ abhängen soll, die von der Form (7a) ist.

Unbeschadet der mechanischen Unbestimmtheit, welche in solchen Annahmen liegt, ergeben sich aus denselben viele interessante Schlüsse, die in einer wunderbaren Analogie zu Resultaten der

2) Bezüglich des Vorzeichens von $\alpha\psi$ in (7) besteht bei diesen mechanischen Auslegungen ein Unterschied mit der Schrödinger'schen Theorie, der bei der Behandlung bestimmter, spezieller Probleme zu beachten ist. (Man vgl. den Schluß dieser Abhandlung).

Digitized by Google

modernen Quantenmechanik stehen. Der Erfolg, den Schrödinger's Arbeiten gehabt haben, ist zweifellos zum großen Teil dem glücklichen Ergebnis zu verdanken, daß der modernen Quantenmechanik, welche sich allzuweit von der klassischen Mechanik entfernt hatte, wieder ein Weg zu dieser gewiesen wurde. Es bleibt indessen noch ein erhebliches Desideratum, nämlich die wirkliche mechanische Interpretation des Wellenvorganges, welcher durch die Schrödingersche Wellengleichung beschrieben werden kann. Hier begegnen sich die neuen Bestrebungen mit meinen eigenen Arbeiten, die eine völlige Zurückführung auf rein mechanische Vorgänge postulieren, für welche die Grundgesetze der klassischen Mechanik als erste Annäherungen giltig sein sollen. Es erhebt sich die Frage, welche mechanische Bedeutung kann einer Funktion Φ beigelegt werden, die einer Gleichung von der Form (6) und geeigneten Grenzbedingungen gehorcht? Bei der gewöhnlichen Wellengleichung ist alles klar: Bei manchen Problemen sind die

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Geschwindigkeitskomponenten; handelt es sich um die Wellengleichung für einen Vektor $\mathfrak{u}$

$$\Delta \mathfrak{u} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} + \varkappa \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t},$$

so ist bei manchen Problemen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{u}$$

ein Geschwindigkeitsvektor, es kann auch eine Kombination der beiden Fälle vorhanden sein, sodaß, wie in der Elastizitätstheorie,

$$a \operatorname{grad} \varphi + b \operatorname{rot} \mathfrak{u}$$

ein Geschwindigkeitsvektor ist.

So einfach liegt eine mechanische Interpretation der Schrödingerschen Wellengleichung nicht.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

können nicht ohne weiteres als Geschwindigkeitsvektoren gedeutet werden, ebensowenig bei Annahme einer Schrödingerschen Wellengleichung für einen Vektor $\mathfrak{U}$

$$\Delta \mathfrak{U} + \alpha \psi \mathfrak{U} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2} + \varkappa \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}$$

Digitized by Google

die Vektoren

$$\text{rot } \mathfrak{U}$$

oder die Kombinationen

$$a \operatorname{grad} \Phi + b \operatorname{rot} \mathfrak{U}.$$

Ich halte es für wahrscheinlich, daß nach wie vor nur die Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

der (4) genügenden Funktion bzw. bei Bestehen einer analogen vektoriellen Gleichung für einen Vektor u die

$$\text{rot } u$$

bzw. die Kombinationen

$$a \operatorname{grad} \varphi + b \operatorname{rot} u$$

als Geschwindigkeitskomponenten gedeutet werden können, die wesentliche Frage läuft somit darauf hinaus, zunächst für den einfachsten Fall des wirbellosen Feldes, kann man die Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

einer Funktion φ, welche der abgeänderten Wellengleichung (4) genügt, mechanisch als Geschwindigkeitskomponenten interpretieren? Das ist nun bei dem Charakter der Gleichung (4) garnicht so schwierig.

Denken wir uns zunächst den Fall, — das ist natürlich nur eine mathematische Abstraktion, — daß die Wellengeschwindigkeit C unendlich groß sei, dann lautet (4) — wir haben es mit dem bloßen Fall der Reibung oder Dämpfung zu tun —

$$\Delta \varphi = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} + \psi, \tag{8}$$

und wir vergleichen diese Gleichung mit der aus der Hydrodynamik wohl bekannten Gleichung:

$$\mu \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} = -p + k \Delta \varphi \tag{9}$$

für das Geschwindigkeitspotential φ einer mit Reibung begabten, konpressiblen Flüssigkeit im Falle der Wirbellosigkeit. Auch die gewöhnliche Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die Bewegung eines Massenteilchens unter dem Einfluß einer mit p pro-

Digitized by Google

portionalen Kräftefunktion hat diese Form — ich habe hierauf schon in einer früheren Veröffentlichung[3]) hingewiesen, — bei Hinzufügung eines Reibungsgliedes

$$k \Delta \varphi.$$

In der Absicht, von diesem extremen Falle auch auf die Fälle überzugehen, in denen C eine zwar sehr große, aber endliche Konstante ist, wollen wir uns nun die Lösungen der Gleichung (6) näher ansehen, die von der Form sind

$$\Phi = \sum_1^\infty {}_j F_j(x, y, z) e^{\Lambda_j t}, \tag{10}$$

wenn F_j und K_j die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte sind, welche bei geeigneten Grenzbedingungen die Gleichungen (7) erfüllen, und die Λ_j mit den K_j durch einfache algebraische Relationen verbunden sind. Es wird dann die Lösung von (8)

$$\varphi = -\frac{1}{\alpha} \log \sum {}_j F_j(x, y, z) e^{\Lambda_j t}, \tag{11}$$

die hiervon derivierten Geschwindigkeitskomponenten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

würden also von der Form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x} e^{\Lambda_1 t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} e^{\Lambda_2 t} + \cdots}{F_1 e^{\Lambda_1 t} + F_2 e^{\Lambda_2 t} + \cdots}. \tag{12}$$

Es sei sogleich darauf hingewiesen, daß auch in dem allgemeinen Falle, in welchem C eine endliche Zahl ist, die Form dieser allgemeinen Lösung dieselbe bleibt. Während aber in dem Falle unserer besonderen Abstraktion ($C = \infty$) die

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$$

reelle Zahlen sind, werden in dem allgemeinen Falle, in welchem C endlich ist, die

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$$

komplexe Zahlen sein, wir werden es also dann wirklich mit Schwingungen bzw. gedämpften Schwingungen zu tun haben. Um mechanisch das Hinzukommen der Glieder mit $\frac{1}{C^2}$ zu interpretieren,

3) A. Korn, Zs. f. Phys. 44, 745—753, 1927.

Digitized by Google

sind elastische Eigenschaften des Mediums vorauszusetzen, die Hinzunahme der Reibung erscheint dabei unumgänglich, wenn man zu Wellengleichungen von der Form (4) gelangen will.

Die Lösungen der abgeänderten Wellengleichung (4) zeigen einige besonders offensichtliche Unterschiede von den Lösungen der gewöhnlichen Wellengleichung

$$\Delta\varphi = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Einmal gehen in die Lösungen als Exponentialfaktoren von t nicht die

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$$

sondern die Differenzen

$$\Lambda_i - \Lambda_k$$

ein, da man ja mit irgend einem

$$e^{\Lambda_k t}$$

im Zähler und Nenner dividieren kann.

Ferner sind die Hauptlösungen

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x}, \ldots; \ldots$$

von t explizite nicht abhängig, während bei der gewöhnlichen Wellengleichung die

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \ldots; \ldots$$

von t explizite abhängige Faktoren

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots$$

besitzen. Da die Hauptlösungen von t explizite nicht abhängen, so erfüllen sie nach (4) die Gleichung

$$\alpha\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} = -\psi + \Delta\varphi, \tag{13}$$

das ist bei geeigneter Wahl der Konstanten die Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung für ein unter dem Einfluß der Kräftefunktion const.[4]) ψ sich bewegendes Masseteilchen, unter Hinzufügung des Reibungsgliedes

$$\text{const.}\,\Delta\varphi$$

4) Die Konstante setzt man zweckmäßig

$$= \frac{m}{2\alpha}.$$

Digitized by Google

Es ist besonders verlockend, solche Kräftefunktionen ψ zu wählen, für welche

$$\Delta\varphi = 0 \text{ oder } = \text{const.}$$

ist, also z. B. im eindimensionalen Falle

$$\varphi = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

in welchem dann auch ψ von zweiter Ordnung in bezug auf x wird:

$$\psi = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

oder im dreidimensionalen Falle z. B.

$$\varphi = \text{const.} \frac{1}{r}^{5}),$$

in welchem dann

$$\psi = \text{const.} \frac{1}{r^4}.$$

Zu bemerken ist natürlich, daß, wenn eine der Hauptlösungen, z. B. die erste die Gleichung

$$\Delta\varphi = 0$$

erfüllt, die übrigen Hauptlösungen diese Gleichung im allgemeinen nicht erfüllen werden. Wenn also bereits eine Kombination mit einer zweiten Hauptlösung stattfindet:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} e^{(A_2 - A_1)t}}{F_1 + F_2 e^{(A_2 - A_1)t}}, \ldots$$

dann wird, wenn auch $\log F_1$ der Laplaceschen Gleichung genügt, die Kombination φ der Laplaceschen Gleichung nicht genügen.

Ein weiterer wesentlicher Unterschied gegenüber den Lösungen der gewöhnlichen Wellengleichung besteht darin, daß bei letzteren die wohldefinierte Wellengeschwindigkeit C vorhanden ist; von einer solchen konstanten Wellengeschwindigkeit kann natürlich hier nicht die Rede sein, wir wollen nun aber, um zu der Vorstellung eines nach den Gesetzen der klassischen Mechanik bewegten Massenteilchens zu kommen, das außerdem noch mit Eigenschwingungen behaftet ist, uns denken, daß die Bewegung mit den Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x}, \ldots,$$

5) Wo

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

und (ξ, η, ζ) ein fester Punkt ist.

Digitized by Google

welche der ersten Hauptlösung entsprechen, und die als groß vorausgesetzt werden, mit diesen gegenüber verhältnismäßig kleinen, den übrigen Hauptlösungen entsprechenden Schwingungen kombiniert sind.

Für den einfachsten Fall, daß die erste Hauptlösung φ_1 der Gleichung

$$\Delta\varphi_1 = 0$$

genügt, würden wir also die Erscheinung haben, daß die Bewegung eines Massenteilchens mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}$$

welche der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$\alpha\left\{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right\} = -\psi$$

entsprechend der Wirkung einer mit ψ proportionalen Kräftefunktion ψ genügen, noch eine Schwingungsbewegung mitnimmt; die Geschwindigkeitskomponenten werden in Wirklichkeit von der Form sein:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial x}e^{(\Lambda_2-\Lambda_1)t}+\cdots}{F_1+F_2e^{(\Lambda_2-\Lambda_1)t}+\cdots}, \quad \cdots$$

oder, wenn wir bei der soeben ausgesprochenen Annahme, daß die der Hauptlösung entsprechenden Geschwindigkeiten groß gegen die hinzukommenden sind, entwickeln:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\chi_2}{\partial x}e^{(\Lambda_2-\Lambda_1)t}+\cdots.$$

Wir kommen also zu der Erfüllung des Wunsches, daß jeder gewöhnlichen Bewegung der klassischen Mechanik noch derartige Eigenschwingungen überlagert sind; ihre Entstehung können wir durch Hinzunahme von Reibungs- und Kompressibilitätserscheinungen erklären.

Ist für die Hauptlösung φ_1 die Gleichung

$$\Delta\varphi_1 = 0$$

nicht erfüllt, so ändert sich nur das Eine, daß die Hauptbewegung nicht im eigentlichen Sinne eine Bewegung ist, wie sie in der klassischen Mechanik ohne Reibung auftritt, vielmehr entspricht die Funktion der abgeänderten Hamilton-Jacobi'schen Gleichung

Digitized by Google

$$\alpha\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} = -\psi+\Delta\varphi$$

sonst ist aber ein prinzipieller Unterschied nicht vorhanden.

Das Wesen der mitgeführten Schwingungen ist darin von den sonst betrachteten Eigenschwingungen verschieden, daß für die Eigenwerte, welche ja die Schwingungsdauern bestimmen, die Schrödingersche Wellengleichung

$$\Delta F_j+(\alpha\psi+K_j)F_j = 0$$

erfüllt ist, nicht die sonst betrachtete Gleichung

$$\Delta f_j+k_jf_j = 0.$$

Es ergibt sich nun hier ein enormes Gebiet von Anwendungen, ich will hier ganz kurz den einfachst möglichen linearen Fall betrachten, den Fall

$$\psi = \text{const.} = C_0,$$

in welchem die Schrödingersche Gleichung mit der gewöhnlichen Gleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2}+(\alpha C_0+K)\Phi = 0$$

zusammenfällt. Eine Hauptlösung ist hier

$$\Phi_1 = e^{-\alpha(ax+b)},$$
$$\varphi_1 = \alpha x+b,$$

sie gehorcht der Hamilton-Jacobi'schen Gleichung

$$\alpha\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 = -C_0,$$

wobei

$$\alpha\alpha^2 = -C_0,$$

zu setzen ist, und es wird der entsprechende Eigenwert

$$K_1 = -2\alpha C_0.$$

Dieser gleichförmigen Bewegung können sich nun Schwingungsbewegungen hinzugesellen, entsprechend der Kombination mit Hauptlösungen von der Form:

$$\Phi_j = \text{const.}\sin(\sqrt{\alpha C_0+K_j}\,x+\varepsilon_j)$$

wobei die K_j und ε_j natürlich im allgemeinen erst durch die noch hinzuzufügenden Grenzbedingungen berechnet werden können. In

Digitized by Google

der einfachen Form

$$\varphi = \varphi_1 + \chi_2 e^{(\Lambda_2 - \Lambda_0)t} + \chi_3 e^{(\Lambda_3 - \Lambda_0)t} + \cdots$$

werden wir die Lösungen nur schreiben können, wenn die der ersten Hauptlösung entsprechenden Geschwindigkeiten verhältnismäßig groß gegen die Schwingungsgeschwindigkeiten sind, da sonst die Reihenentwicklungen nicht erlaubt sind.

Schwingungserscheinungen, die sehr große, der klassischen Mechanik entsprechende Geschwindigkeiten infolge von Reibung und Kompressibilität begleiten, das erscheint mir die Interpretation der „Wellenmechanik“, wie sie von den Quantenmechanikern zu grunde gelegt wird; und die eigentümlichen Erscheinungen dieser Wellenmechanik rühren daher, daß hier nicht lineare Glieder allein, sondern auch Glieder zweiter Ordnung in bezug auf die Geschwindigkeiten berücksichtigt werden.

Es ist kein Zufall, in einem anderen Ideenkreise, daß man ein dem Planck'schen analoges Strahlungsgesetz aus ungeordneten, molekularen Stößen ableiten kann[6]), wenn man zwischen zwei Teilchen (z. B. einem festen Teilchen im Koordinatenanfangspunkt und einem beweglichen mit der Koordinate x, welche in der Richtung der x-Axe sich bewegt) das Abstoßungsgesetz zu grunde legt:

$$\frac{du}{dt} = a - bu^2,$$

in welches also die Quadrate der Geschwindigkeit u eingehen.

Ich möchte mich indessen hier enthalten, weitere Spekulationen anzuschließen, der Vortrag war vielmehr als ein Beitrag zur mathemathischen Analysis gedacht, wie das Studium der Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right\} + \psi$$

zu Untersuchungen führt, welche mit den Untersuchungen in der Quantenmechanik analog sind; analog, durchaus nicht identisch, denn es sind manche Divergenzen vorher, welche schon darin ihren Ausdruck finden, daß die der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = -V + \text{const.}$$

entsprechende Wellengleichung Schrödinger's lautet

$$\frac{d^2F_j}{dx^2} + \left(K_j - \frac{8\pi^2}{h^2}V\right)F_j = 0,$$

6) A. Korn, Phys. Zs. 20, 85—87, 1919.

Digitized by Google

während sie bei den obigen Untersuchungen

$$\frac{d^2 F_j}{dx_2} + (K_j + \bar{\alpha} V) F_j = 0, \qquad (\bar{\alpha} > 0)$$

zu schreiben ist. Das macht bei konkreten Problemen wichtige Unterschiede. Während z. B. die von Schrödinger für den Fall des harmonischen Oszillators gegebenen der Wellengleichung

$$\frac{d^2 F_j}{dx^2} + \left(K_j - \frac{16\pi^4 \nu_0^2}{h^2} x^2\right) F_j = 0$$

entsprechenden Untersuchungen eine Verallgemeinerung der Hamilton-Jacobi'schen Gleichung

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = -2\pi^2 \nu_0^2 x^2 + \text{const.}$$

sein sollen, entspricht nach dem Obigen die genannte Wellengleichung dem mechanischen Problem:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = +2\pi^2 \nu_0^2 x^2 + \text{const.} + \frac{m}{2\alpha} \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

dessen erste Hauptlösung von der Form

$$\frac{d\varphi}{dx} = -ax, \quad x = \text{const. } e^{-at}$$

ist; die Schrödinger'sche Wellengleichung für die Abstoßung nach dem Coulomb'schen Gesetz entspricht bei diesen Untersuchungen dem Falle der Anziehung nach dem Newton'schen Gesetz bzw. Coulomb'schen Gesetz usw. Nichtsdestoweniger bleiben sehr interessante Analogien bestehen, und ich glaube, daß hier ein entsprechender Fortschritt einsetzen kann.

Nachtrag. In der Diskussion wurde von Herrn Hamel bemerkt, daß eine mechanische Interpretation des Zusatzgliedes

$$-\frac{\alpha}{C^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2$$

in (4) nicht leicht sein dürfte. In der Tat habe ich dieses Zusatzglied nur hinzugefügt, um völlig streng die *lineare* Gleichung (6) aus (4) herzuleiten. Mein Bestreben ging dahin, φ aus einer dominierenden Hauptlösung φ_1 und wesentlich kleineren hinzutretenden

Digitized by Google

Schwingungsgliedern zusammenzusetzen; da nun

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0,$$

wird das Zusatzglied

$$-\frac{\alpha}{C^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$$

von zweiter Ordnung klein, sodaß es also ebensogut auch fortgelassen werden kann. Wenn die Voraussetzung: φ_1 dominierend gegen hinzutretende kleine Schwingungen nicht gemacht wird, ist dies natürlich nicht der Fall, und ich pflichte dann dem Einwand Herrn Hamel's bez. der schwierigen Interpretationsmöglichkeit des Zusatzgliedes durchaus bei.

Zusatz bei der Korrektur (22. 9. 28). Es ist mir inzwischen gelungen, zu zeigen, daß durch eine geeignete, gleichfalls mechanisch interpretierbare Modifikation der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung die obige inverse Analogie in eine vollständige verwandelt werden kann. Die Untersuchung, welche ich am 20. 9. auf der diesjährigen Versammlung D. Naturforscher und Ärzte vorgetragen habe, wird in dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung erscheinen.

Digitized by Google

Über das Schließungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehung zu den elliptischen Funktionen[1]).

Von W. Fr. Meyer in Königsberg i/Pr.

Namhafte Forscher, wie Jacobi, Frobenius und Stickelberger, M. Simon u. A. haben das Schließungsproblem zweier Kegelschnitte (in der Ebene) in Beziehung gesetzt zu den elliptischen Funktionen. Unbeschadet aller Kunst des Aufbaus und der Durchführung haftet diesen Untersuchungen doch eine gewisse Künstlichkeit an. Es werden zwar gewisse Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen geometrisch gedeutet, und führen so zum Schließungsproblem und seiner Lösung. Erhebt man aber die schlichte Frage nach dem inneren Grunde für den Zusammenhang beider Gebiete, so erhält man keine befriedigende Auskunft. Überdies leidet die ausschließlich transzendente Behandlung der auf eine elliptische Kurve 3. Ordnung übertragenen Schließungsfigur an der Einseitigkeit, daß sie nur die Geometrie *auf* der Kurve berücksichtigt, und die Rolle, welche die Figur in weiterem Sinne innerhalb der Ebene spielt, außer Acht läßt.

In der Tat zeigen die folgenden Ausführungen, daß erst durch das Zusammenwirken und Ineinandergreifen von vier verschiedenen, je selbständigen Betrachtungsweisen — einer algebraisch-invariantentheoretischen, einer rein-geometrischen, einer analytisch-geometrischen, endlich einer transzendenten — eine völlige Beherrschung der Schließungsfigur ermöglicht wird.

Abschnitt A.
Algebraisch-invariantentheoretische Einführung.

Nr. 1. Das Haupthilfsmittel ist der „Normkegelschnitt“ [2]), der als Ordnungsgebilde mit N_2, als Klassengebilde mit N_2 bezeichnet

1) Vorgetragen in der 249. Sitzung am 27. Juni 1928. — Eine ausführlichere Darlegung findet man in einer demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinenden Abhandlung.

2) Den Normkegelschnitt, nebst seinen Analoga in den höheren Räumen, habe ich systematisch eingeführt in der Schrift: Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883. Die mit diesen Normkurven verbundenen projektiven Gruppen, zugleich in organischer Durchdringung mit der binären Invariantentheorie untersucht A. Comessatti, Math. Ann. 89 (1923), p. 272; 90, p. 174.

Digitized by Google

sei. Deren explizite, wie implizite Darstellung ist:

$$(I)\quad \begin{cases} (N_2)\, x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^2 : 2\lambda : 1; & 4x_0x_2 - x_1^2 = 0, \\ (\mathsf{N}_2)\, u_2 : u_1 : u_0 = 1 : -\lambda : \lambda^2; & u_0u_2 - u_1^2 = 0. \end{cases}$$

Gehen von einem Punkte $P(\lambda_1, \lambda_2)$ die beiden Tangenten λ_1, λ_2 an N_2, so sind die Koordinaten von P die elementar-symmetrischen Verbindungen der λ_1, λ_2:

$$(1)\qquad x_2 : x_1 : x_0 = s_2 : s_1 : s_0 = \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 : 1.$$

Nr. 2. Vorgelegt sei eine Ordnungskegelschnitt H, mit der Gleichung:

$$(2)\qquad H \equiv x_2^2 h_{22} + \cdots + x_1x_2 h_{12} + \cdots = 0,$$

und ein eigentlicher Klassenkegelschnitt, der als Normkegelschnitt N_2 gewählt werde.

Wir fragen nach einem „Schließungsdreieck“ [3]) $\Delta(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$, das N_2 um- und H einbeschrieben ist. Zu dem Behuf gehe man aus von irgend einer Tangente λ von N_2, die H in den beiden Punkten $P_1(\lambda, \lambda_1)$, $P_2(\lambda, \lambda_2)$ treffe; von diesen lege man die beiden Resttangenten λ_1, λ_2 an N_2, mit dem Treffpunkt $P(\lambda_1, \lambda_2)$. Die Frage kommt dann darauf hinaus, *ob und wann der Punkt P ebenfalls* auf H liegt.

Nr. 3. Nimmt man in (1) $\lambda_1 = \lambda_1$, $\lambda_2 = \mu$, und setzt in (2) ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung in μ, deren Wurzeln λ_1, λ_2 die zu λ gehörigen in $\Delta(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ sind. Setzt man deren s_2, s_1, s_0 wiederum in (1) ein, so ergibt sich eine biquadratische Lösungsgleichung der Aufgabe für die Unbekannte λ in der Gestalt [4]):

$$(2')\qquad S.h(\lambda) = 0.$$

Hier liefert $h(\lambda) = 0$ die vier Schnittpunkte von H mit N_2 und S bedeutet eine Konstante, die „Schließungsinvariante“:

$$(II)\qquad S \equiv h_{00}h_{22} - h_{01}h_{12} + h_{11}(h_{11} + h_{02}).$$

Bei der Diskussion von (2') sind zwei Fälle zu unterscheiden.

---

3) Die Aufgabe läßt sich auch rein algebraisch dahin formulieren, zwei ternäre quadratische Formen c_2, γ_2 in kontragradienten Variabeln vermöge einer Kollineation simultan als Summe von Produkten darzustellen:

$$c_2 = \sum_i a_i x_k x_l, \qquad \gamma_2 = \sum_i \alpha_i u_k u_l \qquad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

4) Da die linke Seite von (2) eine binäre Kovariante der Formen (I) und (1) ist, genügt es, deren Leitglied zu berechnen.

Digitized by Google

Im „allgemeinen" Falle, wo $S \neq 0$, lehrt (2'), daß die Schließungsaufgabe nur vier „uneigentliche" Lösungen zuläßt: den vier Wurzeln λ von $h(\lambda) = 0$ entsprechen vier ausgeartete Dreiecke vom Typus $\Delta(\lambda, \lambda, \lambda')$, für die je zwei Seiten und zwei Ecken koinzidieren.

Dagegen existiert in dem „Sonderfalle" $S = 0$ eine Kette von ∞^1 stetig auf einander folgenden eigentlichen Schließungsdreiecken $\Delta(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$, derart, daß jede Tangente von N_2 Seite, und jeder Punkt von H Ecke eines solchen Dreiecks ist. Wir sagen dann, daß sich beide Kegelschnitte in „Schließungslage" befinden.

Dies ist die bekannte Lösung des Schließungsproblemes [5]), für die wohl kaum ein einfacherer Beweis zu erbringen wäre.

Die Invariante S [6]) (II) läßt sich auch leicht formal als solche darstellen, wenn die beiden Kegelschnitte allgemein durch zwei ternäre quadratische Gleichungen $c_2(x) = 0$, $\gamma_2(u) = 0$ gegeben sind. Bedeutet J die bilineare Invariante der Formen c_2 und γ_2, und I diejenige der reziproken Formen (wobei J und I durch geeignete Zahlenfaktoren normiert seien), so ergibt sich durch Vergleichung mit (II) S in der invarianten Gestalt:

$$S \equiv J^2 - I. \tag{II'}$$

Nr. 4. Das Bemerkenswerteste bei der Schließungslage zweier Kegelschnitte H, N_2 ist das Auftreten von vier „eigentlich-uneigentlichen" Lösungen. Läßt man in der stetigen Kette der Dreiecke

5) Über die Ausdehnung auf den Raum, wo an die Stelle des Ordnungskegelschnitts H eine Fläche 2. Ordnung H tritt, und an die Stelle des Klassenkegelschnitts N_2 eine kubische Klassenkurve N_3; siehe des Verfassers „Apolarität ..." (l. c.), Abschnitt III, sowie die Abhandlung in den Hamburger Mitteilungen, 6 (1928), p. 352. Im Gegensatz zur Ebene existiert dann im allgemeinen immer ein einziges eigentliches Schließungstetraeder, das H ein- und N_3 umbeschrieben ist. Existiert aber im Besondern noch ein zweites solches Tetraeder, so auch eine Kette von ∞^2 solchen: H und N_3 befinden sich dann in „Schließungslage". Über eine Verallgemeinerung des Schlußverfahrens im Texte s. **A. Hurwitz**, Math. Ann., 15 (1879), p. 8.

6) Zu dieser Invariante S kann man noch auf einem andern instruktiven Wege gelangen. Im allgemeinen ist der Ort der Punkte $P(\lambda_1, \lambda_2)$ ein Kegelschnitt $U = \Omega$, dessen Gleichung auf Grund der Größen s_2, s_1, s_0 des Textes sofort hingeschrieben werden kann. Die Klassenform Ω erscheint dann in der invarianten Gestalt: $\Omega \equiv \mathsf{H} + S\mathsf{N}_2$, wo H die Klassenform von H bedeutet. Hieraus folgt, daß sich Ω dann und nur dann auf H reduziert, wenn im „Besondern" S verschwindet. Dann tritt eben von selbst die Schließungslage von H und N_2 ein. Dieser Kegelschnitt $U = \Omega$, der als „Überschließungskegelschnitt" dem Schließungsproblem übergeordnet ist, erfreut sich einer Reihe schöner Eigenschaften, auf die hier nicht näher eingegangen werde.

Digitized by Google

$\Delta(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ die Tangente λ an N_2 sich der Tangente in einem Schnittpunkte P von H und N_2 beliebig nähern, so ergibt der Grenzübergang den „Grenzsatz“:

„Sei P ein (isolierter) Schnittpunkt von H und N_2; die Tangente in P an N_2 treffe H in einem Restpunkte R. Dann berührt die Tangente t in R an H zugleich N_2, und vice versa. Umgekehrt, wenn diese Eigenschaft für einen Schnittpunkt P erfüllt ist, verschwindet S und es tritt die Schließungslage ein“.

Damit ordnet sich jedem der vier gemeinsamen Schnittpunkte P von H und N_2 eine bestimmte gemeinsame Tangente t von H und N_2 zu, und vice versa, insbesondere einem reellen P eine reelle t.

Man beachte, wie die vier „uneigentlichen“ Schließungsdreiecke $\Delta(\lambda, \lambda, \lambda')$ des allgemeinen Falles jetzt im Besondern, bei der Schließungslage, als „eigentlich-uneigentliche“ Schließungsdreiecke für die Schließungsfigur eine charakteristische Bedeutung gewinnen.

Nr. 5. Von dem Schließungssatze und Grenzsatze lassen sich bemerkenswerte elementare Anwendungen machen.

Wir beschränken uns hier auf die beiden Fälle von Kreis und Parabel, sowie zweier Kreise. Es liege einmal eine Parabel N_2 und ein Kreis H vor. Mit Hilfe der Theorie der Kreispunkte tritt dann ohne Weiteres der innere Grund für den klassischen Steinerschen Satz zu Tage, daß der Umkreis H irgend eines Umdreiseits der Parabel N_2 stets durch deren Brennpunkt F geht; zugleich gilt aber auch die Umkehrung, und es tritt noch der Grenzsatz hinzu.

Andererseits liege ein Dreieck Δ vor mit seinem Umkreise H und irgend einem seiner drei Ankreise N_2.

Beide Kreise treffen sich stets in zwei reellen Punkten P, P', und haben zwei reelle Tangenten t, t' gemein. Legt man etwa in P die Tangente an N_2, so trifft diese H in einem Restpunkte R, dessen Tangente an H mit t zusammenfällt[7]). Umgekehrt, ist diese Eigenschaft für irgend einen der beiden, als reell vorausgesetzten Schnittpunkte zweier Kreise H, N_2, erfüllt[7]), so befinden

7) In diesem Falle läßt sich die Schließungsbedingung (II′) $S = 0$ in eine einfache Beziehung zwischen den Radien r, ϱ beider Kreise, und deren (innerem) Schnittwinkel φ umsetzen. Bedeutet c die Länge der Zentrale, so hat man: $r(r + 2\varrho) = c^2 = r^2 + \varrho^2 + 2r\varrho\cos\varphi$, also nach Hebung mit ϱ: $\varrho = r\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$. Der Wert von $\frac{\varrho}{r}$ ist zwischen den Grenzen 0 und 4 enthalten; im Besondern ist für $\varphi = \frac{\pi}{2} : \frac{\varrho}{r} = 2$, und für $\varphi = \frac{\pi}{3} : \frac{\varrho}{r} = 1$. In letzterem Falle befinden sich beide Kreise in gegenseitiger Schließungslage. Haben dagegen die beiden

Digitized by Google

sich H und N_2 in Schließungslage, und es gibt ∞^1 Dreiecke Δ, für die H der Umkreis, und N_2 einer der Ankreise ist.

Es sei noch bemerkt, daß der direkte Satz auch elementargeometrisch (wenn auch etwas künstlich) beweisbar ist; dagegen dürfte ein solcher Beweis für die Umkehrung auf Schwierigkeiten stoßen.

Nr. 6. Nunmehr sind noch für den Schließungsfall die ∞^1 Dreiecke $\Delta(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ einfach algebraisch darzustellen.

Auf Grund der Schließungsbedingung (II) $S = 0$ läßt sich die Gleichung von H in die Form kleiden:

$$(3) \qquad H \equiv \begin{vmatrix} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2, & a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2 \\ b_0 s_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2, & b_1 s_0 + b_2 s_1 + b_3 s_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man hier die elementarsymmetrischen Verbindungen σ der drei Argumente $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ ein:

$$\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \lambda\lambda_1\lambda_2 : \lambda\lambda_1 + \lambda\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 : \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 : 1,$$

so läßt sich die Gleichung (3) ersetzen durch die beiden linearen Gleichungen:

$$(4) \quad (a\sigma) \equiv a_0\sigma_0 + \cdots + a_3\sigma_3 = 0, \quad (b s) \equiv b_0\sigma_0 + \cdots + b_3\sigma_3 = 0.$$

Dies ist die gewünschte Darstellung der ∞^1 Dreiecke $\Delta(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$.

Es liegt hier nahe, sich einer geometrischen Abbildung zu bedienen. Deutet man die σ als Koordinaten eines Raumpunktes P — wo dann $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ die Argumente der drei, von P an eine kubische Normkurve N_3 gehenden Ebenen bedeuten —, so wird durch (4) eine Gerade g als Schnitt zweier Ebenen (a), (b) dargestellt; die Punkte von g sind die Bilder der Dreiecke Δ[8]).

Damit ist eine (1,1)-deutige Korrespondenz hergestellt zwischen den ∞^4 Geraden des Raumes und den ∞^4, mit einem festen Kegelschnitte N_2 in Schließungslage befindlichen Kegelschnitte.

Nr. 7. Im Schließungsfalle sind die beiden Kegelschnitte H und N_2 von selbst projektiv auf einander bezogen, indem man jeder Tangente λ von N_2 die Gegenecke (λ_1, λ_2) des Dreiecks $\Delta(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ auf H als Punkt $\mu = \lambda$ zuordnet.

Kreise keinen reellen Schnittpunkt gemein, so muß man sich mit der Schließungsbedingung: $r(r-2\varrho) = c^2$ begnügen, die, wie es scheint, schon bekannt ist. Im Besondern ist für zwei konzentrische Kreise $r = 2\varrho$, und die ∞^1 Schließungsdreiecke werden zu gleichseitigen, eine schon in der griechischen Mathematik vorkommende Figur.

8) Hieraus folgt sofort der klassische Satz von Poncelet: Irgend zwei, einer c_2 einbeschriebene Dreiecke sind einer γ_2 umbeschrieben, und vice versa.

Digitized by Google

Andererseits sind vermöge der Konstruktion in Nrr. 2, 3 beide Kegelschnitte H, N_2 (2,2)-deutig auf einander bezogen. Jeder Tangente λ von N_2 korrespondieren die beiden, zu den Schnittpunkten mit H gehörigen Werte $\mu = \lambda_1$ resp. λ_2, und vice versa, d. h. zwischen λ und μ besteht eine, je quadratische und symmetrische „Schließungskorrespondenz“:

$$C(\lambda, \mu) = 0, \tag{III}$$

die sich sofort hinschreiben läßt, was aber für das Folgende nicht erforderlich ist. Diese Relation (III) besitzt die charakteristische Eigenschaft, daß irgend zwei Lösungen (λ, λ_1), (λ, λ_2) stets eine dritte (λ_1, λ_2) nach sich ziehen; dazu treten von selbst, der Symmetrie halber die drei weiteren Lösungen (λ_1, λ), (λ_2, λ), (λ_2, λ_1). Dies möge geometrisch gedeutet werden. Nimmt man etwas λ und μ als rechtwinklige Punktkoordinaten in einer Hilfsebene $\mathsf{E}(\lambda, \mu)$, so stellt (III) eine elliptische Kurve 4. Ordnung c_4 dar, mit zwei Doppelpunkten in den unendlichfernen Punkten der Koordinatenachsen.

Die Schließungsfigur der beiden Kegelschnitte H, N_2 spiegelt sich dann wieder in einer gewissen ∞^1-Schar von, der c_4 einbeschriebenen Sechsecken.

Es empfiehlt sich indessen, vermöge einer einfachen quadratischen (1,1)-deutigen Punktverwandtschaft, die c_4 in eine elliptische Normalkurve c_3 überzuführen. Den beiden Doppelpunkten der c_4 entsprechen dann zwei feste Zentra u, u' auf c_3, von denen zwei einander zugeordnete Dreistrahlen (Geradentripel) g_r, g_s, g_t; g'_r, g'_s, g'_t ausgehen. Sei u_{rs} der Treffpunkt (g_r, g'_s), so liegen diese sechs Punkte $u_{rs}, \ldots$ auf der c_3, und bilden die ∞^1-Schar der „Schließungssechsecke“; hat man irgend einen der sechs Punkte auf der c_3 willkürlich gewählt, so ist die ganze Figur damit festgelegt.

Abschnitt B.

Rein geometrische Betrachtung der Linearfigur.

Nr. 8. Um die Eigenart der in Nr. 7 einer c_3 einbeschriebenen Linearfigur zu erfassen, ist es erforderlich, die Figur zunächst von der Kurve ganz abzulösen, und sie als rein geometrische Konfiguration innerhalb der Ebene aufzubauen und zu ergänzen; hinterher fügt sich eine zugehörige c_3 von selbst wieder ein.

Im Übrigen werde, der Einfachheit halber, die Beschränkung auf reelle Gebilde festgehalten.

Nr. 9. Man gehe in der Ebene wieder von irgend zwei (getrennten) Zentralpunkten u, u' aus, und lasse von ihnen zwei Drei-

Digitized by Google

strahlen (g_r, g_s, g_t), (g'_r, g'_s, g'_t) ausgehen, mit den sechs Treffpunkten $u_{rs} = (g_r, g'_s)$, usf.; je zwei Gerade mit demselben Index seien einander zugeordnet.

Man bilde das einfache Sechsseit $(g_r, g'_s, g_t, g'_r, g_s, g'_t)$, und fasse es auf als ein Brianchonsches, dem zerfallenden Klassenkegelschnitt (u, u') umbeschriebenes. Die Verbindungsgeraden der drei Paare von Gegenecken: $g''_r(u_{st}, u_{ts})$, $g''_s(u_{tr}, u_{rt})$, $g''_t(u_{rs}, u_{sr})$ treffen sich in einem Punkte u'', der als dritter Zentralpunkt bezeichnet sei. Andererseits betrachte man die acht Punkte u, u', u_{rs} usf. als Grundpunkte eines c_3-Büschels B; dessen neunter Grundpunkt ist eben der Punkt u''. Die neun Punkte und neun Geraden bilden eine Konfiguration (g_3, g_3), indem auf jeder Geraden drei der Punkte liegen, und durch jeden Punkt drei der Geraden gehen.

Eine aufmerksame Betrachtung der Figur lehrt, daß sie sich in drei gleichberechtigte „Zentraldreiecke“: $\Delta(u, u', u'')$, $\Delta_1(u_{rs}, u_{st}, u_{tr})$, $\Delta_2(u_{sr}, u_{rt}, u_{ts})$ zerlegt.

Je zwei der drei Dreiecke liegen dreifach perspektiv zu einander, und die drei Perspektivitätszentra sind die Ecken des dritten Dreiecks.

Die *Kfg* läß sich auch dadurch erzeugen, daß man von zwei, doppelt perspektiven Dreiecken ausgeht (wobei nur keine der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte doppelt auftreten darf); die beiden Dreiecke sind dann auch ein drittes Mal perspektiv.

Die *Kfg* hängt von zehn Konstanten ab. Greift man aus dem Büschel B irgend ein (eigentliches) Individuum als „Grundkurve“ c_3 heraus, so wird man zur Schließungsfigur der Nr. 7 zurückgeführt, nur daß diese jetzt vermöge des Punktes u'' vervollständigt ist. Die Vergleichung läßt überdies erkennen, daß bei vorgegebener Grundkurve c_3 die beiden Ausgangspunkte u, u' auf ihr nicht unabhängig von einander gewählt werden dürfen. (Näheres s. im Abschnitte D.)

Endlich zeigt sich noch, daß vermöge einer (1,1)-deutigen quadratischen Punkttransformation, deren drei Fundamentalpunkte in die Ecken eines der drei Dreiecke Δ fallen, die ganze Figur sich im Wesentlichen reproduziert.

Abschnitt C.
Analytisch-geometrische Entwickelungen.

Nr. 10. Die rein geometrischen Betrachtungen des Abschnittes B lassen sich auch analytisch-geometrisch verfolgen. Es ergeben sich nicht nur neue Beweise für die angegebenen Eigenschaften, sondern es ergeben sich auch neue Sätze.

Digitized by Google

Wir verzichten hier auf eine Wiedergabe der zugehörigen Gleichungen der Geraden, Punkte und c_3 der Figur, und heben nur einige Hauptmomente hervor.

Bei geeignet gewähltem Koordinatensystem werden zunächst die Gleichungen der neun Geraden g_i, g_i', g_i'' $(i = r, s, t)$ aufgestellt und damit die des Inzidenzpunktes u''.

Das c_3-Büschel B setzt man aus zwei möglichst einfachen Partikulärindividuen linear zusammen, die sich in invariante Gestalt bringen lassen. Für sie ist eines der Dreiecke Δ ein „Tangentialdreieck", d. h. die Tangenten in den Ecken gehen zyklisch, im einen oder andern Sinne, jeweils durch eine weitere Ecke. Entsprechend den drei Dreiecken $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ gibt es drei solche Paare partikulärer c_3.

Sodann wird aus dem Büschel B ein symmetrisch normiertes Individuum als Grundkurve c_3 eingeführt, die dann die Rolle der c_3 des Abschnittes A übernimmt. Als Anwendung dieser Entwickelungen erscheinen neue Eigenschaften der Figur. So lege man die Tangenten an den Ecken irgend eines drei Dreiecke $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$, an irgend eine (eigentliche) c_3 des Büschels B, und bestimme deren Restschnittpunkte; diese fallen zusammen mit den Restschnittpunkten der Gegenseiten des Dreiecks.

Ferner liegen die Ecken eines der drei Dreiecke — jeweils für eine gewisse c_3 des Büschels B — dann und nur dann auf einer Geraden, wenn sie in die drei reellen Wendepunkte der Kurve fallen.

Allgemein gilt das Prinzip, daß jede durch eine invariante Besonderheit charakterisierte Eigenschaft der Schließungsfigur eine doppelte Auffassung zuläßt.

Einmal gibt es eine endliche Anzahl von Individuen im Büschel B, für die die Eigenschaft erfüllt ist; andererseits existiert bei vorgegebener Grundkurve eine endliche Anzahl von Ausgangspunktepaaren (u, u'), deren zugehörige Schließungsfigur jene Eigenschaft besitzt.

Abschnitt D.

Transzendente Behandlung der Schließungsfigur.

Nr. 11. Nunmehr knüpfen wir wieder an das Ende des Abschnitts A an, und denken uns, behufs transzendenter Behandlung der der c_3 einbeschriebenen Schließungsfigur in bekannter Weise[9]) auf der Kurve ein elliptisches Integral erster Gattung u, etwa

9) Siehe z. B. A. Harnack, Math. Ann., 9 (1875), p. 1.

Digitized by Google

das Weierstraß' Normalintegral $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$, als Parameter (Argument) ausgebreitet. Sei die reelle Periode mit ω, die reinimaginäre mit $i\omega'$ bezeichnet, und die Konstante des Integrals so normiert, daß einer der drei reellen Wendepunkte das Argument Null erhält. Jedem reellen Punkt des unpaaren Zuges ist (1,1)-deutig ein reeller Wert $u = r$ innerhalb des Intervalles $(0, \ldots \omega)$ zugeordnet; und entsprechend jedem reellen Punkte des Ovales — falls ein solches vorhanden ist — ein Wert von der Form $r + \frac{1}{2} i\omega'$.

Im Übrigen mögen die damaligen Bezeichnungen $u, u', u'', u_{rs}, \ldots$ für reelle Punkte der c_3 auf die jetzigen zugehörigen Parameterwerte übertragen werden. Das Wesentliche der im Folgenden angewendeten Methode besteht darin, daß mit den Integralwerten selbst gerechnet wird, nicht mit den Werten der zugehörigen elliptischen Funktionen $pu, p'u$ (resp. bei Einführung des Jacobischen Normalintegrales von snu, cnu, dnu).

Diese Funktionen ließen sich zwar jederzeit auf Grund des Additionstheoremes einführen, was aber die Einfachheit des Formelapparates nur beeinträchtigen würde.

Nr. 12. Als Grundlage dient das Abelsche Schnittpunkttheorem für die c_3. Danach drückt sich das Kriterium dafür, daß $3n$ Punkte $u_1, u_2, \ldots u_{3n}$ zugleich einer Kurve $n$ter Ordnung c_n angehören, durch die Kongruenz aus:

$$(\mathrm{IV}_n) \qquad u_1 + u_2 + \cdots + u_{3n} \equiv 0^{10}) \pmod{\text{Per.}},$$

wo der Zusatz „mod. Per." (d. h. bis auf ganzzahlige Vielfache der Perioden) weiterhin der Bequemlichkeit halber unterdrückt werde. Im Besondern gilt für drei Punkte einer Geraden c_1 (drei „incidente" Punkte):

$$(\mathrm{IV}_1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0.$$

Somit erhalten die drei reellen Wendepunkte die Argumente:

$$(5) \qquad w \equiv 0, \quad w' \equiv \frac{\omega}{3}, \quad w'' \equiv \frac{2\omega}{3} \equiv -\frac{\omega}{3};$$

sie liegen also, wie bekannt, auf einer Geraden.

Nr. 13. Auf Grund von (IV_1) spiegelt sich die am Ende von Abschnitt A betrachtete Schließungsfigur der 2.3 Geraden g_i, g_i' $(i = r, s, t)$, nebst den acht Punkten $u, u', u_{rs}, \ldots$ wieder in einem System von sechs linearen Kongruenzen, wo u und u' als

10) Hierbei hat man sich die Konstante des Integrales u so normiert zu denken, daß irgend einer der drei reellen Wendepunkte das Argument Null erhält.

Digitized by Google

gegebene, die $u_{rs}, \ldots$ als Unbekannte aufgefaßt seien:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} g_r = u_{rs} + u_{st} \equiv -u, & g_r' = -u_{sr} - u_{tr} \equiv u', \\ g_s = u_{sr} + u_{st} \equiv -u, & g_s' = -u_{rs} - u_{ts} \equiv u', \\ g_t = u_{tr} + u_{ts} \equiv -u, & g_t' = -u_{rt} - u_{st} \equiv u'. \end{cases}$$

Hier bedeuten die Buchstaben g_i, g_i' zugleich die linksstehenden Summen. Nun verschwindet ersichtlich der Ausdruck $\Sigma g_i + \Sigma g_i'$ identisch.

Die Addition der sechs Kongruenzen, die ein linear abhängiges System [11]) bilden, liefert somit die weitere:

$$\text{(VI)} \qquad 3u' \equiv 3u.$$

Hieraus folgt zunächst, daß die Kongruenzen (V) im Allgemeinen, d. h. solange (VI) nicht erfüllt ist, keine Lösung für die $u_{rs}, \ldots$ ergeben; im Besondern aber, wenn u und u' gemäß der Bedingung (VI) gewählt sind, ∞^1 solche: bei beliebiger Annahme irgend eines der $u_{rs}, \ldots$ sind alsdann die übrigen eindeutig bestimmt.

Andererseits hat die Kongruenz (VI), da ein Zusammenfallen der Punkte u und u' ausgeschlossen war, bei gegebenem u für u' nur zwei reelle Punkte als Lösungen, die mit u' und u'' bezeichnet seien:

$$\text{(VI')} \qquad u' \equiv u + \frac{\omega}{3}, \quad u'' \equiv u - \frac{\omega}{3}.$$

Damit erfährt die in Abschnitt B aufgestellte Behauptung, daß in der, der c_3 einbeschriebenen Schließungsfigur die beiden Ausgangszentra u und u' von einander abhängig sein müssen, ihre Bestätigung.

Hat man den einen der beiden Punkte, etwa u beliebig gewählt. so existieren für den andern noch zwei gleichberechtigte Lagen, das sind eben die beiden Punkte u' und u'' in (VI). Wählt man irgend einen von ihnen, etwa den ersteren, als den zweiten Zentralpunkt u', so erweist sich sofort der andere, als der dritte Zentralpunkt u'', der Inzidenzpunkt der drei Geraden $g_r''(u_{st}, u_{ts})$, $g_s''(u_{rt}, u_{tr})$, $g_t''(u_{rs}, u_{sr})$.

Die beiden Punkte u' und u'' lassen sich, bei gegebenem u,

11) Derartige „Schließungserscheinungen" treten bereits in der elementaren Algebra und analytischen Geometrie auf. Liegt z. B. ein System von drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten x, y, z vor: $D_i = d_i$ $(i = 1, 2, 3)$, wo $D_i \equiv a_i x + b_i y + c_i z$, mit der Sondereigenschaft $(abc) = 0$, so haben die Gleichungen keine (sc. endliche) Lösung gemein; wenn aber *eine*, — wofür das Kriterium lautet: $(dab) \equiv (dbc) \equiv (dca) = 0$ — so auch ∞ viele. Geometrisch liegt der Fall von drei Ebenen vor, deren Schnittachsen parallel sind.

Digitized by Google

mittels der c_3[12]) und ihrer drei reellen Wendepunkte (5), leicht linear konstruieren. Denkt man sich die drei Wendepunkte (5) zyklisch geordnet, so verbinde man u mit irgend einem der Wendepunkte durch eine Gerade, und bestimme deren Restschnittpunkt; letzteren verbinde man mit dem nächstfolgenden Wendepunkt, so ist der neue Restschnittpunkt stets der Punkt u', und bei Umkehrung des zyklischen Sinnes, stets der Punkt u''. Nimmt man zu dieser Figur noch die drei Punkte $-u, -u', -u''$ hinzu, so liegt ein besonderer Fall von drei Zentraldreiecken

$$(u, u', u''),\ (-u, -u', -u''),\ (w, w', w'')$$

vor, indem das letzte in drei inzidente Punkte ausgeartet ist (s. oben).

Nr. 14. Die Gleichberechtigung der drei Zentraldreiecke $\Delta(u, u', u'')$, $\Delta_1(u_{rs}, u_{st}, u_{tr})$, $\Delta_2(u_{sr}, u_{rt}, u_{ts})$ bestätigt sich durch die Regel: Greift man aus jedem der drei Argumententripel irgend eines heraus, und vermehrt es um $\frac{\omega}{3}$ resp. $-\frac{\omega}{3}$, so ergeben sich gerade die beiden andern Werte des Tripels. Diese Regel ist eine ersichtliche Verallgemeinerung der in (5) für die drei reellen Wendepunkte angegebenen.

Die dreifache Perspektivität je zweier der drei Dreiecke, mit den Perspektivitätszentren als Ecken des dritten, möge noch durch das folgende Schema erläutert werden, wo je drei Punkte einer Kolonne gemäß (IV_1) inzident sind, und auf einer der Geraden g, g', g'' liegen:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \Delta(u, u', u''); & \Delta(u, u', u''); & \Delta(u, u', u''); \\ \Delta_1(u_{rs}, u_{tr}, u_{st}); & \Delta_1(u_{st}, u_{rs}, u_{tr}); & \Delta_1(u_{tr}, u_{st}, u_{rs}); \\ \Delta_2(u_{rt}, u_{sr}, u_{ts}); & \Delta_2(u_{sr}, u_{ts}, u_{rt}); & \Delta_2(u_{ts}, u_{rt}, u_{sr}); \\ g_r, g_r', g_r''; & g_s, g_s', g_s''; & g_t, g_t', g_t''. \end{cases}$$

Besitzt die c_3 ein Oval, so sind unschwer die verschiedenen Möglichkeiten zu erkennen, wie sich die Ecken der drei Dreiecke auf die beiden Züge verteilen.

Nr. 16. Auf diese Weise lassen sich auch die weiteren Eigenschaften der Schließungsfigur, soweit sie der Geometrie *auf* der c_3 angehören, aus dem Kongruenzensystem (V) ablesen. So liegen die neun Punkte der Figur gemäß (IV_3) auf einer zweiten c_3, und sind daher die Grundpunkte eines c_3-Büschels B. Ferner ergibt

12) Derartige „elliptisch-lineare" Konstruktionen hat der Verfasser systematisch für Restpunkte gewisser Berührungsgebilde von elliptischen C_n in einem S_{n-1} verwendet: Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 744.

Digitized by Google

sich der in Abschnitt C aufgestellte Satz: „Legt man in jeder Ecke irgend eines der drei Zentraldreiecke die Tangente an die Grundkurve, so fällt deren Restschnittpunkt zusammen mit dem der jeweiligen Gegenseite".

Dazu tritt jetzt der weitere Satz:

„Die neun Restschnittpunkte der neun Seiten der drei Zentraldreiecke bilden wiederum eine Konfiguration von demselben Charakter, wie die ursprüngliche. Dieser Prozeß läßt sich beliebig oft wiederholen".

Endlich bestätigt sich auch, daß die drei Ecken irgend eines der drei Zentraldreiecke dann und nur dann inzident sind, wenn sie in die drei reellen Wendepunkte fallen.

Digitized by Google

Mitglieder-Verzeichnis.

A. Persönliche Mitglieder.

Die mit einem Stern versehenen Mitglieder haben sich durch einmalige Zahlung nach § 4 der Satzung abgelöst.

Ackermann-Teubner, Hofrat Dr. Dr.-Ing. E. h. A., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
*Anér, H., Major, Teknisk Tidskrift, Tegnérlunden 9, Stockholm (Schweden).
Apt, Studienrat Dr. Fr., Berlin-Neukölln, Pflügerstr. 59 I.
Aschert, Bankdirektor a. D. H., Berlin W., Derfflinger Str. 3,
Baldus, Prof. Dr. R., Karlsruhe i. B., Mozartstr. 8.
Barneck, Privatdozent Dr. A., Berlin NW. 87, Tile Wardenbergstr. 25 I.
Beck, Prof. Dr. H., Bonn, Lennéstr. 36.
Becker, Studienassessor W.. Berlin-Neukölln, Weserstr. 176.
Berger, R., ao. wiss. Hilfsarb. am Meteorol.-Magnet. Observatorium, Potsdam, Telegraphenberg.
Bergmann, Dipl.-Ing., Dr. Stefan, Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.
Bernays, Prof. Dr. P., Göttingen, Kirchweg 6 I.
Bernstein, Prof. Dr. F., Göttingen, Lotzestr. 33.
Betz, O., Korvettenkapitän a. D., Berlin-Schmargendorf, Salzbrunnerstr. 58/60.
Bieberbach, Prof. Dr. L., Berlin-Dahlem, Gelfertstr. 16.
Birck, Dr. phil. Otto, Potsdam, Astrophysikalisches Observatorium.
Birkhoff, Prof. Dr. G. D.. 22 Craigie Street, Cambridge, Mass. (U.S.A.).
Blaschke, Prof. Dr. W., Hamburg, Math. Seminar der Universität, Rothenbaumchaussee 21.
Blohmer, Studienrat F., Berlin-Südende, Hermannstr. 3.
Blumenthal, Prof. Dr. O., Aachen, Rütscherstr. 38.
Bochnor, Dr. S., München, Unperer Str. 10.
Böhler, Landmesser H., Berlin-Steglitz, Schloßstr. 49.
Böhmer, Prof. Dr. P. E., Dresden-A., Ludwig Richterstr. 22.
Boelk, Studienrat Dr. P.. Berlin-Charlottenburg, Wallstr. 54.
Bollé, Dr. E., Berlin-Charlottenburg 2, Fraunhoferstr. 17.
Bornitz, Studienrat F., Berlin-Halensee, Schweidnitzer Str. 5.
v. Bortkiewicz, Prof. Dr. L., Berlin-Halensee, Johann-Sigismundstr. 2.
Brauer, Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 57.
v. Brill, Prof. A., Tübingen, Eugenstr. 3.
Brun, Prof. V., Trondhjem (Norwegen).
Burg, Oberstudiendirektor Dr. R., Berlin-Charlottenburg, Sybelstr. 2.
Byk, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 13.
Carathéodory, Prof. Dr. C., München, Universität.
Cauer, Dr.-Ing. W., Göttingen, Friedländerweg 35.
Cohn, Studienrat Dr. A., Berlin-Waidmannslust, Waidmannstr. 119.
Cohn-Vossen, Dr. Stephan, Göttingen, Friedländerweg 13.
Cranz, GRR., Prof. Dr. C., Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 32 a.
Cremer, Dr. H., Leipzig S. 3, Steinstr. 65 I.
Degosang, Studienrat, Berlin-Karlshorst, Königswinterstr. 20.
Denizot, Prof. Dr. A., Posen, Physikalisches Institut der Universität.
Dingeldey, Prof. Dr. F., Darmstadt, Hoffmannstr. 41.
Dörge, Privatdozent Dr. K., Köln, Aduchtstr. 9.
Dreetz, Studienrat W., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 65.

Digitized by Google

Duarte, Prof. F. J., z. Zt. Genf (Schweiz), Rue de Rhone 39.
Dubislav, Privatddozent Dr. W., Berlin-Friedenau, Goßlerst. 6.
Duffing, Oberingenieur G., Hamburg 23, Landwehrstr. 16.
Dumas, Prof. Dr. G., Béthusy-Lausanne, Cabrières Av. Mt Charmant (Schweiz).
Ebeling, Direktor Dr. A., Berlin-Charlottenburg 9, Schwarzburg-Allee 14.
Ebner, Studienrat M., Berlin-Karlshorst, Kaiser Wilhelmstr. 16.
Eisner, Regierungsbaumeister Dipl.-Ing. F., Berlin-Westend, Akazien-Allee 14.
Emde, Prof. Dr.-Ing. E. h. F., Stuttgart, Moserstr. 14.
*Emmerich, A., Rudolstadt, Georgstr. 5.
Engel, Prof. Dr. F., Gießen, Ludwigsplatz 9.
Epstein, Prof. Dr. P., Frankfurt a. M., Schöne Aussicht 7.
Fejér, Prof. Dr. L., Budapest V (Ungarn), Falk Miksa Gasse 15.
Feigl, Privatdozent Dr. G., Berlin-Lankwitz, Kaiser Wilhelmstr. 139.
Finsler, Prof. Dr. P., Zürich (Schweiz), Schanzengasse 29.
Finzel, Dr. A., Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 189.
Fischer, Studienrat P. B., Berlin-Lichterfelde-W., Drakestr. 36 I.
Fladt, Studienrat Dr. K., Vaihingen a. F. bei Stuttgart, Christofstr. 18.
Fleck, San.-Rat Dr. A., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 22.
Föttinger, Prof. Dr.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg, Techn. Hochschule EB 205.
Fraenkel, Prof. Dr. A., Kiel, Niemannsweg 36.
*Franck, Dr. P., Hamburg, Wolfshagen 18 I.
Frank, Prof. Dr. Ph., Prag II, Vinicna 3.
Freundlich, Dr. E. F., Astrophysik. Observatorium, Potsdam, Telegraphenberg.
Fuchs, Prof. Dr. R., Berlin-Halensee, Ringbahnstr. 7.
Fujiwara, Prof. M., Universität Sendai (Japan).
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Wien XVIII, Messerschmidtgasse 45.
Galle, GRR., Prof. Dr. A., Potsdam, Neue Königstr. 103.
Gebhardt, Studienrat F., Berlin-Schlachtensee, Seestr. 44.
Gruschke, Oberingenieur Dr. G., Berlin-Wilmersdorf, Hildegardstr. 24.
Grüß, Dr.-Ing. G., ständiger Assistent an der Techn. Hochschule, Berlin NW. 87, Tile Wardenbergstr. 28.
Gumbel, Dr. E., Heidelberg, Beethovenstr. 39.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Berlin-Tempelhof, Sachsenring 22.
Haenzel, Dr.-Ing. G., Berlin-Wittenau, Oranienburger Str. 273.
Hamburger, Prof. Dr. H., Köln a. Rh., Alteburger Wall 18.
Hamel, Prof. Dr. G., Berlin W. 30, Eisenacherstr. 35.
Hammerstein, Prof. Dr. A., Berlin N. W. 87, Klopstockstr. 52 bei Tichauer.
*Haniel, Maler F., Düsseldorf, Goldsteinstr. 27.
Happel, Prof. Dr. H., Breslau XVI, (Zimbel), Friedrich Ebertstr. 37.
Harnack, Studienrat Dr. A., Kiel-Wik, Seeblick 3 I.
Hausdorff, Prof. Dr. F., Bonn a. Rh., Hindenburgstr. 61.
Haußner, GHR. Prof. Dr., Jena, Stoystr. 1.
Heegaard, Prof. Dr. P., Lilleaker, box 105, Norwegen.
Hellinger, Prof. Dr. E., Frankfurt a. M., Marbachweg 339.
Hensel, GRR. Prof. Dr. K., Marburg (Lahn), Breiter Weg 7.
Henry, Dr., Berlin-Charlottenburg, Nürnbergerstr. 64.
Hertwig, GRR. Prof. Dr.-Ing. E. h., Berlin-Charlottenburg 2, Kurfürstenallee, Baracke 15.
Herzberger, Dr. M., Wetzlar, Goethestr. 15.
Heun, GRR. Prof. Dr. K., Karlsruhe (Baden), Klauprechtstr. 33.
Hinrichs, Dr., Berlin-Wilmersdorf, Brandenburgische Str. 18.
Hoff, Prof. Dr.-Ing., Berlin-Cöpenick, Gutenbergstr. 2.
Hoffmann, Prof. Dr. C., Ravensburg (Württ.), Schützenstr. 9.
Holtze, Oberlehrer Dipl.-Ing. H., Magdeburg, Königstr. 31.
Holzer, Dr. L., Assistent a. d. Technischen Hochschule in Graz.
Hopf, Dr. E., Berlin-Friedenau, Handjerystr. 53.
Hopf, Privatdozent Dr. H., Berlin C. 2, Mathematisches Seminar der Universität.
Hurwitz, Frl. Dr. Lotte, Studienrat, Berlin-Wilmersdorf, Sigmaringerstr. 23.
v. Ignatowsky, Dr. W., Leningrad, Demidow Perenlok 10, Wohnung 8.
Jacobsthal, Prof. Dr. E., Berlin W. 62, Kurfürstenstr. 78.
Jacobsthal, Studiendirektor Dr, W., Berlin SW. 47, Yorkstr. 89.

Digitized by Google

Jaenichen, Studienrat Dr. W.. Berlin NW. 87, Elberfelderstr. 2.
Jasse, E., Oberingenieur, Mülheim-Ruhr, Seilerstr. 13.
Jolles, GRR. Prof. Dr. St., Berlin-Halensee, Kurfürstendamm 130.
Jonas, Studienrat Dr. H. J., Berlin-Steglitz, Belfortstr. 41.
Kienitz, Studienrat M., Berlin-Charlottenburg, Soorstr. 29 II.
Knaust, Studienreferendar F., Berlin-Charlottenburg 1, Schulstr. 19 v. I. Tr. r.
Kneser, GRR. Prof. Dr. A., Breslau XVI, Hohenlohestr. 11.
Knopp, Prof. Dr. K., Tübingen, Neckarhalde 55.
Koebe, Prof. Dr. P., Leipzig, Fockestr. 9.
Koebke, Oberingenieur Dr. E., Berlin-Charlottenburg 5, Lietzensee-Ufer 1.
Koepsel, Dr. A., Berlin-Friedenau, Kaiserallee 99/100.
Köhler, Studienassessor O., Berlin-Tempelhof, Hohenzollernkorso 34 g.
Kopff, Prof. Dr. A., Berlin-Dahlem, Altensteinstr. 40.
Korn, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 25.
*Koschmieder, Prof. Dr. L., Brünn C. S. R., Landwirtschaftsgasse 36.
Krafft, Privatdozent Dr. M., Marburg/Lahn, Savignystr. 7.
Kramer, Studiendirektor Dr., Alt-Döbern N.-L., Staatl. Aufbauschule.
v. Krbek, Dr. F., Berlin NW. 7, Dorotheenstr. 2.
Kreuter, Regierungsrat G., Berlin-Friedenau, Odenwaldstr. 26.
Krohs, Studienrat Dr. G., Berlin NO, 55, Greifswalderstr. 25.
Kubota, Prof. T., Sendai (Japan).
v. Kuhl, Fräulein Dr. H., Studienassessorin, Berlin-Steglitz, Breitestr. 36.
Kühn, Dr. L., Berlin-Charlottenburg, Kaiser Friedrichstr. 103.
Kullrich, Realgymnasialdirektor Dr. E., Berlin-Tempelhof, Kaiserin Augustastr. 20.
Küpfmüller, Oberingenienr K., Berlin-Friedenau, Kranachstr. 37.
Lamla, Oberschulrat Dr. E., Berlin-Charlottenburg 2, Schlüterstr. 12 III.
Landau, Prof. Dr. E., Göttingen, Herzberger Landstr. 48.
Lasker, Dr. E., Berlin-Wilmersdorf, Aschaffenburgerstr. 6 a.
Lechner, Dr. G., Berlin-Eichkamp, Königsweg 114.
Lemke, Studienrat Dr. H., Berlin-Wilmersdorf, Wegenerstr. 10/11.
Levi-Civita, Prof. Dr. T., Rom 25 (Italien), Via Sardegna 50.
Lichtenstein, Prof. Dr. Dr.-Ing. L., Leipzig, Großgörschenstr. 3.
Lietzmann, Oberstudiendirektor Dr. W., Göttingen, Calsowstr. 18.
Linsenbarth, Studienrat Dr. H., Berlin N. 54, Lothringerstr. 76.
Löwner, Prof. Dr. K., Köln a. Rh., Brüsselerstr. 20 II.
Loewy, Prof. Dr. A., Freiburg i. B., Thurnseestr. 20.
Lorenz, Dr. P., Berlin W. 57, Culmstr. 3 p.
Lorey, Prof. Dr. W., Oberstudiendirektor der öff. Handelslehranstalt u. Dozent am Inst. f. Versicherungswissenschaft d. Universität Leipzig, Fockestr. 7.
Loria, Prof. Dr. G., Genua (Italien), Piazza Manin 41.
Ludwig, Prof. Dr. W., Dresden-A., Kaitzerstr. 21.
Mann, Prof. Dr.-Ing. L., Breslau, Hobrechtufer 15.
Martens, Prof. Dr. F. F., Berlin NW. 87, Hansa-Ufer 4.
Matthée, Direktor der staatlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht, Berlin W. 35, Potsdamer Str. 135.
*Meder, Prof. A., Riga, Schulenstr. 19 W. 3.
Mehmke, Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. R., Degerloch-Stuttgart, Löwenstr. 102.
Meier, Zivilingenieur E., Taubenmühle bei Leichholz (Neumark).
Meth, Studienrat Dr. P., Berlin-Charlottenburg, Königin Luisestr. 9.
Metzner, Ministerialrat Prof. Dr., Berlin-Dahlem, Königin Luisestr. 12.
Meyer, GRR. Prof. Dr. F., Königsberg(Pr.), Villenkolonie Maraunenhof, Hoverbeckstr. 13.
Meyer-Wülfing, Dr. phil., Berlin N. 54, Lothringerstr. 80.
v. Mises, Prof. Dr. R., Berlin NW. 87, Siegmundshof 9.
Moeske, Studienrat P., Berlin-Pankow, Hartwigstr. 29.
Moore, Prof. Dr. E. H., University of Chicago, Chicago Ill. (U.S.A.).
Mühlendyck, Dr. O., Berlin-Charlottenburg, Pestalozzistr. 87, Portal II.
Müller, Prof. Dr. Conrad H., Hannover, Brahmsstr. 4.
Müntz, Dr. Ch., Nikolassee (Wannseebahn), Gerkrathstr. 5.
Nachtsheim, Studienrat A., Berlin-Wilmersdorf, Mannheimerstr. 9 a.

Digitized by Google

Nakajima, S., Muyakomura, Shikigam Navaken (Japan).
Neiß, Oberstudienrat Dr. F., Berlin-Charlottenburg 5, Friedrich Karlplatz 16.
Neuendorff, Prof. Dr. R., Kiel, Holtenauer Str. 130.
Nörlund, Prof. Dr. N. E.. Kopenhagen (Dänemark), Malmögade 8.
Obrechkoff, Prof. M., Dozent am Mathem. Institut, Sofia, S. Stefanosstr.
Oettinger, Dr. E., Berlin W. 15, Lietzenburgerstr. 7.
Opitz, Prof. Dr. H., Berlin SW. 48, Wilhelmstr. 143.
Oseen, Prof. C. W., Upsala (Schweden).
*Ostrowski, Prof. Dr. A., Basel (Schweiz), Universität (Mathem. Seminar).
Papperitz, GRR. Prof. Dr. E., Freiberg i. S., Leipzigerstr. 8.
*Peters, Studienrat J., Köln-Nippes, Niehler Kirchweg 147.
Petzoldt, Prof. Dr., Berlin-Spandau, Wröhmännerstr. 6.
Pfeiffer, Prof. Dr. F., Stuttgart, Moltkestr. 130.
Pfeiffer, Prof. Dr. G. W., Kiew (Ukraine), Korolenkostr. 5.
Piefke, Studienrat Walter, Berlin-Charlottenburg, Kaiserdamm 96.
Pollaczek, Dr. F., Reichspostzentralamt, Berlin-Tempelhof, Schönebergerstr. 11—15.
Pollaczek, Frau Dr. H., Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.
Pólya, Prof. Dr. G., Zürich (Schweiz), Büchnerstr. 1.
Popoff, Prof. Dr. Kyrill, Sofia, General Parenssoffstr. 35.
Prandtl, Prof. Dr., Göttingen, Calsowstr. 15.
Prange, Prof. Dr. G., Hannover, Engelbostelerdamm 58.
Prüfer, Dr. H., Münster, Kinderhauser Str. 16.
Rademacher, Prof. Dr. H., Breslau, Tiergartenstr. 123.
Reißner, Prof. Dr.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg 9, Mohrungen Allee 4, Kolonie Heerstraße.
Remak, Dr. R., Berlin-Lichterfelde-West, Manteuffelstr. 23 I.
Rembs, Studienrat Dr. E., Berlin-Friedenau, Lagesstr. 5 I.
Respondek, Patentanwalt Dr. G., Berlin-Halensee, Auguste Victoriastr. 5.
Rey, Prof. Dr. J., Madrid, Universität.
Ribeiro, Luiz F., Pernambuco (Brasilien) Rua Augusta 456.
Riesz, Prof. Dr. F., Szegedin (Ungarn), Dugonics-tér 13.
Riesz, Prof. Dr. M., Lund (Schweden), Universität
Rogowski, Prof. Dr.-Ing. W., Aachen, Techn. Hochschule.
Roloff, H., Telegr.-Praktikant, Berlin-Tempelhof, Schönebergerstr. 11—15.
Roschlau, Studienassessor F., Berlin-Wilmersdorf, Bruchsaler Str. 7.
Rosenthal, Prof. Dr. A., Heidelberg, Blumenthalstr. 7.
Rothe, Frau Dr. H., Breslau 16, Sternstr. 128.
Rothe, Prof. Dr. R., Berlin-Wilmersdorf, Trautenaustr. 16.
Rotth, Oberingenieur A., Berlin W. 35, Genthinerstr. 17.
Rückle, Dr. G.
Ruhm, Prof. G., Bonn, Blücherstr. 26.
Sadowski, Dr.-Ing. M., Berlin-Charlottenburg, Saldernstr. 2.
Salkowski, Prof. Dr. E., Neubabelsberg bei Berlin, Odinstr. 6.
Schauffler, R., Regierungsrat, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter im auswärtigen Amt, Berlin-Friedenau, Bornstr. 1, Seiteneingang.
Scheffers, GRR. Prof. Dr. G., Berlin-Dahlem, Willdenowstr. 40.
Schings, Studienassessor A., Solingen (Rhld.), Schlickerweg 8.
Schlegel, Studienrat M., Berlin-Friedenau, Goßlerstr. 24.
Schlesinger, Prof. Dr. L., Gießen, Walltorstr. 48.
Schleusner, Dipl.-Ing. A., Recklinghausen.
Schmeidler, Prof. Dr. W., Breslau, Novastr. 15.
Schmidt, GRR. Prof. Dr. A., Potsdam, Telegraphenberg.
Schmidt, Prof. Dr. Erhard, Berlin NW., Altonaerstr. 30.
Schnee, Prof. Dr. W., Leipzig, Universität.
Schneider, Studienrat Dr. E., Berlin-Steglitz, Rüsternstr. 13.
Schneider, Reichstagsstenograph R., Berlin-Steglitz, Fritschstr. 7.
Schotte, Studienrat Dr. V., Berlin W. 57, Elsholzstr. 3.
Schottky, Geheimrat Prof. Dr. F., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 12a.
Schrutka, Edler von Rechtenstamm, Prof. Dr. L., Wien, Onno Kloppstr. 8.

Digitized by Google

Schülke, Oberstudiendirektor i. R. A., Berlin-Tempelhof, Albrechtstr. 98.
Schur, Prof. Dr. I., Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.
Seeliger, Prof. Dr. R., Greifswald, Loitzerstr. 43/44.
*Seliwanow, Prof. Dr. D., Klanovice n Prahy, Černého ulice, č 21 (Tschechoslovakei).
220 Shoda, K., Berlin-Wilmersdorf, Südwestkorso 18, bei Frau Riese.
Simons, Studienrat W., Berlin-Schmargendorf, Sulzaerstr. 14.
Singer, Dr. O., Berlin NW. 87, Levetzowstr. 13 a.
Skutsch, Oberregierungsbaurat Prof. Dr.-Ing. R., Eisenbahn-Zentralamt, Berlin W. 35, Hallesches Ufer 35/36.
Slaby, Dipl.-Ing. R., Berlin-Charlottenburg, Sophienstr. 33.
Sommer, Prof. Dr. J., Danzig-Langfuhr, Johannistal 2.
Spielrein, Prof. Dipl.-Ing. J., Moskau, Taganka, Nischnaja Raditschewa 10.
Stein, Dr. Joh., Altona a. E., Lessingstr. 30 p.
Steinbacher, Studienrat Dr. F., Friedrichshagen bei Berlin, Waldowstr. 19.
Straßmann, Dr. R., z. Zt. Sanatorium Agra bei Lugano (Schweiz).
230 Strelitz, Fräulein P., Berlin W 35, Am Karlsbad 26, bei Frau Goldenring.
Stübler, Prof. Dr. E., Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 96.
Study, GRR. Prof. Dr. E., Bonn, Argelanderstr. 126.
Süß, Privatdozent Dr. W., Greifswald, Karlsplatz 3.
Szász, Prof. Dr. O., Frankfurt a./M., Kettenhofweg 99 I.
Szegö, Prof. Dr. G., Königsberg (Pr.), Universität.
Tauber, Prof. Dr. A., Wien IV, Karlsgasse 18.
Thürmel, Oberingenieur Dr. E., Siemens u. Halske, A.-G., Wernerwerk, Berlin-Siemensstadt.
Timerding, Prof. Dr. H. E., Braunschweig, Kasernenstr. 23.
*Tietze, Prof. Dr. H., München, Lessingstr. 3.
240 Toeplitz, Prof. Dr. O., Bonn, Coblenzerstr. 121.
Trefftz, Prof. Dr. E., Dresden, Nürnberger Str. 31 I.
Tropfke, Oberrealschuldirektor GStR. Dr. J., Berlin NW. 87, Zwinglistr. 2.
Tschakaloff, Prof. L., Sofia (Bulgarien), Boulevard Skobeleff 13.
Umlauf, Prof. Dr. K., Bergedorf, Bismarckstr. 33.
Unger, Dr. W., Berlin W., Friedrich Wilhelmstr. 26.
Vogler, GRR. Dr.-Ing. E. h. Prof. Dr. Ch. A., Berlin W. 10, Kaiserin Augustastraße 80.
*Volterra, Prof. Dr. Vito, Senatore del Regno, Rom (Italien), Via in Lucina 17.
Wagner, Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. K. W., Berlin-Wilmersdorf, Güntzelstr. 9.
Walther, Prof. Dr. A., Darmstadt, Mathem. Institut der Techn. Hochschule.
250 Weber, Studienrat W.. Berlin-Schöneberg, Bennigsenstr. 12.
Weinstein, Privatdozent Dr. A., Breslau, Mathematisches Seminar der Universität.
Weiß, Privatdozent Dr. E. A., Bonn a. Rh., Endenicher Allee 20.
Weiß, Studienrat H., Berlin-Lichterfelde, Rankestr. 70.
Weltzien, Studienrat Dr. C., Zehlendorf (Wannseebahn), Prinz Handjerystr. 3.
Wenk, Studienrat W., Berlin N. 58, Schönhauser Allee 60.
Weyl, Prof. Dr. H., Zürich, Carmenstr. 23.
Wieleitner, Oberstudiendirektor Dr. H., München 2, SO. 5, Müllerstr. 7.
Willers, Prof. Dr. Fr., Freiburg (Sa.), Goethestr. 2.
Winkelmann, Prof. Dr. M., Jena, St. Jacob 22.
260 Witt, Prof. Dr. G., Berlin NW. 21, Crefelderstr. 18.
Wöhlermann, Pfarrer, Berlin-Neukölln, Hermannstr. 93/94.
Wolff, RR. Dr. Hans, Neubabelsberg, Luisenstr. 10.
Wolff, Dr. Th., Schriftsteller, Berlin-Friedenau, Kaiser-Allee 79.
Zacharias, Studienrat Dr. M., Berlin NW. 52, Melanchthonstr. 27.
Zastrow, K., Berlin-Steglitz, Sedanstr. 9.
266 Zühlke, Oberschulrat Prof. Dr. P., Cassel-Wilhelmshöhe, Kaiser Friedrichstr. 2.

Digitized by Google

B. Korporative Mitglieder.

Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft, Direktion, Berlin NW. 87. Huttenstr. 12—16.
Telephonfabrik A.-G. vorm. J. Berliner, Berlin-Steglitz, Luisenstr.
Felten & Guilleaume Carlswerk A.-G.. Köln-Mülheim.
Gesellschaft für drahtlose Telegraphie (Telefunken), Berlin SW. 11, Hallesches Ufer 10/12.
Porzellanfabrik Hermsdorf, Hermsdorf S.-A.
Siemens & Halske A.-G., Wernerwerk, Berlin-Siemensstadt.
Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H., Berlin-Siemensstadt.
Julius Springer, Verlagsbuchhandlung, Berlin W. 9, Linkstr. 23/24.
Carl Zeiss, Jena.
Elektrotechnischer Verein, E. V., Berlin W. 35, Potsdamer Str. 118a.
Mathematisches Seminar der Universität Berlin.
Institut für angewandte Mathematik an der Techn. Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg.
Institut für Technische Hydro- und Aerodynamik, sowie Störungsmaschinen, Berlin-Charlottenburg, Techn. Hochschule EB 205.
Mathematisches Seminar der Universität Bonn.
Mathematisches Seminar am Friedrichs-Polytechnikum, Cöthen (Anhalt).
Mathematisches Institut der Universität Göttingen.
Mathematisches Institut der Universität Leipzig, Talstr. 35.
Mathematisches Seminar der Universität Münster.
Mathematisches Seminar der Techn. Hochschule Dresden.
Bayerische Staatsbibliothek, München, Ludwigstr. 23.
Hauptbücherei der Technischen Hochschule, Stuttgart.
Bibliothek der Techn. Hochschule zu Berlin, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstr. 171.
Bibliothek der Techn. Hochschule Fridericiana, Karlsruhe.
Universitätsbibliothek Tübingen, Tübingen.
Mathematisches Institut der Universität Jena.
Hochschulbibliothek Darmstadt.
Staats- und Universitätsbibliothek zu Hamburg, Hamburg 1, Speersort.
Universitätsbibliothek in München, München, Ludwigstr. 17 II.
Universitätsbibliothek in Basel.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXVIII. JAHRGANG

Gedruckt mit Unterstützung der Preußischen Akademie der Wissenschaften

1. STÜCK

INHALT:

	Seite
Johann Heinrich Lambert. Von **W. Lorey**	2—27
250. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 31. Oktober 1928	1

1929

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

7) Alle Zuschriften, welche den Inhalt der Sitzungsberichte betreffen, sind zu richten an den derzeitigen Schriftleiter, Herrn **Prof. Dr. Ernst Jacobsthal, Berlin W. 62, Kurfürstenstraße 78.**

Mitteilungen:

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten entweder an den Schriftführer oder an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Obersekretär M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse und nicht an die Adresse des Schriftführers zu senden.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

250. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 31. Oktober 1928.

Vorsitzender: zunächst Herr Bieberbach; nach der Wahl des neuen ersten Vorsitzenden Herr Korn.

Anwesend: 40 Mitglieder und Gäste.

Zu Beginn der Sitzung gedenkt Herr Bieberbach des schweren Verlustes, den die Berliner Mathematische Gesellschaft durch den Tod ihres alten Mitgliedes E. Steinitz erlitten hat, und würdigt die großen wissenschaftlichen Verdienste des Heimgegangenen. Die Anwesenden ehren den Verstorbenen dadurch, daß sie sich von ihren Sitzen erheben.

A) Geschäftlicher Teil:

1. Bericht des Kassenwartes und der Kassenprüfer. Die Entlastung des Kassenwartes wird einstimmig beschlossen. 2. Neuwahl des Vorstandes und der Kassenprüfer. Von 30 anwesenden Mitgliedern stimmen bei der Wahl des 1. Vorsitzenden mit ihren Zetteln 29 für Herrn Korn, der damit zum 1. Vorsitzenden gewählt ist. Die übrigen Vorstandsmitglieder und die Kassenprüfer werden durch Zuruf wiedergewählt; somit besteht der Vorstand aus den Herren: A. Korn (1. Vorsitzender), E. Jacobsthal (2. Vorsitzender und Schriftführer) und P. B. Fischer (Kassenwart). Kassenprüfer sind die Herren Singer und Zacharias. 3. Neuwahl zweier Mitglieder der Redaktionskommission. Satzungsgemäß scheiden aus die Herren Hamel und Knopp. Für sie werden neu gewählt die Herren Bieberbach und Fraenkel. 4. Herr Hamel erstattet einen Bericht über die Tagung des Mathematischen Reichsverbandes in Hamburg.

B) Wissenschaftlicher Teil:

Herr Lorey: Johann Heinrich Lambert. (26. 8. 1728—25. 9. 1777).

Digitized by Google

Johann Heinrich Lambert[1]).

(26. August 1728—25. September 1777).

Von Wilhelm Lorey in Leipzig.

Am 26. August dieses Jahres waren 200 Jahre vergangen, daß in dem damals zur Schweiz gehörenden Mülhausen im Elsaß dem Schneider Lambert als Ältester von vielen Kindern ein Sohn Johann Heinrich geboren wurde, der einer der berühmtesten Forscher im Gebiet der mathematischen Wissenschaften und der Philosophie des 18. Jahrhunderts werden sollte und der am 25. September 1777 in Berlin als Mitglied der Akademie der Wissenschaften und als Oberbaurat gestorben ist[2]). Die überaus vielseitige und tiefgehende literarische Wirksamkeit dieses genialen Mannes, von der allein schon die zahlreichen Zitate in vielen Bänden der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften zeugen, läßt es angebracht erscheinen, daß die Berliner Mathematische Gesellschaft bei der 200. Wiederkehr seines Geburtstages seiner gedenkt, so wie sie 1907 seines Landsmannes und Akademiegenossen Leonard Euler gedacht hat[3]).

Wie sein anderer Landsmann, der gleichfalls Mitglied der Berliner Akademie geworden ist, Jakob Steiner, in seiner Jugend das Vieh gehütet hat, so war Johann Heinrich Lambert Wärter seiner vielen Geschwister und zugleich Lehrling bei seinem strengen Vater, der den Lernbegierigen schon mit 12 Jahren aus der Schule nimmt; die Mutter entzieht dem leseeifrigen Jungen das Öl für die Lampe: durch Verkauf kleiner Zeichnungen an Altersgenossen und durch das Trinkgeld, das er gelegentlich von Kunden seines Vaters bekommt, denen er die Kleider bringt, erwirbt er sich Kerzen für das nächtliche Studium. Endlich ist der

---

1) Vortrag gehalten am 31. Oktober 1928 aus Anlaß der zweihundertsten Wiederkehr seines Geburtstages in der 250. Sitzung der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

2) Für biographische Angaben habe ich außer den weiter unten zu nennenden Quellen die zur hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von Lambert erschienene Monographie benutzt: Daniel Huber, Professor der Mathematik in Basel. Johann Heinrich Lambert nach seinem Leben und Wirken. Basel 1829. Darin schildert der Mülhäuser ev. Pfarrer Graf Lamberts Leben; der Heidelberger Philosoph Erhardt Lamberts Verdienste um die theoretische Philosophie und Huber seine Verdienste in der mathematischen und physischen Wissenschaft. Außerdem enthält das Buch ein Verzeichnis der Lambertschen Schriften.

3) Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonard Eulers. Herausgeg. vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft Leipzig u. Berlin. B. G. Teubner 1907.

Digitized by Google

Vater bereit, die Erlaubnis zum Studium zu geben; Johann Heinrich soll Theologe werden. Aber der Magistrat der Vaterstadt versagt eine Beihilfe. Da verschafft ihm ein Gönner eine Stelle als Schreiber auf einem Eisenwerk bei Mömpelgard. Von dort aus wird er Sekretär beim Professor der Rechtswissenschaft Iselin in Basel und schließlich — und das gab seinem Leben eine entscheidende Wendung — Hauslehrer beim Präsidenten von Salis in Chur, für dessen Enkel und einige Altersgenossen. In dieser geistig offenbar sehr angeregten Umgebung findet Lambert Zeit zu Studien und Forschungen auf den verschiedensten Gebieten. Ein Monatsbuch, das er seit 1752 mit Berichten über seine Tätigkeit führte, gibt uns einen wertvollen Einblick. Von der Existenz eines solchen Tagebuches wußte man schon durch Mitteilungen des Verwalters des literarischen Nachlasses von Lambert, des Direktors der Berliner Sternwarte Johann Bernoulli Dessen Absicht, durch eine Subskription das Monatsbuch zu veröffentlichen, konnte damals nicht ausgeführt werden. Und so blieb das Monatsbuch fast hundert Jahre verschollen, bis es dem Spürsinne Paul Stäckels, der ja auch das Tagebuch von Gauß wiedergefunden hat[4]), im Jahre 1899 gelungen ist, das Monatsbuch in der an Schätzen so reichhaltigen Bibliothek in Gotha zu entdecken; aber erst 1916 ist es durch den Heidelberger Historiker der Mathematik, Herrn Karl Bopp, mit vielen wertvollen Anmerkungen versehen, in den Abhandlungen der Münchener Akademie veröffentlicht worden[5]).

Theologische Studien, Predigten, aesthetische Dinge, Gedichte sind es, die den jungen Lambert beschäftigen; aber auch juristische Studien, und auf Grund deren greift er in einer Denkschrift zu Gunsten der Stadt Chur in einen Rechtsstreit mit dem Bischof ein. Vor allem läßt aber auch das Monatsbuch von allem Anfang an Beschäftigung mit mathematischen, physikalischen und logischen Dingen erkennen. Dezimal- und Kettenbrüche beschäftigen ihn, wobei er auch die Genauigkeit der Annäherung zu bestimmen sucht. Entwicklungen in der Form $\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}\cdots$ treten auf. Gelegenheit zu Veröffentlichungen bieten ihm die Acta helvetica der damals entstandenen medizinisch-physikalischen Gesellschaft in Basel, die ihn zu ihrem Mitglied ernennt. Von Basel aus bekommt er auch den Auftrag zu meteorologischen Beobachtungen. Die Zöglinge sind inzwischen herangewachsen, und nun begleitet er sie auf eine mehrjährige Reise; zunächst zum Studium nach Göttingen, wo er, der Hofmeister Lambert, wie er später

4) Nachbildung und Abdruck des Tagebuchs Gauß Werke X, 1 S. 483—574.

5) Johann Heinrich Lamberts Monatsbuch mit den zugehörigen Kommentaren sowie einem Vorwort über den Stand der Lambertforschung. Herausgeg. von K. Bopp. Abh. der Kgl. Bayr. Akad. der Wiss. Math.-Physik. Klasse XXVII. Band 6 Abh. 1916.

Digitized by Google

in einem Inhaltsverzeichnis der Göttinger gelehrten Anzeigen genannt wird, am 18. Oktober 1756 eintrifft. Lambert hat damals eine ähnliche Stellung, wie sie Herder hatte, als Goethe mit ihm in Straßburg zusammentraf; ich nenne hier Herder, weil er lange Zeit den Lambert'schen Nachlaß, aus Gotha geliehen, in Händen hatte, was in den Kreisen der Herderphilologen nicht bekannt zu sein scheint [6]).

In Göttingen, der damals noch nicht zwanzig Jahre alten Universität, herrschte ein reges wissenschaftliches Leben. Seit Beginn des Sommersemesters des Jahres 1756 wirkte dort von Leipzig berufen, als Nachfolger des nach Halle übergegangenen v. Segner, Kästner, der dort schon bald eine ausgedehnte Tätigkeit ausübte. Es ist in Mathematikerkreisen, in denen ja vielfach überhaupt in historischen Dingen eine häufig recht schlecht begründete Tradition herrscht, üblich geworden, von Kästner etwas geringschätzig zu reden. Ohne im Rahmen dieses Vortrages es eingehender begründen zu können, möchte ich aber doch hier die Gelegenheit benutzen, gegen diese Geringschätzung Einspruch zu erheben und in voller Übereinstimmung mit der so wertvollen Göttinger Dissertation Conrad Müllers [7]), Kästners Bedeutung hervorzuheben, bei dem wohl nur unter den Wirren der schlimmen Zeit nach dem Kriege die 200. Wiederkehr seines Geburtstages im Jahre 1919 zu erwähnen vergessen wurde.

Mit Kästner kam Lambert bald in rege Beziehung. Wie der Briefwechsel zeigt, den ich im Sommer bei Herrn Bopp einsehen konnte und der demnächst von der Heidelberger Akademie veröffentlicht wird, verabreden sie gelegentlich einen mathematischen Spaziergang, also eine Veranstaltung, wie sie in Göttingen in späterer Zeit namentlich unter Hilbert sehr üblich geworden sind. Von der engen Beziehung zu Kästner erfahren wir aber auch aus einer in den Göttinger Gelehrten Nachrichten, anonym aber ersichtlich von Kästner stammenden Besprechung der ersten Monographie Lamberts über den Gang der Lichtstrahlen in der Luft [8]); Lambert weist darin auf seine demnächst erscheinende Photometrie hin, und mit Rücksicht darauf sagt Kästner:

„Man hat sich viel Neues von dem Werk zu versprechen, aber auch aus anderen Proben in den Acta helvetica. Die Göttinger hohe Schule nimmt an

6) Vgl. K. Bopp, Vorwort zum Monatsbuch S. 9.

7) Conrad H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbes. des mathem. Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jh. Mit einer Einleitung über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik. Abh. zur Gesch. der mathem. Wissenschaften, Heft 18 (1904) Leipzig, B. 9. Teubner.

8) Les proprietés remarquables de la route de la lumière par les airs et en general par plusieurs milieux refringens, spheriques et concentriques avec la solution des problèmes, qui y ont du rapport, comme sont les refractions astronomiques et terrestres et ce qui en depend. A La Haye 1758.

Digitized by Google

dieser Ehre großen Anteil, da Verfasser sich vor ein paar Jahren mit den Baronen von Salis daselbst aufgehalten und während dieser Zeit beständig den Zusammenkünften der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften beigewohnt hat und jetzt Korrespondent dieser Gesellschaft ist“ [9]).

Die 1760 in lateinischer Sprache in Augsburg erschienene Photometrie wäre wie Herr Anding, der sie in Ostwald Klassikern herausgegeben hat, sagt, „vom Katheder aus vorgetragen ein vortrefflicher Lehrkurs des photometrischen Calcüles“. In der Beleuchtungstechnik lebt sein Name in „Lamberts Kosinusgesetz“ fort. Es sei auch an „Lamberts Absorbionsgesetz“ erinnert [10]).

Lambert nutzt aber auch die schon sehr reichhaltige Göttinger Bibliothek aus. Er hat vor allem damals Arbeiten von Bernoulli und Euler studiert. Sein Interesse galt aber auch der Astronomie; mit dem Göttinger Astronomen Tobias Mayer wird er bekannt, was sich später u. a. noch dahin auswirkte, daß er dessen Sohn das Thema einer Dissertation über Tetragonometrie vorschlug [11]). Ob er in jenen Göttinger Jahren auch schon mit Kästner über das Parallelenaxiom gesprochen hat, läßt sich aus dem Briefwechsel nicht feststellen; ich halte es aber für sehr wahrscheinlich, da Kästner damals schon begonnen hatte die große Literatur über diese Frage zu sammeln auf Grund deren dann sein Schüler Klügel 1763 [12]) die noch heute lesenswerte, von Lambert auch genannte, Dissertation verfaßt hat.

Als die erwähnte Erstlingsschrift Lamberts erschien, war der Verfasser nicht mehr in Göttingen. Nach einem Jahre war er von dort, wie es im Monatsbuch [13]) heißt, „Trajectum ad Rhenum profectus“ und befand sich

9) Göttinger Gelehrte Anzeigen 1759. S. 1175.

10) Ostwald's Klassiker Bd. 31, 32, 33. In sehr ausführlichen Anmerkungen kennzeichnet der Herausgeber dieses „trotz der bei Lambert vorkommenden Irrtümer für den heutigen Astrophysiker ebenso unentbehrlichen Werkes wie für den Astronomen etwa das Studium der Laplace'schen Mécanique céleste“ das Verhältnis Lamberts zu seinen Vorgängern und Nachfolgern in der Photometrie. Vgl. z. B. auch Handbuch der Physik. XVIII, S. 198, XIX, S. 470 und Handbuch der Experimentalphysik, XXX, S. 254.

11) Brief Lamberts an Mayer vom 17. X. 1772. Bd. 2, S. 446 des Deutsch. Gelehrten Briefwechsels. Vgl. Anm. 19. Lambert hat in seinen weiter unten zu nennenden „Beyträgen“ Bd. 2, S. 175—183 eine „Anlage zur Tetragonometrie“ veröffentlicht.

12) Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel. Göttingen 1763. Mit Klügel (1739—1812), der von 1767—1788 Professor in Helmstedt und dann in Halle war, hat Lambert in den Jahren 1773—1775 Briefe gewechselt, die an eine Preisschrift Klügels über Feuerspritzen anknüpfen und weiter von physikalischen und technischen Dingen handeln. Deutsch. Gelehrter Briefwechsel Bd. 2, S. 484—504. Vgl. auch Anm. 80.

13) a. a. O. S. 19.

Digitized by Google

jetzt in Utrecht. Von dort ging am 1. Juli 1758 sein erster Brief an Leonard Euler ab, dem er persönlich und für die Berliner Akademie ein Exemplar seiner Schrift übersendet. Dieser Briefwechsel mit Euler, der sich bis zum Jahre 1772 hinzog, ist 1924 von Herrn Bopp in den Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften auch mit vielen Anmerkungen versehen herausgegeben worden. Auf einen solchen Briefwechsel mit Euler war man durch Eneström[14]) aufmerksam gemacht worden; Stäckel war den Spuren nachgegangen, und Herr Bopp hat die Briefe schließlich in Gotha entdeckt[15]). Neben einigen persönlichen Dingen behandeln sie in der Hauptsache physikalische und astronomische Fragen, aber gelegentlich auch einige rein mathematische. Und gleich der erste Brief ist in dieser Beziehung besonders interessant: läßt er doch erkennen, daß Lambert in der Integralrechnung, die er, wie er gelegentlich an einen Herrn von Holland schreibt, aus Wolfs Büchern kennen gelernt hat, noch nicht sehr stark ist.

Wenigstens erscheint mir das so, wenn man liest, daß Lambert die in seinen optischen Untersuchungen[17]) auftretende Formel, die ich in seiner Schreibweise angebe

$$dz = dv : \sqrt{(rr - nn)}$$

durch einen endlichen Ausdruck will integriert haben. Euler ist in seiner ausführlichen Antwort auf diese Frage nicht eingegangen. Der Aufbau der Differential- und Integralrechnung hat Lambert wiederholt beschäftigt; in seinen großen selbständigen Werken findet sich darüber nichts, wohl aber in einer Abhandlung in der Berl. Akademie[18]), sowie in einer nach

---

14) Gustav Eneström. Bericht an die Euler-Kommission der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft über die Euler'schen Manuskripte der Petersburger Akademie. Jahresber. d. Deutsch. Math. Verg. Bd. 22 (1913) Geschäftl. Teil S. 191—205.

15) Karl Bopp. Leonard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel. Aus den Manuskripten herausgegeben. Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Jg. 1924, phys.-math. Klasse Nr. 2.

16) Christian von Wolf, Schüler von Leibniz, erster ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Halle, hat in seinen „Anfangsgründen aller mathem. Wissenschaften (1709), die später zu einem zweibändigen Werk „Elementa matheseos universae" (1713—1715) erweitert wurden, *das* bis zur Mitte des 18. Jahrh. von Studenten und Professoren benutzte Lehrbuch geschrieben. Vgl. auch Conrad Müller a. a. O. S. 68—72.

17) Les Proprietés remarquables u. s. w. a. a. O. S. 45. Herr Bopp bezeichnet die Differentiale nach dem Manuskript mit δ; in der Lambert'schen Druckschrift ist das heute übliche d verwendet.

18) Sur la méthode du calcul intégral (gelesen in der physik. Kl. am 15. XII. 1768). Hist. de l'acad. du Berlin. anné 1762. Erschienen 1769. S. 441—484.

Digitized by Google

seinem Tode veröffentlichten Arbeit[19]), vor allem aber in zahlreichen Briefen, die oft fast den Charakter einer Abhandlung haben. Ich denke hier an die Briefe, die Johann Bernoulli als ein fünfbändiges Werk unter dem Titel „Johann Heinrich Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel“ [20]) herausgegeben hat, ein Werk, das für jeden, der sich für Lambert, aber darüber hinaus für das Ringen wissenschaftlicher Ideen seiner Zeit interessiert, sehr aufschlußreich ist. Es beginnt mit dem Briefwechsel zwischen Lambert und Herrn von Holland. Dieser hatte in Tübingen studiert, wo er mit den Bestrebungen des dortigen Philosophen Plouquet[21]) eine Algebra der Logik zu schaffen bekannt wurde. In dieser Richtung hatte nun auch schon Lambert früher gearbeitet und im Jahre 1764 in einem an Kästner gerichteten von diesem in den Göttinger Nachrichten veröffentlichten Briefe[22]) von dem noch im gleichen Jahre erscheinenden Werk gesprochen: *Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung von Irrtum und Schein*[23]). Durch diesen Lambert'schen Brief in den Göttinger Nachrichten war von Holland zu einer vergleichenden Dissertation veranlaßt worden, und diese hatte Lambert in den „Leipziger gelehrten Zeitungen“ günstig besprochen[24]). Dadurch war zwischen ihm und von Holland, der inzwischen eine Hofmeisterstelle bei dem als Regimentskommandeur in Treptow a. d. Rega stehenden Herzog Friedrich von Württemberg angenommen hatte, ein Briefwechsel entstanden, der vom 8. Februar 1765 bis zum 9. April 1773 sich erstreckte. Von den logischen Problemen werde ich nachher noch zu sprechen haben. Hier interessiert uns zunächst der Meinungsaustausch über Differential- und Integralrechnung, aus dem m. E. auch in der heutigen Zeit didaktisch manches zu lernen ist. Lambert schreibt z. B.[25])

19) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. 1788.

20) Joh. Heinrich Lamberts ehemaligen Kgl. Preuß. Oberbaurates und ordentl. Mitgliedes der Kgl. Akademie d. Wiss. zu Berlin etc. Deutscher gelehrter Briefwechsel. Herausgeg. v. Johann Bernoulli. 5 Bde. Berlin, Leipzig u. Dessau 1781—1785. Im 2. Bd. (S. 3—16) finden sich Briefe an seinen Paten und an einen Pfarrer mit Mitteilungen über seinen Entwicklungsgang.

21) Plouquet war seit 4. 9. 1749 auswärtiges Mitglied d. Berliner Akademie. Vgl. Harnack, Geschichte d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Bd. 1, I. Hälfte, S. 475, wo der Name Ploucket geschrieben ist.

22) Der französisch geschriebene Brief wurde von Kästner am 5. März 1764 vorgelegt und in deutscher Sprache abgedruckt.

23) In der Besprechung des in 2 Bänden 1764 in Leipzig erschienenen neuen Organon hebt Kästner die Sprache hervor, der man nicht anmerke, daß Lambert Schweizer sei. Göttinger gelehrt. Nachr. 1764, S. 514.

24) Vgl. Brief v. Hollands an Joh. Bernoulli. Deutsch. Gel. Briefw., Bd. 1 S. 4. Die Besprechung Lamberts steht in der Nummer der Leipziger Gelehrt. Zeitg. vom 3. Januar 1765.

25) Brief v. 27. V. 1765 a. a. O. S. 53.

Digitized by Google

„Ich muß Ihnen sagen, daß der erste deutliche Begriff, den ich mir vom Differentieren gemacht habe, so ausgesehen hat. Ein Stein falle in der Zeit τ durch $g\tau\tau$ Fuß, so fällt er in der Zeit $\tau + n$ durch $g(\tau\tau + 2n\tau + nn)$ Fuß, folglich in dem letzten Zeitraume n durch $g(2n\tau + nn)$ Fuß. Wäre dieses gleichförmig, so würde die Geschwindigkeit

$$= g\frac{(2n\tau + nn)}{n} = 2g\tau + ng$$

seyn. Nun hängt die Ungleichförmigkeit von n ab. Demnach setze ich $n = 0$ und so habe ich $2g\tau$.

Ich hatte eine Zeit lang auf diese Art differentiert, und bin auf einen calculum differentialem quantitarum discretarum (finitarum), der seinen ihm eigenen calculum integralem hat, gekommen. Der Leibnizische leitet sich in allen Fällen daraus her, wenn man $n = 0$ setzt."

Von Holland will eine Differentialrechnung[26]) entwickeln ohne das Wort „unendlich klein" zu gebrauchen. Nach Lambert ist die „sogenannte Integralrechnung das Wort im strengsten Verstande genommen dermalen noch nicht erfunden; denn bisher kann man nicht integrieren, dafern man nicht im voraus weiß, daß für gegebene Differential habe eine Form, welche man ehemals durch das Differentieren einer gewissen Größe herausgebracht oder es lasse sich in eine solche Form verwandeln"[27]). Jedenfalls sind nach ihm noch viele Tabellen nötig. An anderer Stelle heißt es:

Das Differential von x ist dx. Man schloß umkehrend, das Integral von dx sei x. Dieser Satz ist aber nach den Regeln der Logik nur partikulär. Nur einige Integrale von dx sind x. Damit ist aber nicht viel gewonnen, weil man alle Integrale, das Allgemeinste finden will. Und ob es außer x und $x + a$ noch andere gibt oder geben möchte, muß erst erwiesen werden.

Charakteristisch für Lamberts geometrische Denkweise ist seine im gleichen Brief erhobene Forderung, daß „bei Integralien, die sich auf Circulbögen reduzieren lassen", es möglich sein sollte durch bloß geometrische Betrachtungen sie zu finden[28]).

Als von Holland gelegentlich die Unstetigkeit in der Reihe der Integrale

$$\int\frac{dx}{x} = \log x;\quad \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x};\quad \int\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$$

hervorhebt[29]), erwidert Lambert, der Sprung sei gar nicht so vorhanden. Er schreibt[30]):

---

26) Brief v. 18. VII. 1765 a. a. O. S. 62.
27) Brief v. 19. VIII. 1765 a. a. O. S. 71.
28) Brief v. 14. XII. 1766 a. a. O. S. 175 f.
29) Brief v. 22. IX. 1765 a. a. O. S. 89.
30) Brief v. 20. X. 1765 a a. O. S. 98.

Digitized by Google

„Ich setze zum Exempel

$$Z = \int \frac{dx}{x^{1+n}} = -\frac{1}{n} x^{-n} + \text{const.}$$

nun ist

$$x^{-n} = e^{-n \log x} = 1 - n \log x + \tfrac{1}{2} n^2 (\log e)^2 \cdots$$

Folglich wenn const. = 1 gleich gesetzt wird

$$Z = -\frac{e^{-n \log x}}{n} + 1 = \log x - \tfrac{1}{2} n (\log x) \cdots$$

Diese Reihe ist konvergierend, welche Größe auch immer n und x haben mögen. Ist $n = 0$, so bleibt das erste Glied allein.

Zur kritischen Bearbeitung in Übungsseminaren für 1. und 2. Semester möchte ich das hier wörtlich vorgetragene Beispiel besonders empfehlen.

Mit diesen Zitaten aus Briefen Lamberts vom Jahre 1765 sind wir in Lamberts Lebensgang schon sehr viel weiter gekommen; wir müssen aber noch einmal zurückgreifen. Wie er in einem Brief an Euler vom 4. April 1760 schreibt[31]), wächst bei ihm immer mehr der Wunsch, nachdem er die letzten drei Jahre keinen ständigen Wohnsitz gehabt hat — er ist von Utrecht aus mit seinen Zöglingen auch noch nach Paris und Marseille gereist — nach einer festen Stellung als Akademiker, die ihm die Muße läßt, seine zahlreichen inzwischen entstandenen Schriften zu veröffentlichen. Dieser Wunsch sollte bald in Erfüllung gehen. Lambert war nach Augsburg gekommen, wo er sehr schnell mit dem dortigen Mechaniker Brander Fühlung gewann, dem vielleicht vorzüglichsten Künstler für mathematische und physikalische Instrumente, den Deutschland je hervorgebracht hat, wie Bernoulli in dem Vorwort zum 3. Band des gelehrten Briefwechsels sagt, der den vom 3. Mai 1765 bis zum 5. Okt. 1776 sich erstreckenden Briefwechsel zwischen Lambert und Brander enthält. Dieser Briefwechsel ist für die Geschichte der Präzisionsinstrumente von größtem Interesse[32]); er läßt uns aber auch Lambert als einen durchaus praktisch veranlagten Mann kennen lernen[33]).

In der Zeit, in der Lambert in Augsburg sich niedergelassen hatte, d. h. Ende der 50 er Jahre des 18. Jahrhunderts war in Münchener Kreisen der Gedanke entstanden, eine kurfürstlich bayrische[34]) Akademie der Wissenschaften ins Leben zu rufen. Von welcher Wertschätzung, im besonderen

31) a. a. O. S. 14.

32) Über Brander vgl. auch Franz Johann Müller. Georg Friedrich Brander. Zeitschr. d. Vereins d. höh. Bayr. Vermessungsbeamten. Bd. IVX (1910). Für den Hinweis auf diese Arbeit bin ich Herrn Wieleitner zu Dank verpflichtet.

33) Lamberts Bedeutung für die Instrumententechnik behandelt Vogler in seiner in der Landwirtsch. Hochschule in Berlin gehaltenen Kaisers Geburtstagsrede „Johann Heinrich Lambert und die praktische Geometrie“ Berlin 1902.

34) In den ersten Jahren schrieb man baierisch. Später wird ie durch y ersetzt

Digitized by Google

der Mathematik man hierbei geleitet war, läßt die Vorrede erkennen, zu dem 1763 erschienenen I. Bande der Abhandlungen dieser neuen Akademie:

„Denn das kann wohl schwerlich geleugnet werden, daß seit zweyen Jahrhunderten her unser Vaterland was die höheren Wissenschaften besonders was die Mathematik und Weltweisheit betrieft, im Vergleich mit anderen aufgeklärten europäischen Völkern, ziemlich weit zurückgeblieben sey. Baiern ist es aber nicht allein, sondern dieses Schicksal hat die meisten oberdeutschen Provinzen ebenso betroffen: und da man in Frankreich, Italien, Engelland und an vielen Orten Niederdeutschlands bemüht war, die Weltweisheit von dem leeren und unnützen Geschwätze zu reinigen, und die Mathematik auf den höchsten Gipfel der Vollkommenheit zu bringen: so blieb man hier und bey den meisten unsrer angränzenden Nachbarn bey dem alten Tand ruhig und gelassen stehen. Die Mathematik war ein Werk einzelner gar weniger Männer, die gemeiniglich zum Lehramte berufen waren, dabey aber so unglücklich fuhren, daß ihre wenigen Schüler, welche sich als arme Layen an die Arithmetik und Geometrie wagen wollten, (es mochte nun am guten Willen der Lehrer, oder am geschickten Vortrage oder an beyden zugleich fehlen; denn an guten Köpfen hat es hierzulande ebensowenig als all-anderwärts jemals gefehlet) wenigstens ebenso unwissend aus ihren Schulen giengen, als sie hineingekommen waren. Überhaupt sah der Gelehrtenpöbel diese herrlichen Wissenschaften für brodlose Künste, oder für solche Dinge an, die sich nur für Kalendermacher, Feldmesser, Kauf- und Handwerksleute schicketen, sonst aber in anderen Wissenschaften nicht den geringsten Nutzen brächten."

So war man denn bemüht, einen hervorragenden Mathematiker für die Akademie zu gewinnen. Es wird mit Lambert verhandelt, und der Sekretär der Akademie, der Münzrat Lori, gibt sich alle Mühe, ihn zu veranlassen, seinen Wohnsitz nach München zu verlegen. In einem Brief, den ich mit dem gesamten Briefwechsel in dieser Angelegenheit kürzlich im Archiv der Münchener Akademie einsehen konnte, schreibt er ihm am 19. September 1760: „Sie sind in München ganz unbehelligt; Sie finden hier Zuflucht gegen Weltgetümmel. München ist eine so volkreiche Stadt, daß ich nicht einmal weiß, wer alles in meinem Quartier wohnt." Wenigstens versuchsweise sollte Lambert kommen. „Nur im Anfang haben wir einen großen Mann unter uns nötig, daß wir die akademischen Arbeiten in das rechte Geleise bringen und einige guten Köpfe nachziehen können." Aber vergebens: Lambert nimmt zwar die Wahl zum Akademiker an und entwirft selbst nach Göttinger Muster das Diplom, indem er sich verpflichtet, jedes Jahr drei Abhandlungen zu liefern, eine philosophische, eine physikalische und eine mathematische, auch durch reiche Korrespondenz mit anderen Gelehrten Beziehung zu pflegen. Dafür erhält er 800 Gulden und den Titel Professor honorarius. Auch als Lori 1761 nach dem Tode eines Akademikers noch einmal ihn dringendst bittet, nach München zu kommen, mit dem Hinweis darauf, daß ein großer Mathematiker, Herr von Osterwald, in den bayrischen Staatsdienst getreten sei — er war praktischer Geodät und wurde Direktor der philosophischen Klasse — hatte er keinen

Digitized by Google

Erfolg. Lambert war aber eifrig für die Akademie tätig. Der 1. Band der Abhandlungen bringt von ihm eine 54 Seiten umfassende Arbeit „von dem Gebrauche der Mittagslinie beym Land- und Feldmessen". Sie ist offenbar aus dem Auftrag erwachsen, den Lori in einem Briefe vom 3. Dezember 1759, indem er die Wahl zum Akademiker mitteilt, ihm gegeben hatte: im Interesse der Geographie des Kreises Bayern Länge und Polhöhe der Orte von Bayern auf 2—3 Minuten genau zu bestimmen, ohne den Himmel zu Rate zu ziehen.

Darin tritt auch schon die Aufgabe der 6 Punkte auf, d. h. die Bestimmung der relativen Lage von 6 Punkten, wenn an 3 von ihnen die Azimute in Bezug auf die 3 anderen gemessen sind, eine Aufgabe, die ebenso wie die später von Lambert behandelte Erweiterung auf 8 Punkte in der neuesten Zeit durch Herrn Finsterwalder[35]) photogrammetrisch ausgenutzt worden ist.

Diese Abhandlung kann aber auch als der Beginn einer Reihe von Untersuchungen angesehen werden über Kartenprojektion, die Lambert in seinen später noch zu nennenden „Beyträgen" zusammengefaßt hat und die durch Herrn Wangerin in Ostwalds Klassikern bequem zugänglich gemacht worden sind[36]). Lambert fordert die Winkeltreue und andererseits die ja damit nicht verträgliche Flächentreue. Man kann mit Recht seine Arbeiten als den Beginn einer neuen Epoche der Kartenprojektion bezeichnen. Konsequent hat er z. B. nicht-normale Abbildungen durchgeführt, und wie sehr sein Name in der Kartographie erhalten ist, zeigt schon allein der betreffende Artikel von Bourgeois und Furtwängler in der Enzyklopädie[37]). Geschichtlich interessant ist es auch, daß gelegentlich bei Lambert hier komplexe Größen auftreten; er scheint sich allerdings über ihre große Bedeutung für die konforme Abbildung noch nicht ganz klar zu sein[38]).

Ganz elementarer Natur ist die mit den Vermessungsaufgaben in Verbindung stehende Berechnung der Entfernung zweier Orte auf Grund des pytagoreischen Satzes, wofür Lambert ein auf Kettenbruch-Entwicklung hinauskommendes Verfahren der Quadratwurzel-Berechnung für den von der Akademie herausgegebenen Kalender beigesteuert hat, ein Verfahren, das, wie er gelegentlich an Euler schreibt, von den Jesuiten in Regensburg, die er für seine Gegner ansieht, nicht verstanden wurde[39]).

35) Münchener Berichte 24 (1904) S. 103.

36) Anm. u. Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten in „Beyträge usw." 3. Teil 1772, S. 105—172. Oswalds Klassiker Nr. 54.

37) Encyklop. d. Math. Wiss. VI, 1, S. 245—296.

38) Vgl. Wangerins Bemerkung a. a. O. S. 88.

39) Brief an Euler vom 12. VII. 1762 a. a. O. S. 28. Der von Lambert erwähnte Almanach ist mir nicht zugänglich gewesen; in der Staatsbibliothek in

Digitized by Google

Die Herausgabe von Kalendern war ein Privileg der Akademien, das ihnen erhebliche Mittel einbrachte, wie es z. B. auch bei der Berliner Akademie der Fall war. Lambert hat eine ganz ausführliche bei den Akten in München befindliche Eingabe an die Akademie gerichtet über die Art, wie das Kalenderwesen gestaltet werden soll. Er schlägt vor einen Kalender in Folio für die Wand, einen Schreibkalender in Oktav, einen Kalender „für arme Leute oder für solche die weiter nichts als Tag und Monat zu wissen verlangen". Außerdem aber eine zweite Serie, bestehend aus einem

1. ökonomischen oder Haushaltungskalender,
2. Staatskalender,
3. Physikalischen Kalender.

Ich habe diese Vorschläge hier erwähnt, weil sie mir für das organisatorische Interesse Lambert kennzeichnend zu sein scheinen. Der Akademiesekretär Lori dankt für den Vorschlag und übertrug ihm die Herausgabe. Lambert machte aber auch Vorschläge für die Organisation der Akademie, ihre Einteilung in Klassen und für die Wahl von Akademikern. Ausgehend von seinem Grundsatz: „Theoretische Mathematik ist an kein Land und Ort besonders gebunden; sie richtet sich nur nach der Fähigkeit, dem Ansehen und Fleiß der Subjekte so zu Mitgliedern aufgenommen werden können" schlägt er für die mathematische Klasse vor: Kästner in Göttingen, Bernoulli in Basel, Euler Vater und Sohn in Berlin, Castillon in Utrecht, d'Alembert und Clairaut in Paris, de la Grange in Berlin, Karsten in Rostock, Heinsius in Leipzig. Der Name des letzten ist Ihnen wohl ganz unbekannt; er ist der Lehrer Kästners in Leipzig gewesen, wo er 1745 Ordinarius geworden ist[40]). Mit Karsten hat Lambert später auch im Briefwechsel gestanden. Karsten hat ein Lehrbuch der Gesamten Mathematik geschrieben, über das Lambert in einem Brief vom 15. September 1770 so urteilt:[41])

> „Es war mir ungemein lieb zu sehen, daß Sie in Ihrem Lehrbegriff der gesamten Mathematik den mechanischen und hydraulichen Theorien eine gehörige Ausführlichkeit geben. Denn seit vielen Jahren brachten junge Leute von Universitäten kaum etwas mehr mit, als die Mathesin puram und hatten nachher weder Zeit noch Anlaß, sich um die mehr praktischen Teile umzusehen.

Nach dieser Stelle würde man Lambert heute gewiß als ein eifriges Mitglied des Reichsverbandes der Mathematischen Gesellschaften begrüßen können.

München ist er bis jetzt nicht gefunden worden. Die Arbeit, die er für diesen Almanach beigesteuert hat, ist offenbar die in seinem Brief an Lori von 4. XII. 1759 erwähnte, nicht wie Johann Bernoulli meint, die im 1. Bd. der Abhandlungen veröffentlichte über den Gebrauch der Mittagslinie. Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 2, S. 17.

40) Vgl. Conrad Müller a. a. O. S. 101.

41) Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 4, S. 277.

Digitized by Google

Als die Lambertschen Vorschläge für die Organisation der Akademie nicht sofort angenommen werden, wie er es verlangte, wird er sehr empfindlich, wie man aus seinen Briefen an Brander sieht. Es scheinen auch Briefe aus München an Lambert, der inzwischen nach der Schweiz für einige Zeit gegangen war, nicht angekommen zu sein. Eine persönliche Aussprache über die entstandenen Differenzen wäre gewiß besser gewesen, zumal als die Akademie eine Abhandlung Lamberts über die Lücken der menschlichen Erkenntnis nicht aufnahm, weil nicht verständlich genug, wohl aber Arbeiten aus der höheren Geometrie von ihm verlangte. Bei Lambert drängte sich die Überzeugung auf, daß die Akademie seiner überdrüssig sei. Diese wartete freilich seine Abdankung nicht ab, sondern eröffnete ihm im November 1762, daß man ihn aus dem Verband der Akademie entlassen wolle, ihm aber für die Fortsetzung des „Gelehrten Briefwechsels" jährlich 200 Gulden bewillige. Gegenüber diesen peinlichen Vorfällen, die ich aus den Akten feststellen konnte, sei aber doch auch hervorgehoben, was in der 1784 erschienenen Geschichte der Bayrischen Akademie der Wissenschaften gesagt wird:[42])

„Lamberts zahlreiche Briefe, die er an die Akademie schrieb, geben einen Mann zu erkennen, der an Kraft, Scharfsinn, Fleiß und Liebe zur Sache unter seinen Zeitgenossen erhaben dastand. Seine Aufsätze waren geeignet, München zum Mittetpunkt der Gelehrsamkeit in Süddeutschland zu machen."

Lambert richtet nun seinen Blick nach Norden. Ehe wir ihn dorthin begleiten, wollen wir noch dreier hervorragender Veröffentlichungen gedenken, die in diesen Wanderjahren entstanden sind. In Zürich erschien 1759 ein Traktätchen, wie er es nannte, „*die Freye Perspektive oder Anweisung jeden perspektivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen*". Was dieses 1774 in zweiter durch Anmerkungen und historische Zusätze vermehrte Auflage erschienene Werk für die darstellende Geometrie bedeutet, hat Herr Friedrich Schur in seiner Karlsruher Rektoratsrede „Johann Heinrich Lambert als Geometer" dargelegt[43]). Indem ich auf diese im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 1905 veröffentlichte und daher leicht zugängliche Rede verweise, möchte ich mich hiermit begnügen, als charakteristisch das anzugeben, was wir im Mathematischen Saal des Deutschen Museums in München über den *Fluchtpunktsatz von Lambert* lesen:

Der Fluchtpunkt einer im Raum beliebig gerichteten Geraden liegt da, wo ein durch das Auge gelegter Parallelstrahl die Bildtafel trifft.

Wir erkennen Lambert hier durchaus als Vertreter der angewandten Mathematik; er hat aber auch, um einen modernen Ausdruck zu gebrauchen,

42) Lorenz Westenrieder, Geschichte d. bayr. Akademie d. Wiss. I. Teil 1759—1779. München 1784. S. 74.

43) Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereing. Bd. 14, (1905) S. 186—198.

Digitized by Google

wirklich die mathematische Exekutive gepflegt und hat, was ihn wohl von dem Geometer Steiner unterscheidet, selbst viel gezeichnet und zeichnerische Hilfsmittel, wie z. B. einen Proportionalzirkel konstruiert. Lambert hat aber auch gern und viel numerisch gerechnet, Tabellen angelegt und die Nützlichkeit eines logarithmischen Rechenstabes erkannt. Dieser Sinn für angewandte Mathematik hing wesentlich auch mit seinen astronomischen Interessen zusammen. Durch den schon genannten Tobias Mayer in Göttingen war er auf astronomische Probleme gekommen. Nun erschien 1761 in Augsburg eine auch Traktätchen von ihm genannte Schrift: *Insigniores orbitae cometarum proprietates.* Diese jetzt sehr selten gewordene Schrift, denen sich später noch andere Arbeiten über Kometenbahnen anschlossen, hat Herr Bauschinger in Ostwalds Klassikern herausgegeben[44]).

Das Studium dieser klassischen Schrift möchte ich allen jüngeren Mathematikern sehr empfehlen. In früheren Zeiten war eine Verbindung zwischen Mathematik und Astronomie ganz natürlich, ich erinnere an Euler, La Grange, Gauß. Seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts ist aber eine völlige Trennung eingetreten, und erst in der neuesten Zeit arbeiten wieder Mathematiker, wie die Herren Herglotz und Lichtenstein, abgesehen von der Relativitätstheorie, auf spezifisch astronomischen Gebiete. Diese Trennung zwischen Mathematik und Astronomie hat sich aber auch, wie ich bei dieser Gelegenheit doch hervorheben möchte, in der Ausbildung der Mathematiker für den höheren Schuldienst bemerkbar gemacht. Wenn in der Preußischen Prüfungsordnung von 1831 noch astronomische Kenntnisse verlangt werden, so war das in der Prüfungsordnung von 1866, die durchaus den Königsberger Geist trägt, — die Formulierung rührt wörtlich, wie ich aus den Ministerialakten feststellen konnte, von Jacobi's Schüler Richelot her, — ganz verschwunden[45]). Wenn in der allerneuesten Zeit von astronomischer Seite in dieser Hinsicht eine Initiative ergriffen wird unter der Führung des Herrn Kopf, so ist das sehr erfreulich. Es ist nur auch hier wieder zu beobachten, daß die Tradition offenbar unter dem Einfluß des Krieges völlig gerissen ist. Genau die gleichen Fragen, die die Astronomen auf einer Versammlung im Sommer 1927 in Göttingen erörtert haben, sind in Göttingen zwanzig Jahre vorher eingehend besprochen

44) Joh. Lamberts. Zur Bahnbestimmung der Cometen. Ostwalds Klassiker Nr. 133.

45) Vgl. W. Lorey, Staatsprüfung u. Prakt. Ausbildung der Mathematiker an den höh. Schulen in Preußen u. einigen norddeutschen Staaten. IMUK (= Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathemat. Unterrichtskommission. B. G. Teubner, Bd. 1, Heft 3 (1911. S. 31 f. u. 23.

W. Lorey, Das Studium der Mathematik an den deutsch. Universitäten seit Anfang des 19. Jahrh. IMUK Bd. 3, Heft 9. 1916. S. 99 u. S. 256 f.

Digitized by Google

worden, worüber Ausführliches in Imuk-Abhandlungen zu lesen ist, die freilich in manchen Kreisen gänzlich unbekannt zu sein scheinen[46]).

Lamberts Arbeit empfehle ich zum Studium aber auch wegen ihres synthetisch-geometrischen Charakters. Durch die gewiß weittragendere rechnerische Behandlung mathematischer Fragen tritt m. E. heutzutage die für die Erziehung mathematischen Arbeitens so wichtige geometrische Überlegung zu sehr zurück. Lambert geht von dem Gedanken aus, daß es auffallend ist, daß die schönen zum Teil längst bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte nicht gehörig ausgenützt werden für die Berechnung von Kometenbahnen. So entwickelt er im ersten Teil allgemeine Sätze über die Parabel, und dieser Teil dürfte vielleicht sogar für eine sogenannte mathematische Arbeitsgemeinschaft geeignet sein. Indem er dann die Flächen durch die Zeit ausdrückt, kommt er zu dem in der Astronomie berühmten Lambertschen Satze, den ich in der von Herrn Herglotz in seinem Encyklopädie-Artikel gewählten Form wiedergeben will:[47])

$$6kT = (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}}.$$

Hierin bedeuten r und r' die Radienvektoren von der Sonne aus, s die in der Zeit T durchlaufende Sehne und k die Gauß'sche Konstante. Schon bei Euler war, was Gauß später hervorgehoben hat, dieser wichtige Satz vorgekommen, angewandt auf die Parabel, Euler hat ihn aber für die Berechnung nicht ausgenutzt, während Lambert ihn durch geometrische Betrachtungen auch auf die beiden anderen Kegelschnitte ausdehnen konnte.

Und nun erscheint 1761 in Augsburg noch ein drittes Buch „*Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltenbaues*". Zwei Freunde tauschen brieflich ihre Ansichten aus, um, wie der Verfasser sagt, das vollständige Lehrgebäude von den Absichten des Schöpfers aufzustellen und die Stufenfolge dieser Absichten zu ermitteln, sodaß niemand im Zweifel darüber sein kann, welche Absicht die vornehmste sei, welche zurücktrete. Wir erkennen also hier den philosophischen Grundsatz der Teleologie, der zu Lamberts Zeiten als eine höchst fruchtbare Wahrheit galt: „Wir leben in der vollkommensten aller Welten." Wir stehen heute diesem teleologischen Begriff der Vollkommenheit skeptisch gegenüber. Um das schöne mathematische Bild zu gebrauchen, das Karl Schwarzschild in seinem Göt-

46) Bericht über diese Göttinger Besprechung der Vertreter der angewandten Mathematik im Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereing. Bd. 16 (1907), S. 510—519 Vgl. auch K. Schwarzschild, Über die astronomische Ausbildung der Lehramtskandidaten a. a. O. S. 519—522.

47) G. Herglotz. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Encykl. d. Math. Wiss. VI, 2, S. 388.

Digitized by Google

tinger Akademievortrag über Lamberts „Kosmologische Briefe“ [48]) benützt hat: Die Grade der Vollkommenheit sind uns ein Variationsproblem, dessen Nebenbedingungen nicht gegeben sind. Aber wenn auch so manche von Lambert in den Briefen geäußerten Ansichten als mythisch nicht mehr gelten, sein Gedanke, die Zusammenstöße für die Kosmogenie des Planetensystems zu verwerten und sein Vorschlag einer linsenförmigen, einer Ebene angeschmiegten Struktur des Fixsternhimmels bleiben, wie Schwarzschid betont, erhalten und die Teleologie ist nicht ganz tot; sie ist auch beim exaktesten Astronomen nach Schwarzschilds Ausspruch noch lebendig und noch immer nützlich.

Neben diesen bedeutenden Veröffentlichungen nahmen Lambert in jenen Jahren aber auch praktische Arbeiten in Anspruch. Er wird, wie sein Monatsbuch zeigt, zur Grenzregulierung zwischen Graubünden und Mailand herangezogen, und daneben entsteht ein Manuskript zu einem zweibändigen Werk, das er mit auf die Reise nimmt, als er im Januar 1764 über Nürnberg nach Berlin reist. Er macht in Leipzig Station und übergibt hier dieses Manuskript dem Druck. Es ist das vorhin schon genannte „Organon“.

„Unmittelbar für mich selbst geschrieben“, so sagt er in der Vorrede, „macht es auf eine vollständigere Art das aus, was Aristoteles und nach demselben Baco ein Organon nennen.“ Vier Fragen werden in dem Werke beantwortet:

1. Ob es dem menschlichen Verstande an Kräften fehle, ohne so vieles Straucheln auf dem Wege der Wahrheit sicher und gewiß zu gehen?
2. Ob demselben die Wahrheit selbst nicht kenntlich genug sei, um sie nicht so leicht mit dem Irrtum zu verwechseln?
3. Ob die Sprache, in die er die Wahrheit einkleidet, durch Mißverstand, Unbestimmtheit und Vieldeutigkeit sie unkenntlich und zweifelhafter mache, oder andere Hindernisse in Weg lege?
4. Ob sich der Verstand durch den Schein blenden lasse, ohne immer zu dem Wahren durchdringen zu können?

Eigentlich Mathematisches findet sich im Organon nicht. Aber die Erörterungen des dritten Teiles insbesondere haben doch manche Beziehungen zur Algebra der Logik, zu einer Begriffschrift, über die sich erst in einer nachgelassenen Arbeit Lamberts Ausführlicheres findet [49]). Aber in Sprachlicher Beziehung enthält das Werk sehr interessante Ausführungen, auf die die Sprachwissenschaftler doch einmal hingewiesen seien. Überhaupt scheint Lambert ein feines Sprachgefühl gehabt zu haben, wie sich aus manchen Briefstellen ergibt. Daß er im Organon den „englischen Contredanse“ als Beispiel einer Bezeichnung sehr vieler Figuren durch wenige Wörter nennt,

48) Nachrichten d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Geschäftl. Mitt. 1907, Heft 2.

49) Johann Heinrich Lamberts Logische und philosophische Abhandlungen zum Druck befördert durch Johann Bernoulli, 2. Bde. Berlin 1782.

Digitized by Google

sei nebenbei erwähnt[50]). Ich glaube freilich nicht, daß Lambert selbst ein Tänzer war; dazu war der Bär, wie ihn Friedrich der Große genannt hat, viel zu wenig Gesellschaftsmensch. Die Begriffsschrift, die Lambert sehr beschäftigt hat, die auch in unseren Tagen wieder durch Hilbert und seine Schüler gepflegt wird, stand in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts im Vordergrund des Interesses. Von Plouquet und von v. Holland haben wir schon gehört. Auch der schon genannte von Segner, dessen Namen im heutigen Physikunterricht durch das Segnersche Wasserrad weiterlebt, hatte in dieser Richtung publiziert, und daher suchte ihn Lambert in Halle auf, und blieb später in Briefwechsel mit ihm, der sich allerdings auf mehr praktische Dinge, wie die Einrichtung einer Feuerspritze erstreckte, was damals wiederholt Thema einer Preisarbeit war. Lamberts eigene zusammenhängende Arbeiten zur Logik sind erst nach seinem Tode durch Bernoulli veröffentlicht worden, und diese Veröffentlichung ist offenbar dem neuzeitlichen Verfasser einer Geschichte der Logik, der Lambert wiederholt nennt, Enriques, dessen Buch kürzlich Herr Bieberbach deutsch herausgegeben hat[51]), nicht zugänglich gewesen. Wir finden bei Lambert Zeichen für die Gleichgültigkeit, Zusatz, Absonderung, Gegenteil, Allgemeines, Besonderes usw.[52]). Ob diese Arbeiten Lamberts nur noch ein gewisses historisches Interesse haben als einer der frühesten Versuche logische Aufgaben durch rechnerische Symbole zu lösen, wie Schröder[53]) meint, möchte ich mit Rücksicht auf die neuesten Göttinger Arbeiten in dieser Richtung nicht ohne weiteres zugeben.

Im Januar 1764 traf Lambert in Berlin ein, von der dortigen starken Schweizer Kolonie, deren Führer der Direktor der philosophischen Klasse der Akademie Sulzer war, sehr herzlich aufgenommen. Der Idee nach war Lambert schon mit der Akademie in Verbindung getreten, indem er 1761 eine Preisarbeit philosophischer Art bearbeitete. Diese von ihm allerdings offenbar nicht eingereichte Arbeit hat Herr Bopp auch in Gotha gefunden und sie 1918 veröffentlicht. Sie führt den Titel „*Über die Methode der Metaphysik, Theologie und Moral richtiger zu beweisen*“[54]). Für das Jahr 1763 hatte die Akademie die Aufgabe unter dem Titel „Sind die metaphysischen Wissenschaften derselben Evidenz fähig wie die mathematischen?“ wiederholt. Mit diesem Thema bereitete die Akademie eine Kritik der damals noch herrschenden Leibniz-Wolf'schen Philosophie vor.

50) Organon, Bd. 2, S. 17.

51) Federico Enriques, Zur Geschichte der Logik. Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der Math. Denker. Deutsch von L. Bieberbach. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927.

52) Log. und philos. Abhandlungen. Bd. 1, S. 5.

53) Vorlesungen über Algebra der Logik. Bd. 1, S. 533.

54) Kant, Studien. Ergänzungshefte Nr. 42 (1918).

Digitized by Google

Die Stellung dieses Themas war, wie Harnack in seiner „Geschichte der Berliner Akademie“ sagt, eine wissenschaftliche Tat[55]). Als Bewerber trat Kant auf, der freilich nur das Accessit erhielt. Wir sehen also in der gleichen Zeit Kant und Lambert auf demselben Gebiete arbeiten: ihre geistige Gemeinschaft führte dann auch zu einem Briefwechsel, der von 1765—1770 dauerte[56]). „Ich halte Sie“, so schreibt Kant an Lambert am 31. Dezember 1765 „für das erste Genie Deutschlands, welches fähig ist, in derjenigen Art von Untersuchungen, die mich auch vornehmlich beschäftigen, eine wichtige und dauerhafte Verbesserung zu leisten.“ Lambert schlägt später Kant die gemeinsame Herausgabe einer philosophischen Zeitschrift vor, etwa ein Wiederaufleben der Acta eruditorum, die damit für die Logik die Bedeutung gewinnen könnten, die sie einst für die Integralrechnung gehabt haben. Als Beispiel nennt er aber auch die Bremischen Beiträge, „in denen die dermaligen Originaldichter Gellert, Rabener, Klopstock veröffentlichen“[57]), ein Beispiel, das gewiß die vielseitigen Interessen Lamberts bekundet.

Um die Wende unseres Jahrhunderts scheint bei manchen Philosophen offenbar unter der Führung Windelbands in Straßburg die Auffassung aufgekommen zu sein, daß trotz der anerkennenden Worte Kants Lambert für die durch Kant eingeleitete kritische Philosophie ohne Bedeutung sei[58]), eine Auffassung, die jedenfalls ganz abwegig für den Kenner Lamberts ist. Ich denke besonders auch an die gleichfalls von Herrn Bopp aufgefundene und veröffentlichte Schrift Lamberts „*Criterium veritatis*“[59]). In ihr findet auch der Mathematiker vieles, was ihn interessieren muß. So die Erörterung des Begriffes Rechenmaschine, vor allem aber die Ausführungen über die Euklidische Art. Euklid hat Lambert erst nach dem Studium der Wolfschen Bücher kennen gelernt. So untersucht er z. B. warum Euklid vom gleichseitigen Dreieck ausgeht. Mit solchen und ähnlichen Untersuchungen bereitet er seine schon vorhin angedeutete Arbeit über das Parallelenaxiom vor, die aber erst nach seinem Tode durch Bernoulli in Hindenburgs Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik veröffentlicht wurde[60]). Diese hervorragende Arbeit, die auch Stäckel in seiner Urkundensammlung

55) I. Bd., I. Hälfte, S. 410.

56) Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 1, S. 335—367.

57) a. a. O. S. 357 f. Die nova acta eruditorum, in denen Lambert auch publiziert hat, bestanden zwar im Jahre 1770 noch, sind aber 1771 zum letzten Mal erschienen.

58) Vgl. z. B. die von der Philos. Fakultät der Universität Straßburg preisgekrönte Schrift von Otto Baensch, Johann Heinrich Lamberts Philosophie u. seine Stellung zu Kant. Tübingen und Leipzig, C. B. Mohr. 1902. Dagegen aber Karl Krienelke, J. H. Lamberts Philos. d. Mathematik., Diss. Halle 1909.

59) Kant, Studien. Ergänzungshefte Nr. 36 (1915).

60) 1786, II. Stück, S. 137—164. III. Stück, S. 375—386.

Digitized by Google

zur nichteuklidischen Geometrie aufgenommen hat[61]), untersucht in ihrem ersten Abschnitt, was es heißt, das Parallelenaxiom zu beweisen; dann wird ein Beweis versucht, bei dem allerdings eine Lücke bleibt, auf die Hindenburg aufmerksam macht und die Lambert wohl selbst gefühlt hat. Der dritte und wichtigste Abschnitt behandelt die Hypothese des stumpfen und des spitzen Winkels. Die zweite Hypothese, d. h. die des stumpfen Winkels, „findet statt, wenn statt ebener Triangel sphärische genommen werden und dies ohne Rücksicht auf Schwierigkeiten der Parallelen". „Ich sollte daraus fast schließen", sagt nun Lambert, „die dritte Hypothese (die des spitzen Winkels) komme bei einer imaginären Kugelfläche vor."

Wenn ich vorhin andeutete, daß Lambert mit gelegentlich auftretenden imaginären Größen nichts recht zu machen weiß, so ist das hier bei dieser genialen Intuition ganz anders.

Trigonometrische Funktionen mit imaginären Argumenten haben Lambert vermutlich schon in Göttingen beschäftigt, wie aus einer Bemerkung Kästners zu schließen ist. In Berlin verfaßte er nun eine Abhandlung, die er 1767 in der Akademie vortrug[62]). Er zeigt darin, daß die Beziehung zwischen trigonometrischen Funktionen sinnvoll bleiben, auch bei rein imaginären Argument; die so gefundenen hyperbolischen Funktionen benutzt er dann in einer zweiten Abhandlung zur Lösung von Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie.

Die erste Abhandlung ist aber auch noch für eine andere glänzende Leistung Lamberts von großer Bedeutung. Liefert er doch darin, wie Herr Pringsheim vor 20 Jahren gezeigt hat[63]), „das erste und auf lange Zeit hinaus einzige Beispiel einer nach heutigen Begriffen wirklich strengen Entwicklung gewisser Funktionen wie tang v in konvergierende Kettenbrüche und damit einen, überaus scharfsinnigen, wirklich vollkommen einwandfreien Beweis, daß für rationale v tang v irrational ist". Die Behauptung Lamberts Beweis der Irrationalität von e und π sei erst durch

---

61) Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklid. Geometrie. In Gemeinschaft mit Friedrich Engel, herausgeg. von Paul Stäckel. Leipzig, B. G. Teubner. 1895. S. 137—208. Vgl. auch K. Bopp, J. H. Lamberts Stellung zum Raumproblem und zur Parallelentheorie in der Beurteilung der Zeitgenossen. Sitzungsber. München. Akad. Math.-Physik. Kl. (1914), S. 361—368.

62) Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendents circulaires et logarithmiques. Histoire de l'Acad. royals des sciences et belles lettres Année 1761 Berlin, erschienen 1768. Daß dieser Band, der die im Juli 1767 gelesene Abhandlung (vgl. Monatsbuch a. a. O. S. 28) enthält, als für das Jahr 1761 bezeichnet wird, ist kein Druckfehler, vgl. Harnack, a. a. O. S. 482.

63) Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. Münchener Berichte, Math.-phys. Kl., Bd. XXVIII, Jahrg. 1898, S. 325—337.

Digitized by Google

Legendre vollständig und streng gemacht worden, ist also tatsächlich falsch. Dieser historische Fehler ist dadurch entstanden, daß man nur die mehr populäre in glänzender Darstellung verfaßte Arbeit Lamberts „*Vorläufige Kenntnis für die, so die Quadratur und Rektifikation des Zirkuls suchen*“ berücksichtigt hat, ohne die Akademie-Abhandlung heranzuziehen. Die populäre Abhandlung beginnt sehr amüsant mit den Worten:

> „Ich kann mit einigem Grund bezweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde gelesen oder auch verstanden, die den meisten Anteil daran nehmen sollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Zirkuls zu suchen.“

Lambert hat diese Abhandlung in seinem dreibändigen in der zweiten Hälfte der 60er Jahre im Verlag der Buchhandlung der Berliner Realschule veröffentlichten Werk „*Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*“ veröffentlicht[64]). Mit Recht hat sie Herr Rudio in seine deutsche Ausgabe von vier Abhandlungen über die Kreismessung aufgenommen[65]). Daß ein Mann wie Lambert von Quadratoren oft belästigt wurde, zeigt auch ein Briefwechsel mit einem solchen, der sich — ein seltener Fall — belehren ließ[66]). Lambert selbst war schon 1757 in Göttingen auf das Problem gekommen, als ihm Kästner einen Beweis Sturms zeigte, daß die Peripherie mit dem Durchmesser inkommensurabel sei. Der Beweis gründet sich bei Sturm darauf, daß sich der Umkreis durch eine Reihe von lauter Irrationalitäten ausdrücken läßt. „Ich zeigte aber“, schreibt Lambert in einem Brief vom 10. Januar 1768 an v. Holland, „bei der Parabel, daß daraus nicht folge, daß die Summe auch irrational sei. Der Kettenbruch des tang. v, verbunden mit prop. 1 lib. VII Euclids leitete mich auf den Beweis“[67]).

Aus dem reichen Inhalt der „Beyträge“ möchte ich noch eine Arbeit aus der mathematischen Statistik nennen über das sogenannte Gesetz der

---

64) II. Teil, I. Abschnitt (1770), S. 140—169.

65) Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgeg. und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen von F. Rudio. Leipzig, B. G. Teubner. 1892.

66) Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 2, S. 249—255. Es ist der Stettiner Professor Bischoff, „ein guter Optikus“, den Lambert auch in seiner Abhandlung „Vorläufige Kenntnisse usw.“ a. a. O. S. 145 nennt. Einem anderen Quadrator, dem Rektor des Gymnasiums in Herford, Höcker spricht er seine Überzeugung aus, daß π nicht nur nicht rational, sondern sich auch nicht durch Wurzelgrößen darstellen läßt, er habe das aber noch nicht bewiesen. Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 2, S. 289. Noch in der letzten Akademiesitzung, der Lambert beiwohnte, berichtete Lagrange über die Arbeit eines solchen Quadrators „d'ou il résulte qu'il na pas les premiers notions du subject en question, Nouv. Mém. de l'Acad. Anné 1777, S. 4.

67) Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 1. S. 254.

Digitized by Google

Sterblichkeit und ähnliches[68]), zu der er wohl durch die Untersuchungen seines Akademiegenossen Süßmilch angeregt worden ist. Wie Herr Loewy[69]) im vorigen Jahre gezeigt hat, hat Lambert tatsächlich schon lange vor Gompertz den so wichtigen Begriff der Intensität benutzt allerdings nicht der Sterbeintensität, sondern den reziproken Wert, die sogenannte Lebenskraft[70]).

Die Berliner Akademie der 60er und 70er Jahre bringt in allen vier Klassen[71]) noch viele Arbeiten Lamberts aus verschiedenen Gebieten. Lambert war seit 1765 Mitglied der Akademie. Es war freilich nicht leicht gewesen, die Zustimmung des Königs zu erlangen. Im März 1764 fand die berühmte Audienz statt. „Jussu regis iter potsdamum" heißt es im Monatsbuch. Daß Lambert, der Autodidakt in seinem naiven, aber berechtigten Selbstbewußtsein einen schlechten Eindruck bei Friedrich dem Großen machte, erzählte auch Harnack in seiner Geschichte der Berliner Akademie[72]). Diese Anekdote findet sich aber auch mit vielen anderen über Lambert, den sonderbar gekleideten, eifrigen Kirchgänger, den äußerlich gewiß oft unkultivierten „Mann im Mond", der alles logisch behandelt, auch ein Loch im Strumpf nach der logischen Figur Barbara, wie die spottlustigen Berliner

---

68) Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburthen und Ehen. Beyträge III. Teil, S. 476—569.

69) Johann Heinrich Lamberts Bedeutung für die Grundlagen des Versicherungswesens. Zu seinem 150. Todestage am 25. September 1927. Festgabe für Alfred Manes, Berlin, E. Mittler & Sohn. 1927. S. 280—287.

70) Daß in der auch bei Löwy aus Lamberts Arbeit angeführten Lambertschen Sterbeformel

$$y = 1000\left(\frac{96-x}{96}\right) - 6176\left(e^{\frac{-x}{31{,}682}}\right) - \left(e^{\frac{-x}{2{,}43114}}\right)$$

die die Zahl der Lebenden des Alters x angibt, sich ein Druckfehler befindet, hat man bis jetzt offenbar noch nicht bemerkt. Lambert selbst macht aber in einem Brief an den Freiherrn von Picassi in Wien vom 6. XII. 1776 (Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 4, S. 367) darauf aufmerksam: Der Exponent soll eigentlich 13,682 sein (nicht 31,682). In diesem Brief zeigt Lambert auch, wie er zu seiner Formel gekommen ist. In einem Brief vom 2. X. 1773 an den Sekretär des Geheim. Staatsrats in Hannover Klockenring gibt er ein Gutachten über Änderungen bei einer Witwenkasse. Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 2, S. 263 f.

71) Classe de, Philosophie expérimentale, Mathématique, Philosophie spéculative, Belles Lettres. In der Classe de belles Lettres liest Lambert über „Observations sur quelques dimensions dans le monde intellectuel. Hist. Anné 1763. Erschienen 1770. S. 421—438. Darin führt er aus, daß die Kultur der schönen Wissenschaften in jedem Lande nach Höhepunkten einen Niedergang (période fatal) erlebt. Nur die Mathematik macht von Jahrhundert zu Jahrhundert Fortschritte. Lambert hat nicht nur für drei Klassen geschrieben, wie Harnack a. a. O. S. 438 sagt.

72) a. a. O. S. 366 f.

Digitized by Google

sagten, in dem von großer Verehrung und vollem psychologischen Verständnis zeugenden „Bemerkungen über Lamberts Charakter", die sein philosophischer Schüler, der Berliner Gymnasialprofessor Müller veröffentlicht hat[73]). Es dauerte mehr als ein halbes Jahr, bis der König die Zustimmung gab. Ausschlaggebend war die Bemühung des russischen Gesandten, Lambert nach Petersburg zu ziehen, wo ihm die Stelle eines mathematischen Direktors und eines Sekretärs der Akademie mit den damit verknüpften Einkünften angeboten wurde. Friedrich der Große hat später Lamberts Wert sehr anerkannt, was sich u. a. aus der bedeutenden Erhöhung seines Gehaltes ergibt. Lambert selbst hat keine Schritte unternommen für die Aufnahme in die Akademie, „denn", so schreibt er an einen Freund[74]), „Ämter nach Verdienst auszuteilen ist eine Pflicht, um die man sich nicht erst sollte bitten lassen. Doch in der Welt geht es mehrenteils aber anders, weil, wer weniger meritiert, diesen Mangel durchs Bitten und andere Künste zu ersetzen und öfters auch zu verdecken sucht".

Am 24. Januar 1765, bei der Feier von Königs Geburtstag, wie Lambert im Monatsbuch hervorhebt, fand die feierliche Aufnahme statt. Seine in französischer Sprache gehaltene Antrittsrede behandelt den Zusammenhang der Wissenschaften, die die vier Klassen der Akademie beschäftigen; er kündigt darin auch seine geplanten Untersuchungen über Pyrometrie an. Lambert wird Mitglied der vom König angeordneten ökonomischen Sektion zur Reform der Akademie; er ist eifrig für die Sternwarte tätig: das Berliner Jahrbuch ist auf seine Anregung entstanden. In den Jahren 1764 und 1765 schreibt er das letzte große selbständige Werk, das er freilich erst 6 Jahre später veröffentlichen kann. Es ist die *„Anlage zur Architektonik oder Theorie des einfachen und des Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntniß"*. Lange hat er dafür keinen Verleger gefunden. In seinen Briefen an v. Holland beklagt er sich sehr über das Überwuchern aesthetischer, belletristischer und populärer Schriften, das Zurückdrängen ernster Anstrengung erfordernden Veröffentlichungen, auch das Leichtmachen des Latein lernens in den Schulen u. ä. Und ganz in seinem Sinne antwortet v. Holland, daß ein ἀγεωμετρητος, der nicht einmal fähig gewesen wäre, in Plato's Hörsaal als Schüler zu erscheinen, jetzt ein angesehener Lehrer der Weltweisheit werden kann[75]): eine Bemerkung, die in unserer Zeit der Weltanschauungspädagogik nicht ohne Interesse ist.

„Die Architektonik", die 1771 in Riga erschien, ist mathematisch besonders interessant, weil darin in dem XXXI. Hauptstück „Dem Zahlen-

73) Anhang zu Lamberts Logischen u. philos. Abhandlungen, II. Bd., S. 347 bis 382. Viele Anekdoten auch bei Ahrens „Scherz und Ernst in der Mathematik" Leipzig, B. G. Teubner. 1904.

74) Brief an den Professor und Ratsherrn Jetzler in Schaffhausen vom 19. V. 1766. Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 5, S. 280.

75) Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 5, S. 179.

Digitized by Google

gebäude“ [76]) die Reihe

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots = x+2x^2+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+4x^8+3x^9\cdots$$

auftritt, die nach Potenzen von x entwickelt in den Koeffizienten einen merkwürdigen Zusammenhang mit den Primzahlen zeigt: Der Exponent ist eine Primzahl, wenn der Koeffizient 2 ist, und allgemein gibt der Koeffizient die Zahl der Teiler des Exponenten an. Diese vielfach das Interesse der Mathematiker fesselnde Reihe, über deren Verallgemeinerungen Herr Knopp [77]) vor einigen Jahren eine große funktionentheoretische Untersuchung veröffentlicht hat, wird heute Lambertsche Reihe genannt. Ob diese Bezeichnung historisch richtig ist, erscheint mir fraglich; ich habe bei Lambert sonst nichts über diese Reihe gefunden. Er hat sich allerdings viel mit Primzahlen beschäftigt und z. B. mit Hindenburg in Leipzig über die Herausgabe von Primzahltabellen wiederholt Briefe gewechselt [78]). Ich möchte annehmen, daß die betreffende Reihe auf Euler zurückgeht, in dessen Introduktio sich schon derartige Untersuchungen finden. Euler selbst gibt, wie ich erst kürzlich gefunden habe, den Ehrennamen Lambertsche Reihe jenen merkwürdigen Reihen, die aus Lamberts in den Acta helvetica Bd. 3 veröffentlichten Untersuchungen über trinomische Gleichungen hervorgehen. Dagegen stammt die heutige Bezeichnung offenbar von Crelle [79]).

Die hohe Achtung, die Lambert bei Friedrich dem Großen erworben hatte, verschaffte ihm noch ein neues Arbeitsfeld. Anfang 1770 bereitete man in Preußen die Errichtung eines Oberbaudepartements vor, wie in einem königl. Edikt vom 17. April 1770, das im Geheimen Staatsarchiv [80]) aufbewahrt ist, begründet wird:

76) II. Bd., S. 507. Lambert gibt die Entwicklung bis $8x^{24}$. Er berichtet dort auch über die Reihe

$$\sum \frac{\nu x^\nu}{1-x^\nu}$$

77) K. Knopp, Über Lambertsche Reihen. Crelle 142. S. 283—315.

78) Der Briefwechsel beginnt mit einem Brief Hindenburgs an Lambert. Vom 3. Aug. 1776. Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 5, S. 137—221. Über Hindenburg (1741—1808), den Gründer der kombinatorischen Schule, vgl. Lorey, Studium d. Mathematik. JMUK III, 9, S. 27 f.

79) De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus Acta Acad. Petropol. pro anno MDCCLXXIX, S. 29—51. (Erschienen 1783.) Crelle hat in seinem Journal Bd. 2, S. 99 unter Aufgabe 16 das Problem gestellt, die von Lambert angegebene Reihe durch endlichen Ausdruck zu summieren; in Bd. 3, S. 95 berichtet er im Anschluß an eine Arbeit von Clausen über die ihm von diesem mitgeteilte Umformung der „Lambertschen Reihe“ in

$$\sum x^{\nu^2}\frac{1+x^\nu}{1-x^\nu}$$

80) Preuß. Geheim. Staatsarchiv XII, Nr. 1, Acta wegen Errichtung eines Oberbaudepartements.

Digitized by Google

„Nachdem die bisherigen Erfolge gelehrt, daß das ganze Bauwesen teils durch die Unwissenheit und Nachlässigkeit des größten Teils der derzeitigen Baubedienten und den hinzukommenden Mangel einer hinreichenden und gewissenhaften Aufsicht, so oft durch unnötige Bauten ansehnliche Gelder verloren werden und weil in der Wissenschaft und Anordnung der Bauten noch mancherlei eine genauere Ermittelung erfordert und noch viele Problemata über die Brauchbarkeit der verschiedenen Baumaterialien im Lande; ungleich der Art nach Beschaffenheit derselben und der Bestimmung eines Gebäudes so zu bauen, daß an der Festigkeit nichts mangele und doch zugleich nichts ins Überflüssige getrieben werde, zu resolvieren sind, mithin überhaupt theoretisch Geleerthe, die eine gute Stärke in der höheren Mathesie haben zur Excolierung vornehmlich der Wasserbaukünste und der übrigen Teile vermittels wechselseitiger Communikation der Ideen, Speculation und Erfahrungen beytragen können, so ernennen wir vor itzo bey diesem Oberbaudepartement aus besonderem allergnädigstem Vertrauen den Professor Lambert als Membrum honorarium usw."

Am 8. Juni 1770 wurde im Bankohaus, wohin Lambert durch ein sehr liebenswürdiges Schreiben gebeten war zu erscheinen, die neue Behörde eröffnet. Protokollarisch wurde dabei niedergelegt, daß Seine Majestät der König bei Lambert, dem zur Akademie Verpflichteten, ohne erneute Verpflichtung zu seiner Treue und Rechtschaffenheit Vertrauen habe. An Renumeration wurden ihm 150 Thaler zugesichert. Wie die Akten des Geheimen Staatsarchivs zeigen, ist er nur gelegentlich herangezogen worden. So insbesondere bei einer der ersten Arbeiten des Departements. Schon am 11. Juni 1770 erging ein von Lambert mitunterzeichneter Bericht an den König über die Herstellung von Maßen. Lambert beauftragt einen Tischlermeister, Längenmaße aus Birnbaumholz herzustellen vor allem läßt er durch einen Mechaniker Ring dessen orthographisch nicht ganz einwandfreie Rechnung von ihm angewiesen wird, einen Normalstab 12 Fuß lang, auf der einen Seite dezimal, auf der anderen duodezimal geteilt, herstellen. Dem Kammergericht, das sich an den König wegen unzulänglicher Maße gewendet hatte, läßt er eröffnen, daß es richtiger gewesen wäre, sich an das Oberbaudepartement zu wenden. In dieser Sache müsse alles in gehöriger Form vorgehen. Ein ander Mal weist er die Beschwerde eines Müllers zurück, er solle vielmehr nicht so verschwenderisch mit dem Wasser umgehen. Auch mit der Prüfung der Baubeamten ist er beschäftigt. Wie wohlwollend Lambert als Examinator war, zeigt ein Brief an Klügel, der wegen eines Schülers angefragt hatte[81]):

„Wenn auch das erste Examen nicht ganz gut ausfällt, so wird das noch Fehlende angezeigt und bisher ist noch immer ein zweites Examen gestattet worden. Das Examen dauert desto länger, je weniger der Examinand weiß,

81) Brief Lamberts an Klügel vom 8. VII. 1775. Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 2, S. 497 f.

Digitized by Google

weil man dann zusehen muß, was ihm noch mangelt und ob Hoffnung ist, daß er es nachholen kann."

Daß Lambert das Amt als Oberbaurat gern angenommen hat, läßt uns ein Brief an einen Unbekannten vom 14. Mai 1772 erkennen [82]):

„Ich habe es mir gern gefallen lassen, da die Stelle ihre Vorzüge hat und Anlaß gibt, mir und anderen Gutes zu stiften."

Lambert ist Berlin treu geblieben trotz anderer lockender Rufe. In Genf bot man ihm eine Professur an, und ein Schweizer Freund sucht ihn unter recht günstigen Bedingungen für die Mitdirektion seines Seminars zu zugewinnen. Ihm schreibt Lambert am 18. Juli 1772 [83]):

„Ich habe solange ich hier bin, alle Lektionen, so man oft genug von mir verlangte, abgelehnt, um meine Zeit zur längst vorgesetzten Ausarbeitung mancher Schriften ganz fertig zu haben."

Aber doch hat Lambert zahlreiche Schüler gehabt, mit denen er in ungezwungener Form, ich möchte sagen, nach Art der platonischen Akademie, verkehrte. Sie haben ihn alle, die sie hinter dem mitunter oft absonderlichen Wesen die reine gütige Seele erkannt haben, überaus verehrt, wie man aus so manchen Berichten weiß. „Sein Rat und seine Bibliothek boten mir eine unendliche Hilfe", sagt sein Nachfolger in der Akademie, der Astronom Schulze in seiner Antrittsrede [84]). Ein Künstler seiner Vaterstadt, der ihn zwar nicht mehr selbst gekannt hat, hat wohl auf Grund von anderen zu Lebzeiten hergestellten Bildern das Zusammenarbeiten Lamberts mit seinen Schülern und Freunden in einem Bilde dargestellt, dessen Original sich in Mülhausen befindet [85]). Nach der Reproduktion, die der Ausgabe des Monatsbuches beigefügt ist, kann ich es im Lichtbild zeigen. Im Jahre 1775 wurde Lamberts Gesundheitszustand, der wohl nie sehr kräftig war, bedenklich, offenbar infolge von Tuberkulose. Aber er hat mit Aufbietung aller Kräfte weitergearbeitet. Am 18. September 1777 wohnte er noch einer Sitzung der Akademie bei. Eine Woche später meldet

---

82) Deutsch. Gel. Briefw. Bd. 2, S. 53. Wie Bernoulli berichtet, „zeigen sich unter Lamberts hinterlassenen Papieren Spuren seiner Mildtätigkeit in größeren Summen gegen Leute, deren Stand und Bedürfnisse dergleichen erforderten". Lamberts Log. u. phil. Abh. Bd. 2, S. 356, Anm.

83) Briefwechsel mit Professor Nesemann in Marschlins in der Schweiz. D. Gel. Briefw. Bd. 2, S. 61 ff.

84) Je ne puis me glorifier de l'avoir eu pour Maître; mais je dois reconnoître avec la plus vive sensibilité que ses conseils et sa bibliothèque m'ont été d'un secour infini. Il n'a pas borné là sa bienfaisance à mon égard; il ma procuré l'avantage d'être de quelque utilité à cette Academie. Nouv. Mém. de l'Acad. roy. d. sc. et bel. lit. Berlin Anné 1777. S. 10.

85) Zu seinen Lebzeiten wurden mehrere Bilder, auch Karrikaturen hergestellt. Im Jahre 1770 wünscht Lavater ein Bild durch Chodowiecki für seine Physiognomik. Lambert willigte aber nicht ein. Vergl. Huber (s. Anmerkung 1) Anhang, Verzeichnis der Bilder Lamberts.

Digitized by Google

die Berlinisch Privilegierte Zeitung in ihrer Nummer vom Sonnabend, 27. September 1777: Vorgestern Abend um zehneinhalb Uhr verstarb allhier Herr Lambert, Kgl. Oberbaurat und Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften. Seine für die Wissenschaft bekannten großen Verdienste und Seine rechtschaffene Denkungsart werden sein Andenken unvergeßlich machen [86]).

Als am 26. August 1828 sein Geburtstag zum 100. Male wiederkehrte, veranstaltete man in seiner Vaterstadt eine große Gedenkfeier in Gegenwart von Gelehrten aus Basel, Straßburg, Freiburg und Heidelberg. Es wurde ihm ein Denkmal gesetzt, dessen Sockel die Worte trägt:

Dem durch Selbständigkeit entwickelten großen Geiste
Ingenio et studio
Sa cendre repose à Berlin, son nom est écrit dans les fastes d'Uranie.

Die Berliner Akademie feierte am Leibniztage des Jahres 1828 sein Andenken, in dem der aus Mülhausen stammende Akademiker Erman Leibniz und Lambert verglich [87]). Der Gedanke, ihm zusammen mit Leibniz und Sulzer in Berlin ein Denkmal zu setzen, der 1785 aufgetaucht war, ist leider nicht ausgeführt worden. Möge unsere heutige schlichte Gedenkfeier die Anregung geben, daß in Berlin in irgend welcher Form, vielleicht im Namen einer Straße, der Name dieses großen Mannes, der so lange in Berlin gewirkt hat, weiterlebt [88]). Mögen aber vor allem die Lambertschen Schriften weiter studiert werden, damit der gesunde Geist, der seine Forschung in Theorie und Anwendung beherrscht, unserer Wissenschaft erhalten bleibt.

Anmerkung bei der Korrektur.

Der auf Seite 4 erwähnte Briefwechsel zwischen Kästner und Lambert ist inzwischen durch Herrn Bopp veröffentlicht worden:

J. H. Lamberts und A. G. Kaestners Briefe aus den Gothaer Manuskripten herausgegeben. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Math.-Naturw. Klasse, Jahrgang 1928. 18. Abhandlung.

---

86) Lagrange sagt am Schluß seines Nekrologs auf Lambert:
Nous le vîmes encore à l'assemblée du 18. Septembre, plus mort que vif; et il eut même un symptome convulsiv qui effraya ceux qui s'en apperçurent. Il m'écrivit le Lundi 22, m'envoyant un mémoire de M. de Segner à présenter, parce qu'il prévoyait qu'il n'auroit pas la force de venir à l'assemblée suivante. Le jour de cette assemblee 25. September, fut en effet celui de sa mort, prévue néonmoins pour lui. Nouv. Mém. de l'Acad. Berlin Année 1778. S. 72—90.

87) Die nicht gedruckte Rede bringt Huber nach dem Manuskript im Auszug. a. a. O. S. 63 f.

88) Der Magistrat von Berlin hat auf Grund dieser vom Vorsitzenden der Berliner Math. Gesellschaft ihm übermittelten Anregung beschlossen, eine „Lambertstraße" für das Neubaugelände an der Jungfernheide vorzusehen.

Digitized by Google

Hingewiesen sei auch auf Ernst Barthel. Johann Heinrich Lambert, Ein Lebensbild zur 200. Wiederkehr seines Geburtstags. Archiv für Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik. 11. Bd. Neue Folge, S. 37—62. Erschienen im November 1928. Dieses Lebensbild bringt eine gewiß sehr zutreffende Charakterisierung der Persönlichkeit Lamberts und behandelt besonders seine philosophischen, aber auch die mathematischen und naturwissenschaftlichen Arbeiten. Der Abschnitt „Der Mathematiker" erweckt aber an einigen Stellen Bedenken.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXVIII. JAHRGANG

Gedruckt mit Unterstützung der Preußischen Akademie der Wissenschaften

2. STÜCK

INHALT:

	Seite
Über ganze rationale Funktionen. Von **G. Haenzel**	31—45
Anwendung der Heaviside'schen Methode zur Integration der Wärmeleitungsgleichung. Von **A. Korn**	46—54
Verallgemeinerung von Iterationen für nicht ganze Iterationszahlen. Von **A. Korn**	55—60
Begründung des Satzes, daß es in Wirklichkeit Prozesse gibt, die sich mit beliebig großer Geschwindigkeit fortpflanzen. Von **E. Lasker**	61—70
Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen. Von **E. Rothe**	71—77
Ebene Potentialströmungen in rotierenden, offenen Kammern. Von **H. Reißner**	78—85
Einige Randwertprobleme der Elastizitätstheorie in zwei Dimensionen. Bemerkungen zur Methode der Airy'schen Spannungsfunktion. Von **M. Sadowsky**	86—99
Über ein neues Übertragungsprinzip in der projektiven Invariantentheorie. Von **W. Fr. Meyer**	100—113
Affinminimalflächen und Gewindekurven. Von **E. Salkowski**	114—123
251. Sitzung am 28. November 1928	29
252. „ „ 12. Dezember „	29
253. „ „ 30. Januar 1929	29
254. „ „ 27. Februar „	29
255. „ „ 20. März „	29
256. „ „ 24. April „	29
257. „ „ 29. Mai „	30
258. „ „ 26. Juni „	30

1929

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

7) Alle Zuschriften, welche den Inhalt der Sitzungsberichte betreffen, sind zu richten an den derzeitigen Schriftleiter, Herrn **Prof. Dr. Ernst Jacobsthal, Berlin W. 62, Kurfürstenstraße 78.**

Mitteilungen:

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten entweder an den Schriftführer oder an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Obersekretär M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse und nicht an die Adresse des Schriftführers zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

ACHTUNDZWANZIGSTER JAHRGANG

Gedruckt mit Unterstützung der Preußischen Akademie der Wissenschaften

1929

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Haenzel, G., Über ganze rationale Funktionen	31—45
Korn, A., Anwendung der Heaviside'schen Methode zur Integration der Wärmeleitungsgleichung	46—54
Korn, A., Verallgemeinerung von Iterationen für nicht ganze Iterationszahlen	55—60
Lasker, E., Begründung des Satzes, daß es in Wirklichkeit Prozesse gibt, die sich mit beliebig großer Geschwindigkeit fortpflanzen	61—70
Lorey, W., Johann Heinrich Lambert	2—27
Meyer, W. Fr., Über ein neues Übertragungsprinzip in der projektiven Invariantentheorie	100—113
Reißner, H., Ebene Potentialströmungen in rotierenden, offenen Kammern	78—85
Rothe, E., Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen	71—77
Sadowsky, M., Einige Randwertprobleme der Elastizitätstheorie in zwei Dimensionen. Bemerkungen zur Methode der Airy'schen Spannungsfunktion	86—99
Salkowski, E., Affinminimalflächen und Gewindekurven	114—123
250. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 31. Oktober 1928	1
251. Sitzung am 28. November 1928	29
252. „ „ 12. Dezember „	29
253. „ „ 30. Januar 1929	29
254. „ „ 27. Februar „	29
255. „ „ 20. März „	29
256. „ „ 24. April „	29
257. „ „ 29. Mai „	30
258. „ „ 26. Juni „	30

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

251. Sitzung am 28. November 1928.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 23 Mitglieder.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Salkowski: Gewindekurven und Affinminimalflächen.

Herr Rembs: Unverbiegbare offene Flächen.

252. Sitzung am 12. Dezember 1828.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 19 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Hammerstein: Über eine nicht lineare Randwertaufgabe (Pendel).

Herr Haenzel: Einige neue Sätze über die Interpretation binärer Formen.

253. Sitzung am 30. Januar 1929.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 19 Mitglieder.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Korn: 1. Anwendung der Heaviside'schen Methode auf die Integration der Wärmeleitungsgleichung.

2. Verallgemeinerungen von Iterationen für nicht ganze Iterationszahlen.

254. Sitzung am 27. Februar 1929.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 33 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Lasker: Begründung des Satzes, daß es in Wirklichkeit Prozesse gibt, die sich mit beliebig großer Geschwindigkeit fortpflanzen.

255. Sitzung am 20. März 1929.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Hammerstein: Über einen Approximationssatz von Erich Rothe (Breslau).

Herr Mühlendyck: Über eine Familie analytischer Regelflächen.

256. Sitzung am 24. April 1929.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Bieberbach: Gedenkworte zum hundertsten Todestage Abels.

Digitized by Google

257. Sitzung am 29. Mai 1929.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Reißner: Potentialströmungen in rotierenden, offenen Kammern.

Herr Sadowsky: Einige Randwertprobleme der zweidimensionalen Elastizitätstheorie nebst Bemerkungen zur Methode der Airy'schen Spannungsfunktion.

Herr Zacharias: Der „Euclides Danicus", ein neuentdeckter Vorgänger Mascheroni's.

258. Sitzung am 26. Juni 1929.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 17 Mitglieder.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr W. Fr. Meyer: Über ein neues Übertragungsprinzip in der Invariantentheorie.

Digitized by Google

Über ganze rationale Funktionen[1]).

Von Gerhard Haenzel in Berlin.

I. Über Kovarianten und Invarianten ganzer rationaler Funktionen.

1. Zwei ganze rationale Funktionen zweiten Grades:

$$f(z) = a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2$$
$$\varphi(z) = \alpha_0 z^2 + 2\alpha_1 z + \alpha_2$$

haben bekanntlich eine simultane Kovariante zweiten Grades:

$$\vartheta(z) = (a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0) z^2 + (a_0\alpha_2 - a_2\alpha_0) z + (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1).$$

Werden die beiden Nullstellen von $\vartheta(z)$ durch lineare Transformation nach $+1$ und -1 verlegt, und nimmt infolgedessen die Gleichung $\vartheta(z) = 0$ die Form $z^2 - 1 = 0$ an, so folgt $a_0 = a_2$, $\alpha_0 = \alpha_2$, mit anderen Worten:

„Haben zwei ganze rationale Funktionen zweiten Grades f, φ eine simultane Kovariante mit zwei voneinander verschiedenen Nullstellen z_I, z_{II}, so gehen sowohl die beiden Nullstellen von f als auch die beiden Nullstellen φ ineinander über durch Inversion am Kreise über der Verbindungsstrecke der Nullstellen z_I, z_{II} als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser“.

Wird über der Strecke $z_I z_{II}$ als Durchmesser der Kreis geschlagen, so stellt die Inversion an diesem Kreise und die Spiegelung an der Gerade $z_I z_{II}$ die Transformation dar:

$$z' = \frac{(z_I + z_{II}) z - 2 z_I z_{II}}{2z - (z_I + z_{II})} \quad \text{oder} \quad \frac{z' - z_I}{z' - z_{II}} = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_I}{z - z_{II}}.$$

Diese „Kovariantentransformation“ δ ist also elliptisch; sie führt sowohl jeden der Kreise durch die beiden Fixpunkte z_I, z_{II} in sich über, als auch jeden diese Kreise senkrecht schneidenden Kreis. Sie vertauscht die Punkte, Geraden und Kreise der komplexen Ebene paarweise involutorisch miteinander. Sind x, x' ein Paar konjugierter Punkte der Transformation δ (Fig. 1), z_I, z_{II} ihre beiden Fixpunkte, so gehört der Kreis durch x, x' und z_I dem ersten jener beiden Kreisbüschel an und enthält auch den zweiten

1) Vorgetragen in der 252. Sitzung am 12. Dezember 1928.

Digitized by Google

Fixpunkt z_{II}. Der diesen Umkreis des Dreiecks $xx'z_I$ in x, x' senkrecht schneidende Kreis liegt im zweiten Büschel, sein Mittelpunkt M_x ist der Pol der Dreieckseite xx' für den Umkreis des Dreiecks und die Gerade $M_x z_I$ schneidet den Umkreis im zweiten Fixpunkte z_{II} der Transformation.

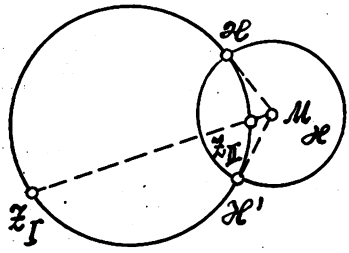


Fig. 1

Wurde die Transformation δ soeben durch ihre beiden Fixpunkte, oder durch den einen Fixpunkt und ein Paar konjugierter Punkte xx' bestimmt, so können auch umgekehrt die Fixpunkte aus zwei Paaren konjugierter Punkte konstruiert werden.

Die Punktepaare AA', BB' seien Paare konjugierter Punkte der Transformation. Sie bestimmen das einfache Vierseit (Fig. 2) AB, $A'B'$, AB', $A'B$ und es läßt sich zeigen, daß auch die Ecken C und C' durch die Transformation einander zugeordnet werden. Die vier Kreise, die sich um die vier von den Seiten des Vierseits gebildeten Dreiecke ABC', $A'BC$, $AB'C$ und $A'B'C'$ beschreiben lassen, schneiden einander in dem gemeinschaftlichen Punkte O. Die vier Geraden $A'BC'$, $AB'C'$, ABC und $A'B'C$ stellen vier Kreise durch den unendlich fernen Punkt der komplexen Zahlenebene dar. Ihnen entsprechen bzw. jene vier mit O inzidenten Kreise $AB'C$, $A'BC$, $A'B'C'$ und ABC'. Demnach ordnet die Transformation δ dem Punkte O den Punkt ∞ zu, und O ist der Mittelpunkt ihres Inversionskreises. Die Verbindungsgerade der beiden gesuchten Fixpunkte z_I, z_{II} hälftet sowohl den Winkel AOA' wie den Winkel BOB'. Spiegelt man A' an ihr nach $\overline{A}'$ so liegen O, A und $\overline{A}'$ in einer Gerade. A und $\overline{A}'$ gehen durch Inversion am Inversionskreise der Transformation auseinander hervor. Dieser Inversionskreis kann jetzt leicht konstruiert werden und schneidet jene Winkelhalbierende o in den Fixpunkten z_I und z_{II}.

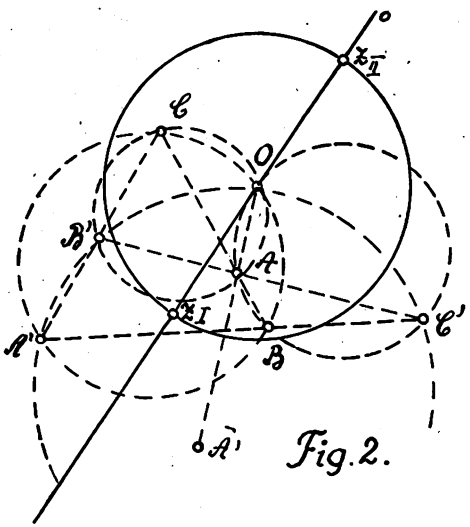


Fig. 2.

Digitized by Google

2. Die ganze rationale Funktion dritten Grades

$$f(z) = a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 3a_2 z + a_3$$

hat die Hesse'sche Kovariante

$$H(z) = (a_1^2 - a_0 a_2) z^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z + (a_2^2 - a_1 a_3)$$

und die Jacobi'sche Kovariante

$$J(z) = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) z^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) z^2$$
$$- 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) z - (a_0 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3).$$

Verlegt man die beiden Nullstellen z_I, z_{II} von $H(z)$ nach $+1$ und -1, so wird $a_0 = a_2$ und $a_1 = a_3 = \sqrt{1 + a_0^2}$, und es folgt:

$$f(z) = a_0 z^3 + 3\sqrt{1 + a_0^2}\, z^2 + 3a_0 z + \sqrt{1 + a_0^2},$$
$$\frac{J(z)}{2} = \sqrt{1 + a_0^2}\, z^3 + 3a_0 z^2 + 3\sqrt{1 + a_0^2}\, z + a_0.$$

Mit anderen Worten:

„Hat die Hesse'sche Kovariante $H(z)$ einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades $f(z)$ zwei voneinander verschiedene Nullstellen z_I, z_{II}, so gehen die drei Nullstellen z_1, z_2, z_3 von $f(z)$ in die drei Nullstellen ζ_1, ζ_2, ζ_3 der Jacobi'schen Kovariante $J(z)$ über durch Inversion am Kreise über der Strecke $z_I z_{II}$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser“ [2]).

Hieraus und aus den in 1. dargelegten Eigenschaften der Transformation δ folgen leicht die Sätze:

„Die Nullstellendreiecke einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades $f(z)$ und ihrer Jacobi'schen Kovariante $J(z)$ haben einen gemeinschaftlichen Umkreis k^2, der jeden Kreis durch die beiden Nullstellen der Hesse'schen Kovariante rechtwinklig schneidet. Jede Nullstelle z_i von $f(z)$ bildet mit den drei Nullstellen von $J(z)$ auf dem Umkreise k^2 einen harmonischen Wurf und liegt mit einer Nullstelle ζ_i von $J(z)$ auf einem Kreise $k_i^2 (i = 1, 2, 3)$ durch die beiden Nullstellen z_I, z_{II} von $H(z)$. Auf diesem Kreise k_i^2 bilden die Punkte z_I, z_{II}, z_i, ζ_i wiederum einen harmonischen Wurf“. (Fig. 3).

Das dem Umkreise k^2 von $z_1 z_2 z_3$ in diesen Punkten umschriebene Dreieck $P_1 P_2 P_3$ hat demzufolge die Eigenschaft, daß die Gerade $P_i z_i$ den Umkreis k^2 in der zugehörigen Nullstelle ζ_i von $J(z)$ schneidet. Die drei Verbindungsstrahlen $z_i \zeta_i$ gehen durch ein und denselben Punkt L des Dreiecks (Lemoine'scher Punkt), ihre drei

2) Haenzel, Über ganze rationale Funktionen dritten Grades und ihre Kovarianten. Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. XXVII. Jahrgang, 1928. — Bemerkung bei der Korrektur: Herr W. Weber teilte mir zu dieser Abhandlung mit, daß die obigen Sätze in einer (mir unbekannten) Programmschrift: Godt, „Über einige sogenannte merkwürdige Punkte des Dreiecks“ (Lübeck 1903) enthalten sind.

Digitized by Google

Pole für den Umkreis k^2 sind die Mittelpunkte der drei mit $z_i z_k$ inzidenten Kreise k_i^2. Es sind die apollonischen Kreise des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$; aus alledem folgt:

„Die apollonischen Kreise des Nullstellendreiecks einer kubischen Funktion schneiden dessen Umkreis in den drei Nullstellen der Jacobi'schen Kovariante und schneiden einander in den beiden Nullstellen der Hesse'schen Kovariante".

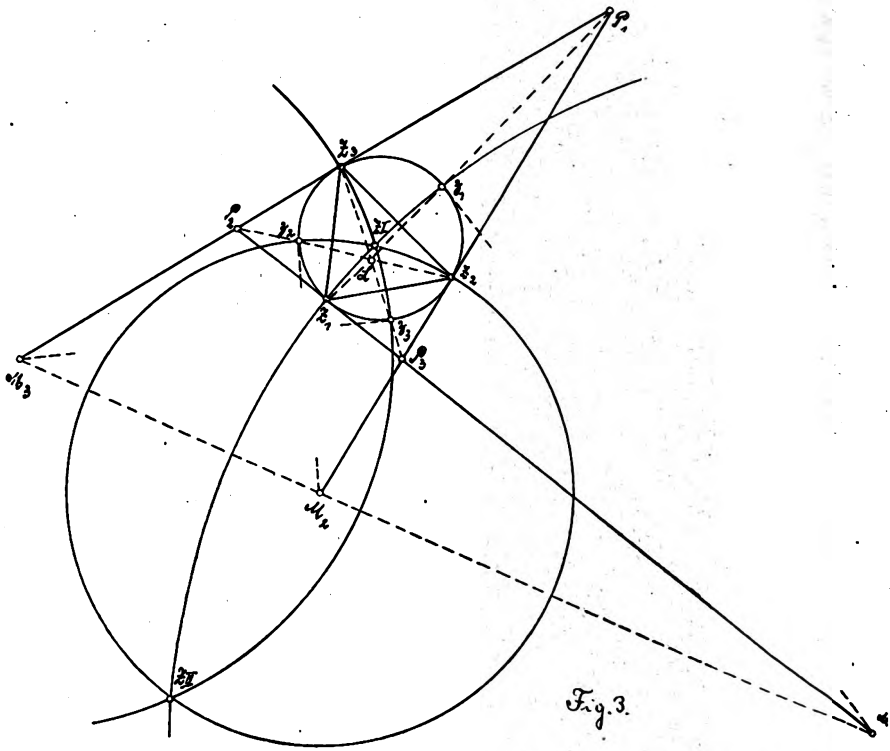


Fig. 3.

Die beiden Nullstellen der Hesse'schen Kovariante fallen demnach mit den isodynamischen Zentren des Nullstellendreiecks von $f(z)$ zusammen.

Der vorliegende Satz ist geeignet die Kovarianten der kubischen Funktion unter alleiniger Benutzung von Geraden, Kreisen und Doppelverhältnissen zu definieren. Auch ergibt sich aus ihm in allereinfachster Weise die von F. Klein herrührende Interpretation der kubischen Formen auf der Kugel [3]).

Bildet man nämlich durch lineare Transformation den Kreis

3) F. Klein, Ges. Mathem. Abhandlg. I. Bd. XXVII, S. 495—497. Erlangen 1872.

Digitized by Google

k^2 so auf sich ab, daß die Punkte z_I, z_{II} in den Mittelpunkt von k^2 und in ∞ übergehen, so bestimmen die sechs Nullstellen $z_1 \zeta_2 z_3 \zeta_1 z_2 \zeta_3$ ein dem Kreise k^2 einbeschriebenes reguläres Sechseck. Eine geeignete stereographische Projektion führt dann stets z_I und z_{II} in den Süd- und den Nordpol über und das Sechseck der Nullstellen von f und J in ein dem Äquator einbeschriebenes reguläres Sechseck.

Die Gruppe der Gleichung $f(z) = 0$ (Diedergruppe $n = 3$) besteht bekanntlich aus den drei Transformationen (einschl. der Identität), welche die Nullstellen von f permutieren und aus den drei Transformationen, welche je zwei dieser Nullstellen miteinander vertauschen und die dritte zum Fixpunkte haben. Bei der Darstellung in der komplexen Ebene werden die ersteren durch die drei entsprechenden linearen Abbildungen des Umkreises k^2 auf sich selbst bestimmt. Zu den letzteren gelangt man dadurch, daß man die drei Sehnen $z_i \zeta_i$ zieht, die der Umkreis des Nullstellendreiecks in den drei apollonischen Kreisen hervorruft und über diesen drei Sehnen als Durchmesser die drei Kreise konstruiert. Jede Inversion an einem solchen Kreise und die Spiegelung am zugehörigen Durchmesser $z_i \zeta_i$ stellt eine Transformation der zweiten Art dar.

3. Die ganze rationale Funktion vierten Grades

$$f(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$$

hat bekanntlich eine Kovariante $H(z)$ vom vierten und eine Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade, sowie die Invarianten

$$i = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)$$

und

$$k = 6(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4).$$

Mit Hilfe der Lösungen m_1, m_2, m_3 der kubischen Resolvente $m^3 - \frac{i}{2} m - k = 0$ wird $J(z)$ in bekannter Weise als Produkt dreier quadratischer Faktoren φ, χ, ψ dargestellt:

$$\begin{aligned} H(z) + m_1 f(z) &= -2\varphi^2 \\ H(z) + m_2 f(z) &= -2\chi^2 \qquad J(z) = 2\varphi\chi\psi. \\ H(z) + m_3 f(z) &= -2\psi^2 \end{aligned}$$

Die sechs Nullstellen von $J(z)$ werden dadurch eindeutig in drei Paare $z_I z_{II}$, $z_{III} z_{IV}$, $z_V z_{VI}$ geordnet, die Nullstellenpaare von φ, χ und ψ. Verlegt man die beiden Nullstellen irgend eines solchen Paares nach $+1$ und -1, so nimmt die zu ihnen gehörige Gleichung:

$$H(z) + m_i f(z) = 0$$

Digitized by Google

die Form an:

$$z^4 - 2z^2 + 1 = 0,$$

woraus die Beziehungen folgen:

$$a_0 = a_4,\ a_1 = a_3 = \sqrt{a_0(a_0 + 3m_i) - 1},\ a_2 = a_0 + 2m_i.$$

Unter diesen Umständen gehen f und H über in:

$$f(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_1 z + a_0,$$
$$H(z) = A_0 z^4 + 4A_1 z^3 + 6A_2 z^2 + 4A_1 z + A_0.$$

Daher ist bewiesen:

„Werden die sechs Nullstellen der Kovariante $J(z)$ durch die Lösungen der kubischen Resolvente in drei Paare geordnet, so gehen sowohl die vier Nullstellen der Funktion $f(z)$ als auch die vier Nullstellen der Kovariante $H(z)$ je paarweise ineinander über durch Inversion an jedem Kreise über der Verbindungsstrecke eines Nullstellenpaares von $J(z)$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser“ [4]).

Jede der drei Transformationen hat ein Nullstellenpaar von $J(z)$ zu Fixpunkten und vertauscht sowohl die vier Nullstellen von $f(z)$ paarweise miteinander als auch die vier Nullstellen von $H(z)$. Jede vertauscht die beiden Fixpunkte der beiden übrigen und aus allen dreien resultiert die Identität. Sie sind dabei untereinander vertauschbar und aus je zwei von ihnen resultiert die dritte.

Die dargelegten geometrischen Eigenschaften der Kovarianten gestatten es wiederum aus den vier Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion vierten Grades $f(z)$ die sechs Nullstellen ihrer Kovariante $J(z)$ ohne jede Rechnung zu konstruieren:

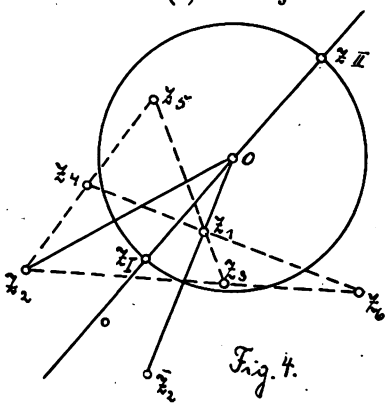


Fig. 4.

Paart man die Nullstellen z_1, z_2, z_3, z_4 von $f(z)$ auf eine der drei möglichen Weisen, etwa z_1 mit z_2 und z_3 mit z_4, so bestimmt diese Paarung das von den Geraden $z_1 z_3$, $z_2 z_4$, $z_1 z_4$, $z_2 z_3$ gebildete Vierseit (Fig. 4). Die Ecken z_5, z_6 sind die Schnittpunkte der Seitenpaare $z_1 z_4$, $z_2 z_3$ und $z_1 z_3$, $z_2 z_4$. Die vier Umkreise der vier Dreiecke $z_1 z_3 z_6$, $z_2 z_3 z_5$, $z_1 z_4 z_5$, $z_2 z_4 z_6$ gehen durch denselben Punkt $O(1)$. Die Winkel-

4) Haenzel, Über ganze rationale Funktionen vierten Grades und ihre Kovarianten. Jahresbericht d. Dtsch. Mathem. Vereinigung, 1929.

Digitized by Google

halbierende o des Winkels $z_1 O z_2$ halbiert auch den Winkel $z_3 O z_4$. Spiegelt man z_2 und z_4 an o nach $\bar{z}_2$ und $\bar{z}_4$, so liegen $O z_1 \bar{z}_2$ und $O z_3 \bar{z}_4$ je in einer Gerade und der Inversionskreis der Paarung z_1 $\bar{z}_2$ und $z_3 \bar{z}_4$ schneidet o in zwei Nullstellen der Kovariante $J(z)$(1). Die beiden anderen Paarungen der vier Nullstellen von $f(z)$ liefern mit Hilfe gleicher Konstruktionen die übrigen vier Nullstellen von $J(z)$[5]).

Konstruiert man andererseits bei irgend einer Paarung der vier Nullstellen von $f(z)$ die beiden Kreise über den beiden Verbindungsstrecken jener Paare als Durchmesser, so gehen die zu der Paarung gehörigen beiden Nullstellen von $J(z)$ ineinander über durch Inversion am Kreise und Spiegelung am Durchmesser des ersten Paares ebenso wie am Kreise und Durchmesser des zweiten Paares.

Soll die Invariante i einer ganzen rationalen Funktion vierten Grades den Wert Null annehmen, so bestimmen drei ihrer Nullstellen eine ganze rationale Funktion dritten Grades, deren Hessesche Kovariante die vierte Nullstelle zur Nullstelle hat. Soll dagegen die Invariante k verschwinden, so fällt eine Nullstelle der Jacobi'schen Kovariante jener kubischen Funktion mit der vierten Nullstelle zusammen. Die geometrische Bedingung für den ersten Fall ist also die, daß drei der vier Nullstellen ein Dreieck bilden, dessen appollonische Kreise einander in der vierten Nullstelle schneiden, während im zweiten Falle die Nullstellen vier harmonische Punkte eines Kreises sind.

4. Zu der ganzen rationalen Funktion fünften Grades

$$f(z) = a_0 z^5 + 5 a_1 z^4 + 10 a_2 z^3 + 10 a_3 z^2 + 5 a_4 z + a_5$$

gehören außer 18 verschiedenen Kovarianten vom ersten bis neunten Grade vier Fundamentalinvarianten J_4, J_8, J_{12}; J_{18} die bzgl. der Koeffizienten von $f(z)$ vom vierten, achten, zwölften und achtzehnten Grade sind. Bezeichnet man mit α, β, γ die drei Lösungen von

5) Der Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Funktion $f(z)$ und denen ihrer Kovariante $J(z)$ läßt sich noch auf folgende Weise geometrisch darstellen: Jede Seite des vollständigen Nullstellenvierecks wird in jeder ihrer beiden Nullstellen von je einer gleichseitigen Hyperbel berührt. Die vier je zwei Gegenseiten berührenden gleichseitigen Hyperbeln sind konzentrisch und schneiden einander in zwei Nullstellen der Kovariante $J(z)$. Zu jeder Paarung der vier Nullstellen von $f(z)$ gehört ein Büschel gleichseitiger konzentrischer Hyperbeln, die den oben konstruierten Punkt O zum Mittelpunkt haben. Jede Verbindungsstrecke eines Nullstellenpaares wird von den Hyperbeln des Büschels in den Punktepaaren einer Involution geschnitten und von zwei Hyperbeln in ihren beiden Nullstellen berührt.

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = 0$$

und setzt

$$p = \frac{a_0\beta\gamma - a_1(\beta+\gamma)+a_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \quad q = \frac{a_0\alpha\gamma - a_1(\alpha+\gamma)+a_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$

$$r = \frac{a_0\alpha\beta - a_1(\alpha+\beta)+a_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

sowie

$$l = \frac{p}{(\gamma-\beta)^5}, \quad m = \frac{q}{(\alpha-\gamma)^5}, \quad n = \frac{r}{(\alpha-\beta)^5},$$

so stellen sich die vier Fundamentalinvarianten in der Form dar:

$$J_4 = (lm+ln+mn)^2 - 4lmn(l+m+n)$$
$$J_8 = l^2m^2n^2(lm+ln+mn)$$
$$J_{12} = l^4m^4n^4$$
$$J_{18} = 4l^5m^5n^5(l-m)(l-n)(m-n).$$

Unter ihnen ist die sogenannte Hermite'sche[6]) Invariante J_{18} dadurch von Bedeutung, daß für $J_{18} = 0$ die Lösung der Gleichung $f(z) = 0$ in algebraischer Form durch das Wurzelzeichen möglich ist. Auf algebraischem Wege zeigt sich[7]), daß für $J_{18} = 0$ die eine Wurzel z_5 von $f(z) = 0$ eine Sonderstellung einnimmt. Bildet man nämlich eine ganze rationale Funktion vierten Grades $f_4(z)$, welche die vier übrigen Wurzeln von $f(z) = 0$ zu Nullstellen hat, so fällt z_5 stets mit einer Nullstelle der zu $f_4(z)$ gehörigen Kovariante sechsten Grades zusammen. Mit anderen Worten: Für $J_{18} = 0$ kann man auf eine einzige Art vier der fünf Nullstellen so paaren, daß die dadurch bestimmte Transformation von der Form δ (1) die fünfte Nullstelle zum Fixpunkte hat. Die Hermite'sche Invariante verschwindet umgekehrt stets sobald diese Bedingung erfüllt ist und $f(z) = 0$ ist dann durch Wurzelziehen lösbar. Für $J_{18} = 0$ müssen daher die fünf Nullstellen der Funktion einer geometrischen Bedingung unterliegen, die aus den früheren Resultaten nunmehr leicht gewonnen wird.

Es sei (Fig. 5) z_5 die als Fixpunkt der Transformation δ isolierte Nullstelle, $z_1 z_2$ und $z_3 z_4$ die durch δ bewirkte Paarung der

6) Hermite, Cambr. and Dublin Math. Journal, Bd. 9.

7) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, S. 355, Leipzig 1872.

Digitized by Google

übrigen vier Nullstellen. Dann enthält der Umkreis k^2 des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ auch den zweiten Fixpunkt z_5' von $\delta(1)$. Ist $M_{1,2}$ der Pol der Dreieckseite $z_1 z_2$ für den Umkreis k^2, so schneidet die Gerade $M_{1,2} z_5$ auf k^2 den zweiten Fixpunkt z_5' aus, und der Kreis über $z_5 z_5'$ als Durchmesser ordnet sowohl z_1 und z_2 als auch z_3 und z_4 mittels Inversion und Spiegelung an $z_5 z_5'$ einander zu.

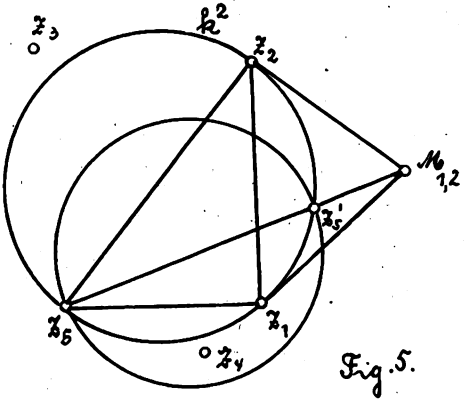


Fig. 5.

Die Aufgabe, zu vier gegebenen Nullstellen z_1, z_2, z_3, z_4 eine fünfte z_5 so zu bestimmen, daß die Hermite'sche Invariante der zugehörigen Funktionen $f(z)$ fünften Grades den Wert Null annimmt, findet deshalb folgende konstruktive Lösungen:

Die vier gegebenen Punkte bestimmen ∞^1 rationale Funktionen vierten Grades. Die sechs Nullstellen der zugehörigen Kovariante $J(z)$ lassen sich nach 3. konstruieren. Jede dieser sechs Nullstellen bildet mit z_1, z_2, z_3, z_4 die Nullstellen von ganzen rationalen Funktionen fünften Grades, deren Hermite'sche Invariante verschwindet und ist also eine Lösung der Aufgabe. Die übrigen Lösungen erhält man, wenn man z_5 so bestimmt, daß es mit drei von den gegebenen Punkten das Nullstellenquadrupel ganzer rationaler Funktionen vierten Grades bildet, deren Kovarianten $J(z)$ den vierten gegebenen Punkt zur Nullstelle haben. Dazu sind die Umkreise der vier durch z_1, z_2, z_3, z_4 bestimmten Dreiecke zu konstruieren. In jedem Dreieck, z. B. in $z_1 z_2 z_3$, verbindet man (Fig. 6) den Pol einer Dreieckseite $z_2 z_3$ für den Umkreis mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte z_1. Der Schnittpunkt S dieser Verbindungsgerade mit dem Umkreise bestimmt den Durchmesser $z_1 S$ eines Kreises; durch Inversion an diesem Kreise und durch Spiegelung am Durchmesser $z_1 S$ geht die vierte Nullstelle z_4 in den gesuchten Punkt z_5 über. Führt man die Konstruktion

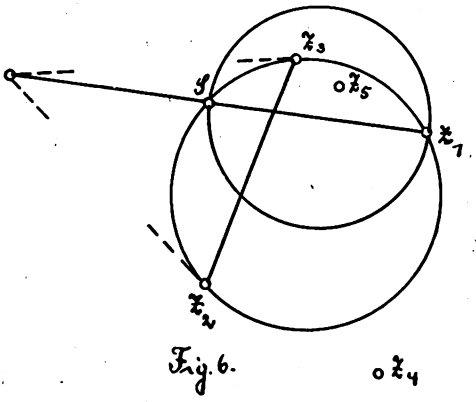


Fig. 6.

Digitized by Google

in sämtlichen vier Dreiecken an allen Dreieckseiten durch, so ergeben sich die übrigen Lösungen der Aufgabe. Insgesamt erfüllen also 18 Punkte mit den vier gegebenen die verlangte Bedingung.

5. Das System der Kovarianten und Invarianten einer ganzen rationalen Funktion sechsten Grades

$$f(z) = a_0 z^6 + 6a_1 z^5 + 15a_2 z^4 + 20a_3 z^3 + 15a_4 z^2 + 6a_5 z + a_6$$

enthält unter anderem die biquadratische Kovariante

$$C_4 = (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) z^4 + (2a_0 a_5 - 6a_1 a_4 + 4a_2 a_3) z^3 + (a_0 a_6 - 9a_2 a_4 + 8a_3^2) z^2 - (2a_1 a_6 - 6a_2 a_5 + 4a_3 a_4) z + (a_2 a_6 - 4a_3 a_5 + 3a_4^2)$$ [8].

Es sei

$$J_2 = a_0 a_6 - 6a_1 a_5 + 15a_2 a_4 - 10a_3^2$$

die bzgl. der Koeffizienten a_i quadratische Invariante, sowie C_{12} die hinsichtlich der a_i kubische Kovariante zwölften Grades von $f(z)$. Dann stellt das identische Verschwinden der Kovariante C_4 die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß $f(z)$ die Kovariante sechsten Grades einer biquadratischen Funktion ist [9] (3). Unter diesen Umständen zerfällt $f(z)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) in die drei quadratischen Faktoren, die man aus $\sqrt[3]{C_{12} + \frac{1}{6} f^2 \sqrt{-J_2}} + \varepsilon \sqrt[3]{C_{12} - \frac{1}{6} f^2 \sqrt{-J_2}} \cdots W$ erhält, wenn man für ε die drei dritten Wurzeln der Einheit setzt [10]. Im Anschluß an die vorhergehenden Nummern entsteht daher die Aufgabe, die geometrische Bedingung für das Verschwinden der Kovariante C_4 und für die damit verbundene Auflösbarkeit von $f(z) = 0$ durch den obigen Wurzelausdruck W zu bestimmen.

Ist $f(z)$ die Kovariante sechsten Grades einer biquadratischen Funktion, so gibt es drei Transformationen von der Form δ (1), welche die vier Nullstellen dieser biquadratischen Funktion paarweise miteinander vertauschen. Jede der drei Transformationen hat ein Nullstellenpaar von $f(z)$ zu Fixpunkten und vertauscht die beiden Nullstellen der beiden übrigen Paare (3). Daraus und aus den Eigenschaften der Transformation δ wird leicht gefolgert (Fig. 7):

„Verschwindet die biquadratische Kovariante C_4 einer ganzen rationalen Funktion sechsten Grades $f(z)$ und ist infolgedessen die Gleichung $f(z) = 0$ durch den Wurzelausdruck W auflösbar, so bilden die sechs Nullstellen von $f(z)$ die drei Schnittpunktepaare dreier ein-

8) Faà de Bruno, Théorie des Formes binaires, Nr. 141, 167, Turin 1876.
9) Clebsch, a. a. O. S. 283 ff.
10) Clebsch, a. a. O. S. 451.

Digitized by Google

ander senkrecht schneidender Kreise. Auf jedem Kreise bilden vier der Nullstellen einen harmonischen Wurf, die beiden übrigen sind inverse Punkte des Kreises".

Die Mittelpunkte der drei Kreise bestimmen das Dreieck I II III. Die Verbindungsgerade der beiden Nullstellen eines Nullstellenpaares ist eine Höhe des Dreiecks I II III und der Fußpunkt der Höhe halbiert die Verbindungsstrecke. Die sechs Nullstellen von $f(z)$ liegen daher paarweise auf drei durch denselben Punkt gehenden Geraden und es folgt:

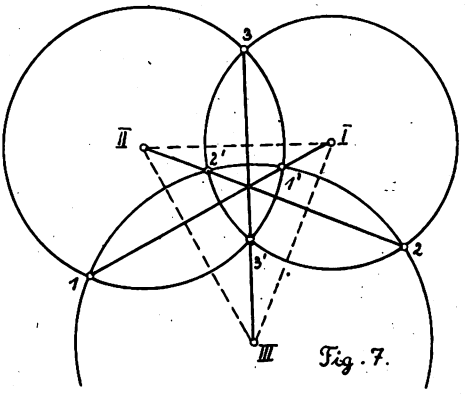


Fig. 7.

„Die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen sechsten Grades mit verschwindender Kovariante C_4 sind die Ecken von Brianchonschen Sechsseiten".

Wird einer der Kreise, z. B. der Kreis durch $2, 2', 3, 3'$ mit dem Mittelpunkte I so auf sich abgebildet, daß 1 und $1'$ bzw. in I und ∞ übergehen, so bilden die vier Punkte $2, 2', 3, 3'$ die Scheitel zweier aufeinander senkrechter Durchmesser. Bei geeigneter stereographischer Projektion auf die Kugel entsprechen alsdann den sechs Punkten $1, 1', 2, 2', 3, 3'$ der Nord- und der Südpol der Kugel sowie vier äquidistante Punkte ihres Äquators. Wir erhalten auf diese Weise die von F. Klein herrührende Interpretation der mit der Diëdergruppe $n = 4$ verknüpften Formen. Hier wie in Nr. 2 folgen diese Interpretationen aus Spezialfällen der vorstehend entwickelten Sätze.

II. Über die Polarfunktionen ganzer rationaler Funktionen.

1. Es sei

$$f(z) = a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$

die ganze rationale Funktion n-ten Grades und es werde mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}z}$ folgende an der Funktion $f(z)$ auszuführende Operation bezeichnet.

Man bildet $\frac{d\left(z^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right)}{dz} \equiv \Delta_f(z)$ und hieraus $z^{n-1}\Delta_f\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$, sodaß

Digitized by Google

unter dem Symbol $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$ diejenige Funktion zu verstehen ist, die aus $f(z)$ durch folgende Operationen hervorgeht: In $f(z)$ ist z durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen, alsdann ist $f\left(\frac{1}{z}\right)$ mit z^n zu multiplizieren und nach z abzuleiten, danach wiederum z durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen und schließlich mit z^{n-1} zu multiplizieren.

Unterwirft man die erhaltene Funktion $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$ denselben Operationen, so gelangt man zu $\frac{\mathfrak{d}^2 f}{\mathfrak{d}z^2}$ u. s. f.

Die n-Nullstellen von $f(z)$ bestimmen ein vollständiges n-Eck in der komplexen Zahlenebene, das vollständige Nullstellenpolygon von $f(z)$. Nach dem Satz von Schicht[11]) hat die erste Polare der unendlich fernen Geraden in bezug auf das vollständige Nullstellenpolygon die $n-1$ Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion zu reellen Brennpunkten. Daher gelangt man von den n-Nullstellen von $f(z)$ auch auf folgendem Wege zu den $n-1$ Nullstellen von $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$: Die n-Nullstellen von $f(z)$ sind am Einheitskreise und an der reellen Achse zu spiegeln. In bezug auf das dann erhaltene n-Eck ist die erste Polare der unendlich fernen Geraden zu bestimmen. Die $n-1$ reellen Brennpunkte dieser algebraischen Kurve $(n-1)$ter Klasse werden alsdann am Einheitskreise und an der reellen Achse in die Nullstellen von $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$ gespiegelt.

Mit Hilfe der Operationen $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}z}$ und mittels einer neuen komplexen Variablen w sowie der gewöhnlichen Ableitung $\frac{df}{dz}$ lassen sich nun aus $f(z)$ folgende $n-1$ algebraische Formen herleiten:

$$\Pi_1 = \frac{1}{n}\left[w\frac{df}{dz} + \frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}\right]$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{n-1}\left[w\frac{d\Pi_1}{dz} + \frac{\mathfrak{d}\Pi}{\mathfrak{d}z}\right]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left[w^2\frac{d^2f}{dz^2} + w\left(d\frac{\mathfrak{d}\Pi_1}{\mathfrak{d}z}\frac{}{dz} + \mathfrak{d}\frac{d\Pi_1}{dz}\frac{}{\mathfrak{d}z}\right) + \frac{\mathfrak{d}^2 f}{\mathfrak{d}z^2}\right]$$

dabei ist

11) Haenzel, Ein neuer Satz über die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen, Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. XXVII. — Siehe Anm. 12 auf S. 45.

Digitized by Google

$$\frac{d\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}}{dz} = \frac{\partial \frac{d\Pi_1}{dz}}{\partial z}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{n-2}\left[w\frac{d\Pi_2}{dz} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}\right]$$

. . . . . .

$$\Pi_{n-1} = \left[w\frac{d\Pi_{n-2}}{dz} + \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial z}\right].$$

Die $n-1$ algebraischen Gleichungen $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\ldots \Pi_\nu = 0$, $\ldots \Pi_{n-1} = 0$ sind in dieser Reihenfolge von fallendem Grade in z, von steigendem in w. Sie bestimmen ebensoviele algebraische Funktionen $w_1(z)$, $w_2(z)$, $\ldots w_\nu(z)$, $\ldots w_{n-1}(z)$, welche im folgenden als „Polarfunktionen" der ganzen rationalen Funktionen $f(z)$ bezeichnet werden.

2. In der Gleichung $\Pi_\nu = 0$ ist der Koeffizient der höchsten Potenz in w die νte Ableitung der Ausgangsfunktion $f(z)$ nach z. Daher gilt der Satz:

„Die Pole der Polarfunktionen $w_1(z)$, $w_2(z)$, $\ldots w_\nu(z)$, $\ldots w_{n-1}(z)$ einer ganzen rationalen Funktion $f(z)$ sind bzw. die Nullstellen der Ableitung $f'(z)$, $f''(z)$, $\ldots f^{(\nu)}(z)$, $\ldots f^{(n-1)}(z)$ von $f(z)$".

Mit anderen Worten:

„Die Pole der ersten, zweiten, dritten ... Polarfunktion einer ganzen rationalen Funktion $f(z)$ liegen auf den reellen Brennpunkten der ersten, zweiten, dritten ... Polare der unendlich fernen Gerade in bezug auf das Nullstellenpolygon von $f(z)$".

Aus $\Pi_1 = 0$ folgt als erste Polarfunktion

$$w_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{df}{dz}}.$$

Für ihre Nullstellen ergibt sich der Satz:

„Spiegelt man die n-Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion am Einheitskreise und an der reellen Achse und bestimmt für das dadurch erhaltene n-Eck die erste Polare der unendlich fernen Geraden, so gehen die $n-1$ Brennpunkte dieser Kurve durch Spiegelung an der reellen Achse und am Einheitskreise in die Nullstellen der ersten Polarfunktion über".

Die zweite Polarfunktion ist:

Digitized by Google

$$w_2 = \frac{-\frac{d\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}}{dz} \pm \sqrt{\left(d\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right)^2 - \frac{d^2 f}{dz^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}}{\frac{d^2 f}{dz^2}}.$$

Ist einerseits

$$f(z) = a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

andererseits

$$f(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

so stimmen hinsichtlich ihrer Koeffizienten völlig überein: $\frac{d^2 f}{dz^2}$ mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, ebenso $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ und $\frac{d\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}}{dz}$ mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$. Daher haben die Diskriminante

$$\begin{vmatrix} d\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} & \frac{d^2 f}{dz^2} \\ \frac{dz}{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} & \frac{dz}{d\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}} \\ & dz \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \end{vmatrix}$$

der zweiten Polarfunktion von $f(z)$ und die Hesse'sche Form von $f(x_1\, x_2)$ dieselben entsprechenden Koeffizienten. Mit anderen Worten:

„Die Verzweigungspunkte der zweiten Polarfunktion einer ganzen rationalen Funktion $f(z)$ liegen in den Nullstellen der Hesse'schen Kovariante von $f(z)$“.

3. Die kubische Funktion

$$f(z) = a_0 z^3 + 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z + a_3$$

hat die erste Polarfunktion

$$w = -\frac{a_1 z^2 + 2 a_2 z + a_3}{a_0 z^2 + 2 a_1 z + a_2}$$

ihre Nullstellen gehen durch $z' = \frac{1}{z}$ aus den Brennpunkten derjenigen Ellipsen hervor, die das aus dem Nullstellendreieck von $f(z)$ durch $z' = \frac{1}{z}$ hervorgehende Dreieck in seinen Seitenmitten

Digitized by Google

berührt; ihre Pole dagegen sind die Brennpunkte der Ellipse, die das Nullstellendreieck selbst in den Seitenmitten berührt. Die zweite Polarfunktion ist

$$w = \frac{-(a_1 z + a_2) \pm \sqrt{H(z)}}{a_0 z + a_1},$$

wo $H(z)$ die Hesse'sche Kovariante der kubischen Funktion darstellt. Die zweite Polarfunktion hat daher den Schwerpunkt des Nullstellendreiecks zum Pol und seine isodynamischen Zentren (I, 2) zu Verzweigungspunkten. Die durch sie als Fixpunkte bestimmte involutorische Transformation δ (I, 1) vertauscht die Nullstellen der kubischen Funktion mit den Nullstellen ihrer Jacobischen Kovariante (I, 2).

Die erste und zweite Polarfunktion einer biquadratischen Funktion sind:

$$w = -\frac{a_1 z^3 + 3 a_2 z^2 + 3 a_3 z + a_4}{a_0 z^3 + 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z + a_3}$$

und

$$w = \frac{-(a_2 z^3 + 2 a_3 z + a_4) \pm \sqrt{H(z)}}{a_0 z^2 + 2 a_1 z + a_2}.$$

Jede involutorische Transformation, welche die Nullstellen der biquadratischen Funktion untereinander vertauscht, vertauscht auch die Verzweigungspunkte ihrer zweiten Polarfunktion (I, 3) u. s. f.

---

12) Zu der in Anm. 11 genannten Abhandlung teile ich nachträglich mit, daß ein ähnliches Theorem wie der Satz des Herrn Schicht bereits von van den Berg aufgestellt wurde, (Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel XV, 1888, S. 140) und daß beide Sätze in speziellen Fällen übereinstimmen.

Digitized by Google

Anwendung der Heavisideschen Methode zur Integration der Wärmeleitungsgleichung [1]).

Von Arthur Korn in Charlottenburg.

Die Gleichung der Wärmeleitung im eindimensionalen Falle

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{1}$$

in welcher a^2 eine gegebene positive Konstante, t die Zeit und $U(x, t)$ die unbekannte Punktion der beiden Variablen x und t vorstellt, soll für einen einseitig unendlich ausgedehnten, linearen Wärmeleiter

$$0 \leqq x < \infty \tag{2}$$

unter den Grenz- und Anfangsbedingungen

$$U = 0, \quad (t = 0,\ 0 \leqq x < \infty), \tag{3}$$

$$\begin{cases} U = \varphi(t), & (x = 0), \\ U = 0, & (x = \infty) \end{cases} \tag{4}$$

integriert werden, wobei wir zur Vermeidung von Unstetigkeits-Schwierigkeiten über $\varphi(t)$ voraussetzen, daß es mit seinen ersten Ableitungen von null bis zu irgend einer endlichen Zeit eindeutig und stetig sei und für $t = 0$ verschwinde. Wir haben zur Zeit $t = 0$ einen Ruhezustand, aus dem heraus sich infolge der Veränderung von $\varphi(t)$ am Eingange des Leiters der Zustand verändert; wir haben ein Analogon zu dem Problem der Telegraphengleichung, in welchem ein unendlicher Leiter

$$0 \leqq x < \infty$$

zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist und infolge einer an dem Eingang der Leitung angelegten, mit der Zeit veränderlichen Spannung seinen Zustand ändert.

Ich will auch hier genau dieselbe Methode einschlagen, wie ich sie vor einiger Zeit für die Lösung der Telegraphengleichung auseinandergesetzt habe [2]). Besonders nützlich werden mir dabei wieder einige funktionentheoretische Untersuchungen sein, welche

1) Vorgetragen in der 253. Sitzung am 30. Januar 1929.

2) Sitz.-Ber. der Berliner Mathematischen Gesellschaft 16, 71—84, 1927.

Digitized by Google

im Anschluß an Heaviside unabhängig von K. W. Wagner und T. J. I. A. Bromwich[3]) gemacht worden sind. Es handelt sich dabei um das in der Ebene der komplexen

$$p = u + i\omega$$

gebildete Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{tp}}{p}\,dp,$$

das über die ganze unendliche Ordinatenaxe zu erstrecken ist, welche lediglich durch einen nach rechts ausbiegenden Halbkreis um den Anfangspunkt als Zentrum unterbrochen ist, wobei der Radius dieses Halbkreises beliebig gewählt werden kann. Das Integral ist

$$= 0 \text{ für } t < 0,$$
$$= 1 \text{ für } t > 0,$$

und unsere Anfangsfunktion $\varphi(t)$ kann in der Form dargestellt werden:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,dp\,d\tau, \tag{5}$$

oder auch in der Form:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^b \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,dp\,d\tau \tag{6}$$

wenn b irgend eine Zeit $> t$ ist.

Wir sehen nun zunächst rein formal zu, wenn wir

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^b \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{H}} \psi(x,p)\frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,dp\,d\tau \tag{7}$$

setzen, wie die unbekannte Funktion $\psi(x,p)$ aussehen müßte, damit die Differentialgleichung (1) befriedigt wird. Dabei wollen wir die Grenzen des Hakenintegrales noch nicht als unendlich, also die Grenzpunkte auf der positiven und negativen Ordinatenaxe nur als sehr weit entfernt voraussetzen, und wir behalten uns vor, nach Wahl der Funktion $\psi(x,p)$ die Berechtigung des Grenzüberganges nachzuweisen. Die Gleichung (1) ist erfüllt, wenn

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{p}{a^2}\psi, \tag{8}$$

3) K. W. Wagner, Arch. f. Elektrotechn. 4, 1916; T. J. I. A. Bromwich, Proc. London Math. Soc. 15, 1916.

Digitized by Google

somit

$$\psi = \alpha_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \alpha_2 e^{+\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \tag{9}$$

wenn α_1 und α_2 beliebige Konstanten sind; a möge die positive Quadratwurzel von a^2 sein. Indem wir durch den Ausschnitt der negativen Abszissenaxe uns ein Blatt der Riemannschen Fläche zurecht machen, auf welchem

$$\sqrt{p} = \sqrt{\varrho}\left(\cos\frac{\chi}{2} + i\sin\frac{\chi}{2}\right), \quad (-\pi \leqq \chi \leqq +\pi) \tag{10}$$

eindeutig ist — ϱ und χ seien die Polarkoordinaten des Punktes p —, gibt uns die Bedingung

$$U = 0 \text{ für } x = \infty$$

die Forderung

$$\alpha_2 = 0, \tag{11}$$

und wir sehen jedenfalls, daß die Funktion

$$U(x,t) = \frac{\alpha_1}{2\pi i}\int_0^b \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p - \frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\,dp\,d\tau \tag{12}$$

die Gleichung (1) befriedigt; für $x = 0$ wird

$$U(0,t) = \frac{\alpha_1}{2\pi i}\int_0^b \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,dp\,d\tau, \tag{13}$$

wobei wir die Grenzen des Hakenintegrales noch immer nicht als unendlich ansehen wollen. Können wir zeigen, daß der Übergang zur Grenze erlaubt ist, so bemerken wir noch, daß, wenn wir

$$\alpha_1 = 1 \tag{14}$$

machen, der Ausdruck (13) in $\varphi(t)$ übergeht.

Wir können daher jetzt den folgenden Schluß ziehen: Die Lösung unserer Aufgabe wird bei dem Übergang zu unendlichen Grenzen für das Hakenintegral durch die Funktion

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p - \frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\,dp\,d\tau \tag{15}$$

dargestellt, wenn wir zweierlei beweisen können:

Digitized by Google

1. Konvergenz und Verschwinden des Integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{(t-\tau)p-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}dp \quad \text{für } t-\tau<0,$$

2. Konvergenz des Integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{(t-\tau)p-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}dp \quad \text{für } t-\tau>0.$$

Bei dem zweiten Teile dieser Untersuchung werden wir zugleich zu einer Umformung unserer Lösung gelangen, welche Übereinstimmung mit der klassischen Lösung des Problems zeigt.

Für den ersten Teil ergänzen wir den Hakenweg bei noch nicht unendlichen Grenzen durch einen Halbkreis von dem großen Radius P um den Anfangspunkt als Zentrum auf der rechten Seite der Ordinatenaxe, ähnlich wie bei der Diskussion von

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{tp}}{p}dp$$

in den Untersuchungen von Wagner und Bromwich; in dem Innengebiete ist der Integrand eindeutig und stetig, das Integral über den Rand ist daher null, und da unmittelbar zu sehen ist, daß für

$$t-\tau<0$$

das Integral über den Halbkreis (P) mit unendlich wachsendem P zu null konvergiert, so ist damit bereits der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Um das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{(t-\tau)p-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}dp$$

für

$$t-\tau>0$$

zu diskutieren, ergänzen wir jetzt den Hakenweg bei noch nicht unendlichen Grenzen durch einen Halbkreis von dem großen Radius P um den Anfangspunkt als Zentrum auf der linken Seite der Ordinatenaxe; wir müssen jetzt, um ein für den Integranden eindeutiges Gebiet zu haben, zum Unterschied von den früheren Untersuchungen von Wagner und Bromwich (für das einfachere

Digitized by Google

Integral) den Weg durch die doppelte negative Abszissenaxe und einen Abschlußkreis um den Anfangspunkt als Zentrum mit beliebig kleinem Radius ergänzen.

Wieder ist unmittelbar zu sehen, daß für

$$t-\tau>0$$

das Integral über den Halbkreis (P) mit unendlich wachsendem P zu null konvergiert, und man erhält bei dem Übergange zur Grenze

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\curvearrowright} \frac{e^{(t-\tau)p-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\,dp &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\curvearrowleft} \frac{e^{(t-\tau)p-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\,dp \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{O} \frac{e^{(t-\tau)p-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\,dp, \end{aligned} \right.$$

wobei das erste Integral rechts über den oberen Teil der negativen Abszissenaxe von rechts nach links und über den unteren Teil der negativen Abszissenaxe von links nach rechts zu erstrecken ist, das zweite Integral rechts über den kleinen Kreis um den Anfangspunkt als Zentrum, und zwar von

$$\chi=-\pi \text{ bis } \chi=+\pi,$$

im Sinne des Uhrzeigers.

Das zweite Integral rechts ergibt sich unmittelbar aus dem Residuumsatze $= 1$, für das erste Integral können wir, da auf dem oberen Teile der negativen Abszissenaxe:

$$\sqrt{p}=\sqrt{-u}.i,$$

auf dem unteren Teile:

$$\sqrt{p}=-\sqrt{-u}.i,$$

setzen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{-i\frac{x}{a}\sqrt{-u}}\cdot\frac{e^{(t-\tau)u}}{u}\,du+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0} e^{+i\frac{x}{a}\sqrt{-u}}\cdot\frac{e^{(t-\tau)u}}{u}\,du,$$

und wir erhalten:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\curvearrowright} \frac{e^{(t-\tau)p-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\,dp = 1+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\sin\left(\frac{x}{a}\sqrt{-u}\right)\frac{e^{(t-\tau)u}}{u}\,du,$$

oder, indem wir

$$u=-y$$

Digitized by Google

setzen:

$$= 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(\frac{x\sqrt{y}}{a}\right)\frac{e^{-(t-\tau)y}}{y}\,dy,$$

und wenn wir noch

$$\sqrt{y} = \xi$$

substituieren:

$$(17)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{P}} \frac{e^{(t-\tau)p - \frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\,dp = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(\frac{x\xi}{a}\right)\frac{e^{-(t-\tau)\xi^2}}{\xi}\,d\xi.$$

Wir erhalten somit, da die Konvergenz des rechts stehenden Integrals bekannt ist, für jedes

$$t - \tau > 0,$$

das im übrigen beliebig klein sein kann, die Lösung des gestellten Problems in der Form:

$$(18)\quad U(x,t) = \varphi(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^t \varphi'(\tau)\int_0^\infty \sin\left(\frac{x\xi}{a}\right)e^{-(t-\tau)\xi^2}\frac{d\xi}{\xi}\,d\tau.$$

In dem Integrale ist im übrigen erlaubt, den Sinus nach den Potenzen seines Argumentes zu entwickeln, sodaß:

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{x\xi}{a}\right)e^{-(t-\tau)\xi^2}\frac{d\xi}{\xi} = \frac{x}{a}J_0 - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{a^3}J_2 + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{a^5}J_4 - \cdots,$$

wo

$$J_0 = \int_0^\infty e^{-(t-\tau)\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t-\tau}},$$

$$J_2 = \int_0^\infty \xi^2 e^{-(t-\tau)\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}.1}{2^2(\sqrt{t-\tau})^3},$$

$$J_4 = \int_0^\infty \xi^4 e^{-(t-\tau)\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}.1.3}{2^3(\sqrt{t-\tau})^5}, \ldots.$$

Wir bekommen somit schließlich:

$$(19)\quad U(x,t) = \varphi(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}f\left(\frac{x}{a}, t-\tau\right)d\tau,$$

wo für irgend zwei Argumente α und β:

$$(20)\quad f(\alpha,\beta) = \alpha - \frac{1}{2.3!}\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{1.3}{2^2.5!}\frac{\alpha^5}{\beta^2} - \frac{1.3.5}{2^3.7!}\frac{\alpha^7}{\beta^3} + \cdots.$$

Digitized by Google

Da

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1 - \frac{1}{1!\,2^2}\,\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{1}{2!\,2^4}\,\frac{\alpha^4}{\beta^2} - \cdots,$$

so kann man die Funktion $f(\alpha, \beta)$ auch in der Form

$$f(\alpha, \beta) = \int_0^{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta}}\, d\alpha \tag{21}$$

darstellen, und mit den Formeln (19) und (21) ist die klassische Lösung des Problems erreicht.

Nachdem wir so festen Boden unter unseren Füßen gewonnen haben, wollen wir nun einmal den gewöhnlichen Hergang bei der Heavisideschen Operatorenmethodekritisch unter die Lupe nehmen.

An unsere obigen Ausführungen anschließend, können wir sagen, in der Heavisideschen Operatorenmethode wird an eine Funktion von t, die in der Form

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{tp}}{p}\, X(p)\, dp$$

gegeben sein möge — $X(p)$ stelle eine gegebene Funktion von p vor —, der Operator p angelegt, indem man das durch die Operation gewünschte Resultat

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{H}} p\,\frac{e^{tp}}{p}\, X(p)\, dp$$

setzt. Das Resultat ist eine einmalige Differentiation nach t; die Operation p^2 ergibt eine zweimalige Differentiation und so fort, vorausgesetzt, daß die Funktion $X(p)$ so beschaffen ist, daß die Integrale konvergent sind; allgemein bedeutet die Anwendung der Operation $W(p)$ die Ausführung des Integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{H}} W(p)\,\frac{e^{tp}}{p}\, X(p)\, dp.$$

Die Operatorenmethode nimmt sich die zunächst theoretisch in keiner Weise begründete Freiheit, auf die Konvergenz der Integrale keine Rücksicht zu nehmen, z. B. auch wenn

$$X(p) = 1$$

ist. In diesem Falle führt z. B. völlig korrekt allgemein die Operation

$$\left(\frac{1}{p}\right)^n,$$

Digitized by Google

wenn n eine ganze positive Zahl ist, zu dem Resultate:

$$\frac{t^n}{n!}$$

und allgemein, wenn n irgend eine positive Zahl ist, zu dem Resultate

$$\frac{t^n}{\Gamma(n+1)};$$

diese Formel wird nun häufig in der Operatorenmethode, zunächst völlig unbegründet, auch für negative n angewandt; tatsächlich haben in diesem letzteren Falle die in betracht kommenden Integrale nur einen Sinn, solange die Grenzen der Hakenintegrale noch nicht als unendlich betrachtet werden; für unendliche Grenzen divergieren die Integrale.

Die Lösung unseres Problemes in der ursprünglichen Form (15) kann in der Sprache der Operatorenmethode so gelesen werden: Wir erhalten die Lösung aus

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \varphi'(\tau)\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\,dp\,dt$$

durch Anwendung der Operation

$$e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Die Operatorenmethode geht nun gewöhnlich so vor: Es ist

$$e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} = 1 - \frac{1}{1!}\frac{x}{a}\sqrt{p} + \frac{1}{2!}\frac{x^2}{a^2}(\sqrt{p})^2 - \cdots;$$

sie macht nun zunächst die Operation 1, dann die Operation

$$-\frac{1}{1!}\frac{x}{a}\sqrt{p},$$

formal nach der (unrichtigen) Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{H}} \frac{e^{(t-\tau)p}}{p}\left(-\frac{1}{1!}\frac{x}{a}\sqrt{p}\right)dp = -\frac{1}{1!}\frac{x}{a}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})},$$

sodann die Operationen:

$$\frac{1}{2!}\frac{x^2}{a^2}(\sqrt{p})^2, \quad -\frac{1}{3!}\frac{x^3}{a^3}(\sqrt{p})^3, \quad \ldots$$

und addiert dann alle diese Resultate, man erhält dann genau dieselbe Lösung, wie sie oben auf strengem Wege abgeleitet wurde.

Digitized by Google

Wie hat man sich zu erklären, daß man trotz der verschiedenen unerlaubten Rechnungen doch zu dem richtigen Resultate gelangt?

Die Erklärung ist die folgende: Die Hakenintegrale zerlegen sich, so lange man die Grenzen noch endlich annimmt, sodaß die in betracht kommenden Terme ihren bestimmten Sinn haben, in je zwei Summanden, ein Integral über den großen Halbkreis (P) und ein Integral über die doppelte negative Abszissenaxe und den kleinen Schlußkreis um den Anfangspunkt als Zentrum. Geht man zu unendlichen Grenzen über, so wird für die einzelnen Terme der erste Summand sinnlos, der zweite Summand konvergiert aber stets zu einem bestimmten Grenzwert. Wenn wir nun aber die Summe aller dieser Terme bilden, so heben sich auf dem großen Kreise die Teile, welche die Integrale einzeln divergent machen, fort, und für die Summe konvergiert das Integral über den großen Halbkreis mit unendlich wachsendem P zu null; es bleiben also nur die konvergenten Integrale über die doppelte negative Abszissenaxe und den kleinen Schlußkreis, und so ergibt sich das frühere Resultat.

Es liegt auf der Hand, daß solche unerlaubte Rechnungen in manchen Fällen auch zu unsinnigen Resultaten führen können, es ist daher immer notwendig, die Dinge auf eine strenge Basis zu stellen, wenn auch der heuristische Wert der Operatorenmethode, auch bei etwas kühnerer Anwendung, nicht zu unterschätzen ist.

Digitized by Google

Verallgemeinerung von Iterationen für nicht ganze Iterationszahlen [1]).

Von Arthur Korn in Charlottenburg.

Die Heaviside'sche Operation p ist eine einmalige Differentiation einer Funktion $f(t)$, bei ganzem, positivem n die Operation p^n eine n-malige Differentiation;

$$\frac{1}{p}$$

bedeutet die Operation

$$\int_0^t (-)\, dt;$$

hat man die Operation

$$p^{-n}$$

bei ganzem positivem n auszuführen, so hat man

$$\underbrace{\int_0^t \int_0^t \ldots}_{n \text{ mal}} \int_0^t (-)\, dt \ldots dt\, dt$$

zu bilden. Die Anwendung der Heaviside'schen Methoden führte nun auch auf Fälle, in welchen Operatoren

$$p^n$$

mit nicht ganzem n, z. B. mit $n = \frac{1}{2}$, eine Rolle spielen, und diese Verallgemeinerung hat eine offenbare Verwandtschaft mit den früher schon mehrfach versuchten Verallgemeinerungen von Differentiationen für nicht ganze Exponenten.

Da z. B. für eine Potenz

$$t^m$$

der $n$te Differentialquotient

$$= m(m-1)\ldots(m-n+1)\, t^{m-n} = \frac{m!}{n!}\, t^{m-n}$$

ist, so liegt nahe, auch für nicht ganze m und n

$$\frac{d^n t^m}{dt^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}\, t^{m-n} \tag{1}$$

zu verallgemeinern und solche Verallgemeinerungen auch für an-

1) Vorgetragen in der 253. Sitzung am 30. Januar 1929.

Digitized by Google

dere Funktionen, die sich als Potenzreihen darstellen lassen, durchzuführen.

Ein anderer Versuch einer solchen Verallgemeinerung geht von der Fourier'schen Entwicklung aus; da für ein beliebiges positives ganzes n

$$(2)\quad \frac{d^n \cos mt}{dt^n} = m^n \cos\left(mt + n\frac{\pi}{2}\right);\quad \frac{d^n \sin mt}{dt^n} = m^n \sin\left(mt + n\frac{\pi}{2}\right),$$

liegt es nahe, die Formel auch für nicht ganze n zu verallgemeinern; man kann auch von den komplexen Funktionen

$$e^{imt}$$

ausgehen und von der Formel:

$$(3)\quad \frac{d^n e^{imt}}{dt^n} = (im)^n e^{imt}.$$

Es handelt sich hier um ein besonderes Beispiel von Iterations-Verallgemeinerungen für nicht ganze Iterationszahlen, und ich möchte hier noch ein anderes Beispiel einer solchen Verallgemeinerung angeben, das mit dem vorigen wiederum eine große Verwandtschaft hat.

Denken wir uns, ähnlich wie in der Theorie der linearen Integralgleichungen, eine in einem gegebenen Gebiete

$$0 \leqq x \leqq 1,$$
$$0 \leqq y \leqq 1$$

der Einfachheit halber eindeutige und stetige Funktion

$$K(x, y),$$

die in bezug auf x und y symmetrisch ist. Wir bilden für eine gegebene im Intervalle

$$0 \leqq x \leqq 1$$

eindeutige und stetige Funktion $f(x)$:

$$(4)\quad \begin{cases} f_1(x) = \int_0^1 f(y)\, K(x, y)\, dy, \\ f_2(x) = \int_0^1 f_1(y)\, K(x, y)\, dy, \ldots \end{cases}$$

Der Gedanke kann in uns auftauchen, wie können wir eine Iteration mit nicht ganzem positivem n

$$f_n(x)$$

einführen?

Digitized by Google

Es bietet sich ohne große Künstelei die folgende Möglichkeit: Sind λ_j und φ_j die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen, welche den Relationen:

$$\varphi_j(x) = \lambda_j \int_0^1 \varphi_j(y)\, K(x,y)\, dy \tag{5}$$

genügen, dann ist:

$$K(x,y) = \sum^j \frac{\varphi_j(x)\,\varphi_j(y)}{\lambda_j}, \tag{6}$$

und

$$\begin{cases} K_1(x,y) = \int_0^1 K(x,z)\, K(z,y)\, dz = \sum^j \frac{\varphi_j(x)\,\varphi_j(y)}{\lambda_j^2}, \\ K_2(x,y) = \int_0^1 K_1(x,z)\, K(z,y)\, dz = \sum^j \frac{\varphi_j(x)\,\varphi_j(y)}{\lambda_j^3}, \cdots, \end{cases} \tag{7}$$

allgemein für jedes ganze positive n:

$$K_n(x,y) = \sum^j \frac{\varphi_j(x)\,\varphi_j(y)}{\lambda_j^{n+1}}. \tag{8}$$

Da

$$f_n(x) = \int_0^1 f(y)\, K_{n-1}(x,y)\, dy,$$

können wir definieren:

$$f_n(x) = \sum^j \int_0^1 f(y)\,\varphi_j(y)\,dy\, \frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j^n}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

im besonderen, wenn die Entwicklung nach Eigenfunktionen besteht:

$$\begin{cases} f(x) = \sum^j C_j\, \varphi_j(x) \\ C_j = \int_0^1 f(y)\, \varphi_j(y)\, dy, \end{cases} \tag{9a}$$

wird:

$$f_n(x) = \sum^j C_j \frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j^n}, \quad (n = 0^1), 1, 2, \ldots). \tag{9b}$$

Diese Formeln können offenbar auch auf nicht ganze positive n verallgemeinert werden.

Die Gefahr, daß solche Verallgemeinerungen in Spielereien ausarten, wird in dem Momente beseitigt, in dem es gelingt, solche Verallgemeinerungen zur Lösung bestimmter Probleme zu verwerten, und ich will hier, im Anschluß an die Heaviside'sche Me-

1) Für $n = 0$ soll $f_0(x) \equiv f(x)$ gesetzt werden.

Digitized by Google

thode zur Integration der Wärmeleitungsgleichung, ein bestimmtes Problem behandeln, in dessen Lösung von einer der genannten Verallgemeinerungen Gebrauch gemacht wird. Diese Anwendung gibt uns auch Fingerzeige, mit welcher Vorsicht man im allgemeinen bei solchen Verallgemeinerungen vorgehen muß, wenn man zu brauchbaren Resultaten gelangen will. Ich werde mich auf ein sehr spezielles Beispiel beschränken, wie denn überhaupt diese kurzen Ausführungen mehr eine Anregung geben, als eine systematische Theorie vorstellen sollen.

Ich betrachte die lineare Integro-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \int_0^1 f(x,y)\,K(t,y)\,dy \tag{10}$$

in einem für x einseitig unendlich ausgedehnten Intervalle

$$0 \leqq x < \infty,$$

unter der Bedingung, daß für

$$x = 0$$

die unbekannte Funktion als Funktion $\varphi(t)$ gegeben ist, während sie für

$$x = \infty$$

verschwinden soll. Wir wollen über die Funktion $\varphi(t)$ die Voraussetzung machen, daß sie im Intervalle

$$0 \leqq t \leqq 1$$

eindeutig und stetig und nach den Eigenfunktionen des symmetrischen Kernes

$$K(y,t)$$

entwickelbar ist:

$$\varphi(t) = \sum_j c_j \varphi_j(t). \tag{11}$$

Wir setzen formal:

$$f(x,t) = \sum_j C_j(x)\,\varphi_j(t) \tag{12}$$

wobei wir uns vorbehalten, für die dabei später zu wählenden $C_j(x)$ die Konvergenz nachzuweisen, dann ist (10) erfüllt, wenn

$$\begin{cases} C_j''(x) = \dfrac{C_j(x)}{\lambda_j}, \\ C_j(x) = \alpha_{j1}\, e^{-\frac{x}{\sqrt{\lambda_j}}} + \alpha_{j2}\, e^{+\frac{x}{\sqrt{\lambda_j}}}, \end{cases} \qquad (\alpha_{j1},\ \alpha_{j2} \text{ Konstanten}), \tag{13}$$

Digitized by Google

und wenn wir das Verschwinden für

$$x = \infty$$

verlangen, muß jedes

(14a) $$\alpha_{j_2} = 0$$

sein, schließlich

(14b) $$\alpha_{j_1} = c_j,$$

wenn die Lösung für $x = 0$ in $\varphi(t)$ übergehen soll. Wir haben also die Lösung

(15) $$f(x,t) = \sum^j c_j e^{-\frac{x}{\sqrt{\lambda_j}}} \varphi_i(t),$$

und man sieht leicht, daß bei unseren Voraussetzungen die Reihe (12) mit ihren ersten und zweiten Ableitungen nach x konvergiert.

Wir bilden nun für $x = 0$ die Ableitung nach x

(16) $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = -\sum^j \frac{c_j}{\sqrt{\lambda_j}} \varphi_j(t),$$

dann haben wir hier die Iteration

(17) $$\varphi_n(t) = \int_0^1 \varphi(z) K_{n-1}(z,t)\, dz$$

für den Fall

(18) $$n = \tfrac{1}{2}.$$

Wir haben also hier ein ganz bestimmtes Beispiel der Anwendung einer Iteration mit gebrochener Iterationszahl für die Lösung eines bestimmten Problemes; wir sehen sogleich, welche Vorsicht man anwenden muß:

1. Muß die gebrochene Iteration eindeutig gemacht werden, das geschieht hier durch die Festsetzung des Wurzelzeichens $\sqrt{\lambda_j}$, welches stets das negative sein mußte.

2. Haben wir über $\varphi(t)$ eine einschränkende Voraussetzung gemacht: $\varphi(t)$ soll in der Form (11) darstellbar sein, also z. B. als ein Resultat einer einmaligen Iteration, diese Bedingung ist hinreichend, braucht allerdings nicht als notwendige Bedingung zu gelten.

Etwas ähnliches finden wir bei dem früher behandelten Problem der Wärmeleitung. Wenn für

(19) $$0 \leqq x < \infty$$

die Gleichung besteht:

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{20}$$

ferner

$$\begin{cases} U = 0, \ (t = 0); \\ U = \varphi(t), \ (x = 0), \\ U = 0, \ (x = \infty) \end{cases} \tag{21}$$

dann hatten wir:

$$U = \varphi(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} f\left(\frac{x}{a}, \ t-\tau\right), \tag{22}$$

wo

$$f(\alpha, \beta) = \int_0^a e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta}} d\alpha, \tag{23}$$

und für $x = 0$ ist:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \tag{24}$$

unter der Voraussetzung, daß $\varphi(\tau)$ und $\varphi'(\tau)$ für

$$0 \gtreqless \tau \gtreqless t$$

eindeutig und stetig sind und

$$\varphi(t) = 0, \text{ für } t = 0. \tag{25}$$

Die letztere Bedingung ist hinreichend, braucht allerdings nicht als notwendige Bedingung zu gelten.

Den Ausdruck (24) kann man auch als den $\frac{1}{2}$ten Differentialquotienten von $\varphi(t)$ interpretieren, multipliziert mit $\frac{1}{a}$; wir sehen auch hier wieder die Vorsichtsmaßregeln, die zu treffen sind: Wir müssen erst die Eindeutigkeit durch die Festsetzung des Zeichens von $\sqrt{t-\tau}$ erreichen, entsprechend der früheren Festsetzung über $\sqrt{p}$, und dann haben wir als hinreichende Bedingung für die Existenz des $\frac{1}{2}$ten Differentialquotienten das Verschwinden von $\varphi(0)$ und die Stetigkeit von $\varphi(\tau)$ und $\varphi'(\tau)$ annehmen können. Gewiß — das ist von vornherein selbstverständlich — wird man diese Bedingungen ein wenig einschränken können, ebenso selbstverständlich ist aber auch, daß die Stetigkeit von $\varphi(\tau)$ allein nicht genügt. Die hier angegebenen Fälle sind typisch für die Verallgemeinerungen der betrachteten Iterationen, und man sieht, daß hier große Vorsicht am Platze ist.

Digitized by Google

Begründung des Satzes, daß es in Wirklichkeit Prozesse gibt, die sich mit beliebig großer Geschwindigkeit fortpflanzen [1]).

Von Emanuel Lasker in Berlin.

I.

Von Leibniz, sagt man, stammt das Prinzip der identitas indiscernibilium. Gemäß diesem Prinzip sind zwei Dinge, die nicht zu unterscheiden sind, miteinander identisch. Oder umgekehrt, ein Unterschied, der irgendwo oder irgendwann oder irgendwie vorhanden ist, kann auch aufgezeigt oder erlebt oder wahrgenommen werden.

Dieser Satz gibt uns einen wertvollen Hinweis auf die Wahrnehmung, deren Funktion es ist, uns das Konkrete zu sondern und zu zeigen. Das Wahrnehmbare ist, seinem Wesen nach, ein Unterschied. Nach obigem Satze ist ein konkretes Etwas, das nicht wahrnehmbar wäre, nur ein Hirngespinnst. Das Konkrete hat irgendwie, zumindest im Grundsatz, die Eignung, wahrnehmbar gemacht, also als ein Unterschied empfunden und aufgewiesen zu werden. Und ich setze noch hinzu, was Leibniz vielleicht dabei stillschweigend angenommen hat, daß das wahrnehmende Wesen weder ein Gott noch ein Engel, sondern eine Kreatur sei, die sich in der Welt zu orientieren trachtet.

Einen Unterschied zu konstatieren geht nur an, nachdem eine Vergleichung von einem mit einem andern vorhergegangen ist. Das liegt schon im Begriff des Unterschiedes. Sonach ist der obige Satz des Leibniz die Wurzel aller Theorien über das Relative im Gebiet des Konkreten; sagt er doch, daß ein absolutes konkretes Etwas nicht sein kann. Da nun die Physik Wissenschaft vom Konkreten sein will, so ist obiger Satz für sie von grundlegender Bedeutung. Und in der Tat hat die Erwägung oder Betrachtung, die im Satze von Leibniz gipfelt, wenn auch vielleicht in einer etwas rohern Gestalt Galilei und Newton vorgeschwebt, als sie, auf ihre Art, ein Prinzip des Relativen aufgestellt haben.

Man kann die Erwägung von Leibniz auch auf folgende Art zum Ausdruck bringen. Der Mann der Wissenschaft muß die Wissenschaft bejahen, ebenso, wie der Staatsmann das Leben bejahen muß. Das ist die Voraussetzung, gemäß der er wirkt, arbeitet und schöpferisch ist. Aus dem Ethos dieser Bejahung folgt für den Physiker, daß er alles, das zu seiner Wissenschaft gehört, im Grundsatz für wahrnehmbar halten und erklären

1) Vorgetragen in der 254. Sitzung am 27. Februar 1929.

Digitized by Google

muß. Freilich nur im Grundsatz, d. h. nur für einen Physiker überhaupt, nicht für diesen oder jenen Physiker, noch für diese oder jene Zeit, aber doch für irgendeinen endlichen, Physik treibenden Geist. Sonach gilt die Formel: Sofern etwas in der Natur ist, ist es für einen endlichen, Physik treibenden Geist wahrnehmbar. Und was im Prinzip nicht wahrnehmbar ist noch sein kann, weil es eben so geartet ist, daß es seine Wahrnehmbarkeit jedem endlichen Geiste verschließt, dies ist ein Unding, ein Wahngebilde, ein theoretisches, kein wirkliches Etwas.

II.

Aus dem Satze des Leibniz entspringt eine Betrachtung über physikalische Systeme, die zu Prinzipien der Relativität geführt hat. Im leeren Raume ist keine Wahrnehmung möglich. Wird nun dort ein physikalisches System hineingestellt, so hat der Forscher, um zu messen, zu beobachten, zu experimentieren, nur eben jenes System zur Verfügung. Da nun eine Wahrnehmung nur in einem Unterschied besteht, in einem Vergleichen mehrerer Dinge, mehrerer wirklicher Etwasse, so sind nur relative Feststellungen möglich. Zumindest *ein* Umstand ist in jedem System relativ, das folgt aus obiger Betrachtung; ob nicht mehrere oder viele Umstände relativ seien, ist eine Frage, die aus obigem Grundsatz allein nicht zu entscheiden ist.

In unsrer Praxis hat sich herausgestellt, daß die Vergleichung von Längen relativ ist. Eine Länge ist demnach, wenn wir unsere Praxis zu Grunde legen, niemals absolut, sondern nur in einer Längen-Einheit meßbar, die willkürlich, etwa als der zehnmillionste Teil des Erdquadranten, zu wählen ist. So ist es mit dem Zeitmaaß und dem Maaß der Masse. Wiederum, die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt bewegt, ist nur als Differenz zur Geschwindigkeit irgend eines andern Punktes wahrnehmbar. Gewöhnlich geschieht dies, indem der Beobachter seinen Leib als im wesentlichen ruhend ansieht. Man kann nun diesen Sätzen eine mathematische Form erteilen, etwa, indem man Koordinaten einführt und nun aussagt, daß in einem physikalischen Gesetze, d. h. einer Relation, die in einem physikalischem System bestimmter Artung erfüllt wird, nur Differenzen von Geschwindigkeiten, Proportionen von Längen, Proportionen von Zeiten und Proportionen von Massen vorkommen können. Und so kommt man zu einer Lehre von Relativität und von den physikalischen Dimensionen eines Systems, von der nicht feststeht, wie viele relative Einheiten sie zu umfassen hat, um dem Reichtum der Wirklichkeit gerecht zu werden.

Bekanntlich ist nun neuerdings gegen diese ganze Lehre der Einwand erhoben worden, daß sie mit der *Erfahrung* nicht übereinstimme. Aus der Erfahrung ergebe sich, daß die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raume eine gewisse angebbare Größe habe. Sonach seien doch am leeren Raume

Digitized by Google

Beobachtungen möglich, und zumindest die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume sei eine derartige, unbezweifelbare Beobachtung.

Hiergegen ist zu erwidern, daß ein leerer Raum nur etwas Vorgestelltes ist, ein Abstraktum, und zwar jenes Abstraktum, auf dem die Geometrie beruht. Erfahrung aber hat es nicht mit bloßen Abstractis zu tun, sondern orientiert sich an der Wirklichkeit. Nun liegt es in der Natur der Dinge, daß wir niemals konstatieren können, dieser Raumteil sei leer, jener nicht. Wir können es nicht, aber auch kein endlicher Geist vermag dies, wie schon aus dem Begriff der Endlichkeit eines Geistes hervorgeht. Eine annähernde Leere, wie etwa die des luftleeren Raumes, können wir durch Beobachtung feststellen und oft genug dessen Grad der Erfüllung messen. Beispielsweise werden durch gewöhnliche Verfahren Raumteile hergestellt, die etwa 1/10 000 Atmosphäre Druck haben. Und der Astronom spricht von viel kleinern Dichten, die bei gewissen Nebeln von der Größenordnung 10^{-15} der Dichte der Luft sind. Aber im Grundsatz ist es unmöglich, eine absolute Leerheit zu messen, weil die Sinne eines Geistes, auf die alle Wahrnehmung letzten Endes zurückgeht, wegen ihrer Endlichkeit, ihrer Beschränktheit, eine Schwelle haben. Ist für uns etwa 10^{-15} oder 10^{-28} die Schwelle, so mag für höhere endliche Geister 10^{-100} oder 10^{-n} der Schwellenwert sein, aber irgend eine solche Schwelle hat jeder endliche Geist wegen seiner Endlichkeit. Und so vermag ein endlicher Geist wohl eine gewisse, mehr oder minder rohe Annäherung an die Leerheit zu messen und zu beobachten, doch nie die absolute Leerheit, wie sie sich der Geometer denkt. So etwas kann nur der Gedanke konstruieren, der Maaßstab versagt dort, sofern wir nicht endlichen Geistern unendliche Vermögen andichten wollen. Die *Erfahrung* also vermag gar nicht zu konstatieren, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume eine gewisse Größe habe, denn im leeren Raume hat die Erfahrung kein Heim. Im Raumteil, der dem Sonnensysteme angehört, wie etwa auf der Erde oder auf dem Jupiter, sind solche Beobachtungen möglich, aber dort ist die Dichte an den dünnsten Stellen vermutlich der Größenordnung von etwa 10^{-13} der Luftdichte. Unsere Beobachtungen reichen noch nicht einmal hin, um die Lichtgeschwindigkeit am Fixsternhimmel zu messen, und eine Interpolation auf die Leere ist daher zu verwegen, wäre zu verwegen auch, wenn sie sich nicht dazu noch in logische Widersprüche verwickelte.

III.

Der Begriff eines endlichen Geistes, wie er hier im Argumente auftritt, ist kein andrer als was wir unter der Kreatur verstehen. Damit ist, vom Standpunkte der Wissenschaft aus, über unendliche Geister nichts ausgesagt. Die Natur, jedenfalls, hat keine Beschränktheiten wie der endliche Geist, denn der Geist stellt sich Dinge vor und spekuliert darüber; seine

Digitized by Google

Vermögen, wenn er mit der Natur ringt, sind endlich; die Natur aber *verwirklicht* Dinge, darunter einen Kosmos im Raume und eine Geschichte und eine Kultur in der Zeit. Auch endliche Geister werden verwirklicht; sie stellen sich Aufgaben, suchen sie zu lösen, sie leben und forschen. Man darf wohl die Wirklichkeit einen unendlichen Geist nennen, lebende Wesen darin endliche Geister. Und dabei bleibe es dahingestellt, wie und wo und wann Wesen leben. Wenn wir uns vorstellen, daß auf einem fernen Sterne lebende Wesen sind — und diese Vorstellung hat gar nichts Sonderbares — so sind wir gehalten, sie uns als endlich zu denken. Das heißt, deren Sinne werden keine absolute, will sagen mathematische Genauigkeit erzielen, deren Vermögen werden in jedem Betracht eine endliche Grenze haben, so daß diese Wesen mit endlicher Anstrengung zu überwinden sind. Sie sind Bauern auf dem Schachbrette der Wirklichkeit, oder Offiziere, schwach oder ein wenig stärker, aber nie unendlich. Die Wirklichkeit jedoch, so müssen wir wohl annehmen, hat in sich die Fruchtbarkeit, um, über jedes endliche Vermögen hinaus, ein größeres, stärkeres, genaueres, vollkommneres Vermögen zu schaffen.

Von unendlichen Geistern nun handeln wir gar nicht, wohl aber von endlichen Geistern, wie wir sie jeden Augenblick in der Erfahrung treffen. Die Endlichkeit eines jeden lebenden Wesens ist die begründetste Erfahrung und ist zugleich von zwingender Anschaulichkeit.

IV.

Woher nun, so dürfen wir fragen, nimmt der endliche Geist das Recht, über Unendliches und über Vollkommenes zu reden? Aus dem Ideal, aus dem Ethos heraus. Es gibt genug Männer der Wissenschaft, die sich mit dem Gegebenen begnügen wollen. Beispielsweise, das Ohr des Menschen hat eine solche Struktur, daß es gewisse Schwingungen elastischer Medien als Ton, Klang, zumindest Geräusch wahrnimmt, während es Schwingungen außerhalb dieser Spielbreite nicht hört. Mithin sind für jene sehr nüchtern denkenden Menschen Töne und Klänge, wie Schall überhaupt, auf ein gewisses Intervall elastischer Schwingungen beschränkt, und was darüber hinausragt ist für diese Denker nicht hörbar und nicht Schall, weil für sie das *menschliche* Ohr und kein andres das Maß der Dinge ist. Diese Anschauung wird von vielen großen Denkern nicht geteilt. Die Natur kann ein vollkommneres Ohr schaffen, das lebende Wesen kann es entwickeln, wo die Not des Lebens zu einer solchen Anstrengung zwingt und das vollkommnere Ohr diese Anstrengung, es zu entwickeln, kompensiert. Im Sinne dieser Anschauung läßt sich jedes lebende Wesen in jedem seiner Vermögen vervollkommnen, so daß es die Schwellenweite seiner Sinne und seine technischen Hilfsmittel verbessern kann. Freilich, die Exaktheit eines vollkommnen Sinnesorganes ist unerreichbar, schon deswegen, weil diese Un-

Digitized by Google

übertrefflichkeit des Sinnesorganes zu seiner Herstellung eine unendliche Anstrengung nötig machen würde, während das Geschöpf doch endlich ist. Aber für die letzteren, sich an Idealen orientierenden Denker ist das Sinnesorgan im Grundsatz so verbesserungsfähig, daß es einem vollkommenen Organ in asymptotischer Annäherung beliebig nahe kommen kann. Diese über das Gegebene hinaus in's Reich der Ideale gehende Anschauung würde ich empfehlen, weil uns sonst im Begreifen der Wirklichkeit eine unerklärliche Lücke bliebe. Letzten Endes ist dies eine Frage des Ethos des Forschens. Soll man sich bescheiden und nur bei den uns Menschen Gegebenen, wie etwa dem menschlichen Ohr stehn bleiben? Man kann und darf es. Aber darf man durch diesen Grundsatz die Forschung Aller bestimmen? Nein! Denn aus einer zufälligen, individuellen Beschränktheit heraus eine Art Weltgesetz zu machen, das geht nicht an. Gegen solche engherzige Festsetzung würden unabhängige Forscher immer rebellieren, und zwar mit dem Rechte, daß sie ein Ideal haben, das sich wohl mit einer grauen Gegenwart abfinden aber diese Gegenwart niemals als Herrscher und Gesetzgeber anerkennen wird.

V.

Den leeren Raum kann man nicht konkret hinstellen, wohl aber asymptotische Annäherungen daran. Freilich bleibt da der Begriff der Annäherung zu diskutieren, wie er von Physikern zu verstehen ist. Es ist noch nicht lange her, da man die Menge der Partikeln in einem Behälter als eine gewisse ganze Zahl n von Atomen oder Molekeln ansah. Demgemäß würde man sich vorzustellen haben, daß die durchschnittliche Entfernung zwischen Partikeln im Behälter eine gewisse meßbare Größe habe, sagen wir, etwa, daß bei gewissen Nebeln in einem Kubikmeter etwa 10^{10} Partikeln sind. Fernerhin müßte nach dieser Anschauung der Raum zwischen den Atomen leer sein. Dieser Ansicht hat von jeher eine andre entgegengestanden, wonach möglicherweise ein Gas wohl eine körnige Struktur haben könne, auf jeden Fall aber den Raum *stetig* erfüllen müsse. Nun hat die Vorstellung leerer Zwischenräume alle logischen Schwierigkeiten in sich, die dem leeren Raume als einem konkreten Etwas überhaupt anhaften. Und wie wir den leeren Raum ein Abstraktum nannten, dürfen wir schließen, daß die Leerheit der Zwischenräume wohl vom spekulierenden Verstande konstruiert, doch nimmer von einem endlichen Geiste, und sei es durch noch so feine Werkzeuge, wahrnehmbar gemacht werden könne. Die Verdienste der Atom-Theorie sollen hierbei keineswegs geleugnet werden, es muß aber hervorgehoben werden, daß die Erfolge der Atom-Theorie auch zu erreichen sind, wenn man sich Gas als körnig, als aus Tröpfchen bestehend, zwischen denen ein sehr viel dünneres Medium fließt, vorstellt, kurz, wenn sowohl im Atom wie um das Atom herum stetige Übergänge statt haben.

Digitized by Google

Dies zu sagen war nötig, um zu begründen, daß man sich Raumteile vorstellen kann, deren Gasdichte einen beliebig kleinen Wert, etwa 10^{-100} oder 10^{-n}, erreicht. Wäre diese Vorstellung nicht möglich, so wäre nicht einzusehen, wie der Physiker experimentell mit leeren Raumteilen agieren könne. Nach obiger Erklärung indessen kann er sich der Leere als einem Grenzfall asymptotisch nähern, und der leere Raumteil wird dadurch für den Physiker ein idealer Gegenstand, wie etwa ideales Gas: ein Objekt für seine Experimentierkunst, sei es für jene im Laboratorium oder in der Werkstätte seines Kopfes, wo es die Form des Gedanken-Experiments annimmt.

Ein solches Gedanken-Experiment werde nun angestellt. Die Dichte eines mit Gas erfüllten Raumteils werde fortgesetzt herabgesetzt, dabei sinke gleichzeitig und proportional der Energie-Umsatz, und dann werde die Lichtgeschwindigkeit in ihm gemessen. Hat die Lichtgeschwindigkeit, wenn $\lim \delta = 0$, einen Grenzwert, und welchen? Offenbar versagt zuletzt die Wahrnehmung, wenn δ sich immerfort verringert und die Energie-Umsätze unter den endlichen Betrag sinken. Hätte nun die Lichtgeschindigkeit C irgend einen endlichen Grenzwert γ, so läge hier ein physikalisch wertvolles Faktum vor, das doch kein endlicher Geist je feststellen könnte, weil infolge der Natur des Grenzüberganges seine Sinne ihm überhaupt keine Angaben mehr machen. Wir hätten an einem endlichen Grenzwert γ ein Phänomen, das überhaupt und prinzipiell sich jeder logischen Einordnung durch einen endlichen Geist widersetzt und das dennoch, da es die Wirklichkeit und nicht etwa ein bloß ausgedachtes Abstraktum betrifft, von höchstem Interesse ist. Wäre $\gamma = \infty$ für wirkliche, wesenhafte Phänomene nicht zutreffend, wäre also ein γ endlich, so fände der Forscher in jedem endlichen γ etwas Absolutes, jeder Deduktion, jeder Kontrolle, jeder Einsicht entzogenes. Der leere Raum erschiene als physikalisch wirksam, ein Abstractum hätte die Artung des Wirklichen. Abstrakte, d. h. nur anscheinend aber nicht wirklich physikalische Phänomene, mögen geartet sein wie sie wollen, auf sie trifft das obige Argument gar nicht zu. Aber in Wirklichkeit trifft die These zu, weil sonst ein wesenhafter Unterschied indiscernibilis sein müßte. Der Satz der Relativität wäre aufgehoben, und die Zuversicht des Forschers, daß sein Denken Sinn habe, wäre erschüttert. Zwar läßt sich konkret der Grenzübergang zu $\delta = 0$ nicht vollziehn, aber die Annäherung an $\delta = 0$ muß sich über jede Grenze hinaus noch immer festsetzen lassen, sofern wir an die Vervollkommnung der physikalischen Werkzeuge und des physikalischen Gedankens glauben. Unter diesen Bedingungen bedarf es keiner Rechnung, keiner mathematischen Formulierung in Koordinaten, um klar zu stellen, daß jeder Grenzwert der Reihe der C, bei $\lim \delta = 0$, d. h. also jedes γ unendlich groß sein muß. Wir müssen demnach ansetzen $\lim C = \infty$, sofern $\lim \delta = 0$, oder die

Digitized by Google

Hoffnung aufgeben, daß der Geist jedes wesentliche physikalische Phänomen durchleuchten könne. Solche Hoffnung aber aufgeben wäre, wie oben gesagt, wie ein Selbstmord des Forschers, denn er vermag wohl zu forschen, solange er sich seiner eignen Unzulänglichkeit erinnert, doch keineswegs mehr, sofern er die Unzulänglichkeit des mit grenzenlosen Möglichkeiten zur Vervollkommnung ausgestatteten Geistes zu behaupten sich unterfängt.

Sie würden es vielleicht vorziehen, daß ich diese Betrachtung in mathematische Form kleidete, dabei läuft man aber die Gefahr, den Gedanken unter seinem Kleide zu verdecken, wo nicht zu ersticken. Das Wesentliche ist, daß unter den Bedingungen des Problems nach einer kurzen, jedenfalls endlichen Reihe von Versuchen die Wahrnehmung versagt. Die Genauigkeit der Ergebnisse nimmt dabei gleichsam zu Null ab, und das trifft zu, wie herrlich auch die Instrumente seien, die der Forscher zu dem gedachtem Zwecke verwendet, und wie hochgezüchtet er auch sei, sei er auch das Endprodukt von sagen wir einer Million Generationen genialer Physiker, Wäre unter diesen Bedingungen ein Grenzwert von C gleich einer gewissen endlichen Größe γ, so wäre dies γ unwahrnehmbar und doch existent, ja, physikalisch von hohem Belang, und das verstößt gegen den Gedanken von Leibniz. Sofern, dagegen, $\gamma = \infty$ so heißt dies, daß die Strahlung im Nu verfliegt, daß sie in der Grenze gleichsam nicht vorhanden ist, und damit würde sowohl den physikalischen Erfordernissen der Strahlung wie dem Satze von Leibniz in gleicher Weise genügt.

Das Entscheidende hierbei ist der Sinn des Gedankens, dem sich zwar die Form der Rechnung anziehen läßt, der aber natürlicher als reiner Gedanke erscheint, so sein Recht einfordert und seine gesunde Kraft erweisen will.

Eine andere hiermit zusammenhängende Betrachtung möchte ich erwähnen, weil sie auf ein Problem, das der heutigen Zeit von Interesse ist, einiges Licht wirft. Nehmen wir einmal an, daß zwei auf sehr entfernten Sternen lebende, physiktreibende Forscher, die miteinander Lichtsignale austauschen, ihre Zeitangaben vergleichen wollen. Übersteigt die Lichtgeschwindigkeit nie eine endliche Grenze γ, so ist das Problem der Zeitmessung verquickt mit einer Längenmessung. Setzen wir $\lim C = \infty$, so ist im Grundsatz die Vergleichung von Zeiten an beliebigen Orten möglich, wie weit sich auch die beiden Forscher voneinander entfernen mögen.

Was hier vom Licht gesagt ward, trifft naturgemäß für jede Art von Strahlung, z. B. Schall oder Wärme oder Explosionen etc. zu.

Bei dieser Betrachtung ist nicht sowohl der leere Raum das Wesentliche, sondern die Wahrnehmung und deren Funktion. Für die Wahrnehmung nun ist ein Raum ohne Bewegung, ohne Änderung, sofern dort keinerlei Umwandlung von Energien ineinander vor sich gehen. Solch ein

Digitized by Google

Raumteil ist für die Wahrnehmung zwar nicht leer, aber ruhend, tot, veränderungslos; denn die Wahrnehmung bedarf einer *Umwandlung* von Energien um zu funktionieren. So muß der Strahl der Sonne erst auf einen *Gegenstand* treffen, um als Wärme und als Licht empfunden zu werden. Er transformiert die ihm eigentümliche Art von Energie dabei. Und wenn ein elektrischer Strom fließt, so transformiert sich diese Energie, indem sie Widerstand erleidet, in die ganz anders geartete der Wärme. Aus diesem Grunde läßt sich die obige Betrachtung wiederholen und anwenden auf jeden Raumteil, in dem keinerlei Umwandlung von Energien statt hat.

Gewiß, alles Wahrnehmbare ist an Energie-Umwandlung gebunden, und einen Raumteil, wo schlechthin keinerlei, auch nicht die geringste Umwandlung von Energien vor sich geht, kann es nicht geben. So etwas ist ein Abstractum wie der leere Raum. Aber annähern können wir uns diesem Grenzfall, und dann muß nach obigen Betrachtungen die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der physikalischen Prozesse in solchen Räumen den Grenzwert ∞ haben.

VII.

Ich komme nun zu der Frage, inwiefern sich diese Sätze für die Kunst des Experiments verwerten und so auf die Probe stellen lassen. Da ist es von Belang, daß bei der Messung von Geschwindigkeiten die gesuchte Größe sich oft als ein Bruch ergibt. Beispielsweise, beim Stoß eines Körpers auf einen zweiten, findet sich die dem letzten erteilte Geschwindigkeit, sofern keine Umwandlung von Energie statt hat, als ein Bruch, dessen Nenner die Masse des gestoßenen Körpers. Ist diese sehr klein und kommen beim Stoß keine nennenswerten Umformungen von Energie vor, so nimmt der gestoßene Körper eine sehr hohe Geschwindigkeit an. Ganz so gilt es, nach obigen Erwägungen, allgemein, daß der Nenner des Bruches, der die Geschwindigkeit eines Vorganges bestimmt, der 0 zustrebt, wenn die beim Vorgange stattfindende Energie-Umwandlung der Null zustrebt. Ich erinnere Sie ferner an die Formel von Young für die Schallgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{e}{\delta}}$. Sofern bei dem Versuche Umwandlung von elastischer Energie in Wärme eine Störung bewirken sollte, müßte man freilich dabei die Temperatur des absoluten Nullpunktes asymptotisch herzustellen trachten. Und da bei starker Verdünnung der Schall nicht akustisch wahrnehmbar bleibt, müßte man ihn am Ende der Bahn in eine sichtbare Energieart umwandeln, etwa in Elektrizität, und ihn so wahrnehmbar machen, aber das hat ja keine Schwierigkeit. Ich erinnere ferner an Ohm's Formel, worin Spannung als ein Bruch erscheint, in dessen Nenner der Widerstand R steht, und an verwandte Maxwellsche Gleichungen. Neuerdings hat man gelernt, R sehr nahe 0 zu machen, denn

Digitized by Google

nach einem Satze von Onnes ist in gewissen Metallen $\lim R = 0$ sofern $\lim T = 0$, wo T die Temperatur. Eine Betrachtung von Maxwell über einen Grenzfall, nämlich die Verbreitung elektromagnetischer Störungen in vollkommenen Leitern, findet sich in dessen großem Werke (Bd. 25, S. 556, Jahr 1883 deutsche Ausgabe). Maxwell führt aus, daß eine Störung im obigen Grenzfalle sich mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Er drückt dies so aus, daß die Geschwindigkeit, mit der dieser Prozeß vor sich geht, durchaus abhängt von der Kleinheit des Unterschieds, den man noch als meßbar betrachtet. Jene Geschwindigkeit ist um so größer, je kleiner der Unterschied ist, den man noch als meßbar ansieht, und sie geht im betrachteten elektrischen Felde über jeden angegebenen Betrag, wenn nur jener Betrag des noch als meßbar angesehenen Unterschiedes klein genug gewählt ist. Dies ist eine andere Formulierung dafür, daß der Limes der Geschwindigkeit unendlich groß ist. Auf andere die Kunst des Experiments betreffende Fragen hier einzugehen, fehlt mir die Zeit, auch ist der Gegenstand dafür zu groß, doch ist schon durch obiges genügend klar, daß die obigen Betrachtungen keineswegs in rein theoretischen Bahnen leer laufen.

Nachtrag.

In der Diskussion, die diesem Vortrage folgte, fiel ein Wort, das ich noch beleuchten möchte. Es ward gesagt, nicht in tadelndem Sinne, daß die Methode des Vortrages auf Metaphysik gründe. Wird Metaphysik nicht als Phantasterei, sondern, wie es sein sollte, als Lehre von der Wirklichkeit verstanden, so trifft das obige Wort zu. Die Methoden, nach denen Physik zu verfahren hat, können nicht aus der Physik selbst hergeholt werden, da die Physik sich nach diesen Methoden erst zu entwickeln hat. Überhaupt kann es keine Wissenschaft geben, die ihre eignen Methoden festlegt, weil sie sonst sich selber begründen müßte, ein offenbar unmögliches Unternehmen, das öfter mit Münchhause's Erzählung, er habe sich am Schopfe ergriffen und so selber aus dem Sumpfe gezogen, erläutert wird. Demgemäß gründet die obige Erwägung in dem Axiome, daß im leeren Raume wie, allgemeiner, in dem an freier, zur Umwandlung bereiten Energien leeren Raume eine Wahrnehmung, sei es auch mit nahezu vollkommenen Sinnen und Instrumenten, nicht möglich sei. Auch für den Raum zwischen den Atomen wie innerhalb der Atome müssen wir dies als richtig unterstellen. Freilich gilt dies nicht aus physikalischen Gründen, sondern aus denen der Philosophie, oder, wenn man das Gebiet obiger Erkenntnisweise genauer umreißen will, aus Gründen der Metaphysik als Lehre von der Wirklichkeit. Viele große Physiker haben Fernwirkung, also auch Wirkung im leeren Raume, als unmöglich betrachtet, vielleicht darf man sagen, daß in diesem Punkte alle großen Physiker einig gewesen sind. Demnach wirkt ein Ding nur, wo es ist. Allein bezüglich der Frage, was das Etwas sei, das neben

Digitized by Google

Atomen sich im Raume befindet, und welche physikalischen Merkmale es habe, gingen die Ansichten der Physiker auseinander. Und dies ist ein berechtigtes Problem, sogar ein unendliches, das uns aber für die obige Erwägung nichts angeht.

Daß es Größen gibt, deren Nullpunkt eine Bedingung festlegt, unter der Umwandlungen gewisser Energien nicht vor sich gehen, läßt sich der Erfahrung entnehmen. Temperatur ist solche Bedingung für die Umwandlung von Energien in Wärme, Affinität für die Umwandlung von chemischen Energien, Masse für die Umwandlung von kinetischer Energie usw. Diese Frage ist also eine physikalische im engeren Sinne, keine metaphysische.

Der Lehrsatz, der oben erläutert ward, läßt sich physikalisch handlicher etwa so formulieren: Ein absolut stabiles System gibt es in Wirklichkeit nicht, wohl aber als Grenzfall. Er entspricht dem Fall, daß die freie Energie $= 0$. Eine Störung in solchem Systeme verläuft mit um so größerer Geschwindigkeit, die sich im Grenzfall bis zu unendlich steigert, je weniger die Störung die Stabilität verringert.

Welche Empfindlichkeit die heutigen Instrumente haben, läßt sich unter andern aus einer Abhandlung ersehn, die neuerdings Dr. Kogbethlians, Paris, geschrieben hat. Dort wird ein Verfahren vorgezeigt, um die Geschwindigkeit zu messen, die die Schwerkraft auf der Erde hat. Ist die Strahlung der Gravitation auf der Erde nicht schneller als das 48 fache der Lichtgeschwindigkeit im Sonnensystem, so muß die Gravitationsgeschwindigkeit sich nach jenem Verfahren messen lassen.

Digitized by Google

Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen [1]).

Von Erich Rothe in Breslau.

Sei $\mathfrak{B}$ ein n-dimensionaler abgeschlossener Bereich, R sein Rand. $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, \dots n)$ und b, ϱ seien in $\mathfrak{B}$ erklärte Funktionen. Sei ferner

$$L(u) \equiv \sum_{i,k}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - bu. \tag{1}$$

Hierbei sei $b \geqq 0$ und die quadratische Form $\sum_{1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$ sei positiv definit. Wenn dann $u_\nu(P)$ die normierten Eigenfunktionen und $\lambda = -\lambda_\nu$ die Eigenwerte des Problems

$$L(u) - \lambda\varrho(P)u = 0 \tag{2}$$

$$u = 0 \text{ auf } R \qquad \varrho(P) > 0 \tag{3}$$

sind, so läßt bekanntlich in den Fällen $n = 1, 2, 3$ jede zweimal stetig differenzierbare, der Randbedingung (3) genügende Funktion die Entwicklung

$$f(P) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu u_\nu(P) \qquad \left(c_\nu = \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi) f(\Pi) u_\nu(\Pi)\, d\Pi\right) \tag{4}$$

zu. Für lediglich stetiges f wäre jedoch die allgemeine Behauptung der Entwickelbarkeit in der Form (4) unrichtig, wie leicht aus der Tatsache folgt, daß nicht jede stetige Funktion sich in eine Fourierreihe entwickeln läßt. Demgegenüber hat Herr Hammerstein [2]) im Falle $L(u) \equiv \Delta u$ für $n = 1, 2, 3$ die Darstellung

$$f(P) = \lim_{l \to 0} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(l) c_\nu u_\nu(P) \qquad \left(c_\nu = \int_{\mathfrak{B}} u_\nu f(\Pi)\, d\Pi\right),$$

wobei

$$a_\nu(l) = \frac{\sin l\nu}{l\nu} \text{ für } n = 1,$$

1) Vorgetragen in der 255. Sitzung am 20. März 1929.

2) Über die Approximation stetiger Funktionen, durch Reihen, die nach Integralmittelwerten eines vollständigen Orthogonalsystems fortschreiten. Sitzber. d. Berl. Math. Ges., 25. Jahrg. Aus dem in der Hammersteinschen Arbeit bewiesenen Approximationssatz folgt als Spezialfall die Approximation stetiger Funktionen durch Reihen, die nach *Integralmittelwerten* der Eigenfunktionen von (2), (3) fortschreiten.

Digitized by Google

$$a_\nu(l) = \begin{cases} \dfrac{2J_1(l\sqrt{\lambda_\nu})}{l\sqrt{\lambda_\nu}} & \text{für } n = 2, \\ \dfrac{3}{(l\sqrt{\lambda_\nu})^2}(\sin(\sqrt{\lambda_\nu}l) - \sqrt{\lambda_\nu}l\cos(\sqrt{\lambda_\nu}l)) & \text{für } n = 3 \text{ ist,} \end{cases}$$

bewiesen[3]).

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden:

Satz. *Für $n = 1, 2, 3$ gilt in jedem inneren Punkt von $\mathfrak{B}$*

$$f(P) = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu u_\nu(P)}{1 + \frac{\lambda_\nu}{\lambda}} \qquad \left(c_\nu = \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi) f(\Pi) u_\nu(\Pi)\, d\Pi\right) \tag{5}$$

für jede in $\mathfrak{B}$ stetige Funktion, wenn $u_\nu(P)$ und $-\lambda_\nu$ die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Problems (2), (3) *sind*[4]).

Zusatz. *Erfüllt speziell f die Randbedingungen* (3), *so ist die Konvergenz gleichmäßig in dem abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$.*

Der Beweis beruht auf folgendem

Hilfssatz. *Ist $\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)$ die zu der Randbedingung* (3) *gehörige Greensche Funktion von* (2), *und ist*

$$U_\lambda(P) = \lambda \int_{\mathfrak{B}} f(\Pi)\varrho(\Pi)\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\, d\Pi, \tag{6}$$

so gilt in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$

$$\lim_{\lambda\to\infty} U_\lambda(P) = f(P). \tag{7}$$

Erfüllt speziell f die Randbedingung (3), *so ist die Konvergenz gleichmäßig in dem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$.*

---

3) Die gleichen Faktoren $a_\nu(l)$ verwendet Herr Hammerstein unter Benutzung gewisser Zusatzglieder zur genauen Darstellung zweimal differenzierbarer Funktionen, die längs gegebener Kurven (Flächen) Unstetigkeiten aufweisen. (A. Hammerstein, Über Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben, Math. Zeitschr. 27 (1927).

4) Über die Koeffizienten von (2) und den Bereich $\mathfrak{B}$ werden solche Voraussetzungen gemacht, daß die erste Randwertaufgabe lösbar ist. Hierzu ist jedenfalls *hinreichend: R* analytisch a_{ik} zweimal, b, ϱ einmal stetig differenzierbar und eine Höldersche Bedingung für die zweiten Ableitungen der a_{ik}. Vgl. für $n = 3$ W. Sternberg, Über d. lineare elliptische Differentialgl. 2. Ordnung mit drei unabhängigen Variablen, Math. Zeitschr. 1924 (21). Für $n = 2$ s. den Encyklopädieartikel von Lichtenstein (II C 12). Für $n > 3$ ist die Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe und die Existenz der Greenschen Funktion anscheinend noch nicht bewiesen. *Der Beweis für* (5) *ist so geführt, daß er unter Voraussetzung der Existenz einer Greenschen Funktion und Gültigkeit ihrer auf S. 73 angeführten Eigenschaften auch für $n > 3$ gilt.*

Digitized by Google

Beweis des Hilfssatzes. Es ist

$$(6a) \quad U_\lambda(P) = f(P)\,\lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda) + \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\,[f(\Pi)-f(P)]\,\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda)\,d\Pi,$$

Zum Beweis von (7) genügt es also zu zeigen:

$$(7a) \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda)\,d\Pi = 1,$$

$$(7b) \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\,[f(\Pi)-f(P)]\,\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda)\,d\Pi = 0.$$

Wir werden nun die folgenden bekannten Eigenschaften der Greenschen Funktion $\mathfrak{G}$ benutzen:

1. $\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda)$ ist außer für $P=\Pi$ eine reguläre Lösung von (2).
2. $\mathfrak{G}$ erfüllt die Randbedingung (3).
3. Es ist $\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda) = \mathfrak{G}(\Pi,P,\lambda)$.
4. Ist $\psi(P)$ eine einmal stetig nach den Koordinaten differenzierbare Funktion, so ist $\int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda)\,\psi(\Pi)\,d\Pi$ die (eindeutig bestimmte) Lösung des Problems (2), (3), wenn die Funktion $-\psi$ auf der rechten Seite von (2) an Stelle von 0 steht.
5. $\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda) \geqq 0$ für P, Π in $\mathfrak{B}$ und $\lambda > 0$[5]).

Den Beweis von (7a), (7b) werden wir nun in einer Reihe weiterer Schritte erbringen.

6. Sei $y(P)$ die der Bedingung (3) genügende Lösung von

$$(8) \quad L(y) - \lambda\varrho(P)\,y = -\lambda\varrho(P).$$

Dann ist

$$(9) \quad 0 \leqq y(P) \leqq 1 \quad \text{für } \lambda > 0 \text{ und } P \text{ in } \mathfrak{B}.$$

Beweis. Es ist nach 4. und 5. für $\lambda > 0$

$$y(P) = \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda)\,d\Pi \geqq 0.$$

Nimmt y sein Maximum in P_0 an, so ist P_0 wegen (3) ein innerer Punkt und es ist $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{P_0} = 0$ und die Form

$$\sum_1^n p_{ik}\,\xi_i\,\xi_k \qquad \left(p_{ik} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)_{P_0}\right)$$

5) Für $n = 2, 3$ folgt dies daraus, daß bei der durch 4. festgelegten Normierung $\lim_{P\to\Pi} \mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda) = +\infty$ ist, in Verbindung mit der Tatsache, daß eine Lösung von (2) im Innern eines Regularitätsbereiches kein negatives Minimum haben kann. — Für $n = 1$ ist 5. ebenfalls unschwer einzusehen.

Digitized by Google

ist keiner positiven Werte fähig. Da anderseits $\sum_1^n a_{ik}\xi_i\xi_k$ positiv definit ist, so folgt

$$\sum_1^n a_{ik}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{P_0} = \sum_1^n a_{ik}p_{ik} \leqq 0\ ^{6}).$$

Wegen $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{P_0} = 0$, $y \geqq 0$, $b \geqq 0$ ist daher auch $[L(y)]_{P_0} \leqq 0$, also ist nach (8)

$$1 - y(P_0) = \frac{-[L(y)]_{P_0}}{\lambda\varrho(P_0)} \geqq 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

7. Ist $\mathfrak{B}'$ ein (echter oder unechter) Teilbereich von $\mathfrak{B}$, so ist für jeden Punkt P aus $\mathfrak{B}$ für $\lambda > 0$

$$0 \leqq \lambda \int_{\mathfrak{B}'} \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi \leqq 1. \tag{10}$$

Beweis. Wegen $\varrho\,\mathfrak{G} \geqq 0$ ist für $\lambda > 0$

$$0 \leqq \lambda \int_{\mathfrak{B}'} \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi \leqq \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi.$$

Das rechts stehende Integral ist aber die Lösung von (8), (3), sodaß aus 6. die Behauptung folgt.

8. Ist $\varphi(P)$ eine einmal stetig nach den Koordinaten differenzierbare Funktion und ist $\eta(P)$ die (3) genügende Lösung von

$$L(\eta) - \lambda\varrho(P)\eta = -\lambda\varrho(P)\varphi(P), \tag{11}$$

so ist in $\mathfrak{B}$ für $\lambda > 0$

$$|\eta| \leqq \operatorname{Max}|\varphi|. \tag{12}$$

Beweis. Ist $M = \operatorname{Max}|\varphi|$, so wird nach 4. und 7.

$$|\eta| = \left|\lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\,\varphi(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi\right| \leqq M.\lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi \leqq M.$$

9. Existiert $L(\varphi)$ und ist einmal stetig nach den Koordinaten differenzierbar, erfüllt φ ferner die Randbedingung (3) und ist η die in 8. definierte Funktion, so ist in $\mathfrak{B}$ für $\lambda > 0$

$$|\eta - \varphi| \leqq \frac{1}{\lambda} \operatorname{Max}\left|\frac{L(\varphi)}{\varrho}\right|. \tag{13}$$

Beweis. Aus (11) folgt durch Subtraktion von $L(\varphi)$

$$L(\eta - \varphi) - \lambda\varrho(P)(\eta - \varphi) = -L(\varphi);$$

6) Ein Beweis des hier benutzten algebraischen Satzes findet sich bei Fejer, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 70—79.

Digitized by Google

da ferner $\eta - \varphi$ die Randbedingung (3) befriedigt, folgt aus 8. die Behauptung, wenn in (11) und (12) φ durch $\frac{L(\varphi)}{\lambda \varrho}$ ersetzt wird.

10. Sei $\mathfrak{B}'$ ein ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegener Bereich und σ eine positive Zahl. Dann ist gleichmäßig für alle Punkte aus $\mathfrak{B}$, deren Entfernung vom Rande des Bereiches $\mathfrak{B}'$ größer als σ ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} [\lambda \int_{\mathfrak{B}'} \varrho(\Pi)\, \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\, d\Pi = \begin{cases} 1, & \text{wenn } P \text{ in } \mathfrak{B}', \\ 0, & \text{wenn } P \text{ in } \mathfrak{B} - \mathfrak{B}'. \end{cases} \tag{14}$$

Der erste Teil der Behauptung gilt auch, wenn $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$.

Beweis. Sei P ein den genannten Voraussetzungen genügender Punkt. Wir behandeln zuerst den Fall, daß P im Innern von $\mathfrak{B}'$ liegt. Sei

$$\varphi(P, Q) = \begin{cases} (\sigma^4 - r^4)^4 & \text{für } r \leqq \sigma \\ 0 & \text{„ } r > \sigma \end{cases} \qquad (r = \overline{PQ}).$$

$\varphi(P, Q)$ genügt, wie man sich leicht überzeugt, als Funktion von Q den Voraussetzungen von 9.; ferner ist φ nicht negativ, und erreicht für $Q = P$ sein Maximum. Ist daher $\eta(Q)$ die Lösung des Problems (11), (3) (wobei P als Parameter auftritt), so ist nach 9.

$$\varphi(P, Q) - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Max} \left| \frac{L(\varphi)}{\varrho} \right| \leqq \eta(Q) = \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\, \varphi(P, \Pi)\, \mathfrak{G}(Q, \Pi, \lambda)\, d\Pi$$
$$< \varphi(P, P)\, \lambda \int_{\mathfrak{B}'} \varrho(\Pi)\, \mathfrak{G}(Q, \Pi, \lambda)\, d\Pi.$$

Setzen wir hierin speziell $Q = P$, so erhalten wir nach Division durch $\varphi(P, P)$

$$1 - \frac{1}{\lambda \varphi(P, P)} \operatorname{Max} \left| \frac{L(\varphi)}{\varrho} \right| \leqq \lambda \int_{\mathfrak{B}'} \varrho(\Pi)\, \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\, d\Pi,$$

woraus unter Berücksichtigung von Gleichung (10) der erste Teil der Behauptung folgt. Für den Beweis des zweiten Teils betrachten wir einen ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{B}''$, welcher seinerseits $\mathfrak{B}'$ in seinem Innern enthält, während die Ränder von $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ eine Maximalentfernung $< \sigma$ voneinander haben. Sei ferner $\varphi(P)$ eine Funktion, die 1 in $\mathfrak{B}'$, 0 in $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}''$, und in $\mathfrak{B}'' - \mathfrak{B}'$ nicht negativ so definiert ist, daß die Voraussetzungen von 9. erfüllt sind. Dann wird nach (13) für jeden Punkt aus $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}''$

$$\int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\, \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\, d\Pi \leqq \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(\Pi)\, \varphi(\Pi)\, \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda) = \eta(P) \leqq \frac{1}{\lambda} \operatorname{Max} \left| \frac{L(\varphi)}{\varrho} \right|.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Digitized by Google

Nunmehr können wir zum Beweis der Gleichungen (7a), (7b) übergehen. (7a) ist eine unmittelbare Folge von (14). Zum Beweise von (7b) betrachten wir eine beliebige positive Zahl ε und eine solche im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegene Umgebung U von P, daß $|f(\Pi) - f(P)| < \varepsilon$, wenn Π in U liegt. Dann wird nach (10) für $\lambda > 0$

$$(15) \quad |\lambda \int_U \varrho(\Pi)[f(\Pi) - f(P)]\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi| < \varepsilon \cdot \lambda \int_U \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi \leqq \varepsilon.$$

Anderseits ist, wie man durch Subtraktion der aus (14) für $\mathfrak{B}' = U$ und $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ sich ergebenden Gleichungen erkennt

$$\lim_{\lambda \to \infty} |\lambda \int_{B-U} \varrho(\Pi)[f(P) - f(\Pi)]\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi| \leqq 2\,\mathrm{Max}\,|f| \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int_{B-U} \varrho(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi = 0.$$

Hieraus im Verein mit (15) folgt die Richtigkeit von (7b). Hiermit ist (7) bewiesen. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz in jedem abgeschlossenen echten Teilbereiche von $\mathfrak{B}$ ergibt sich unmittelbar aus dem geführten Beweis.

Es ist nun noch zu zeigen, daß die Konvengenz von U_λ gegen f im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ gleichmäßig ist, wenn f am Rande von $\mathfrak{B}$ verschwindet. In diesem Falle können wir bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Randstreifen T angeben, sodaß $|f(P)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist, wenn P in T liegt. Nun ist nach (6)

$$|U_\lambda| \leqq |\lambda \int_T \varrho(\Pi) f(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi| + |\lambda \int_{\mathfrak{B}-T} \varrho(\Pi) f(\Pi)\,\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\,d\Pi|.$$

Nach (10) ist der erste rechtsstehende Summand $< \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $\lambda > 0$. Der zweite Summand konvergiert nach 10. gleichmäßig gegen 0, wenn wir P auf einen Randstreifen T' beschränken, dessen innerer Rand ganz im Innern von T verläuft. Bei passenden λ_1 wird daher $|U_\lambda| < \frac{2\varepsilon}{3}$ für $\lambda > \lambda_1$ und P in T', also

$$|f(P) - U_\lambda(P)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon;$$

d. h. die Konvergenz von U_λ gegen $f(P)$ ist gleichmäßig in T'. In $\mathfrak{B} - T'$ ist sie aber nach dem früher Bewiesenen gewiß gleichmäßig. Also ist sie gleichmäßig in $\mathfrak{B}$.

Aus dem somit in allen Teilen bewiesenen Hilfssatz ergibt sich nun unmittelbar die Darstellung (5): Die Eigenfunktionen u_ν

Digitized by Google

von (2), (3) sind nämlich die Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$u_\nu(P) = (\lambda_\nu + \lambda) \int_{\mathfrak{B}} u_\nu(\Pi)\, \varrho(\Pi)\, \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\, d\Pi;$$

die Funktionen $\sqrt{\varrho(P)}\, u_\nu(P)$ sind also Eigenfunktionen einer homogenen linearen Integralgleichung mit dem symmetrischen Kern $\sqrt{\varrho(P)\varrho(\Pi)}\, \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)$ und $\lambda_\nu + \lambda$ sind die zugehörigen Eigenwerte; daher ist nach dem bekannten Entwicklungssatz

$$\frac{\sqrt{\varrho(P)}\, U_1(P)}{\lambda} = \int_{\mathfrak{B}} f(\Pi) \sqrt{\varrho(\Pi)} \cdot \sqrt{\varrho(P)\varrho(\Pi)}\, \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\, d\Pi$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu \sqrt{\varrho(P)}\, u_\nu(P)}{\lambda_\nu + \lambda} \quad \left(c_\nu = \int_{\mathfrak{B}} \sqrt{\varrho(\Pi)}\, f(\Pi) \cdot \sqrt{\varrho(\Pi)}\, u_\nu(\Pi)\, d\Pi\right),$$

sodaß wie behauptet (5) aus (7) folgt.

Digitized by Google

Ebene Potentialströmungen in rotierenden offenen Kammern [1]).

Von H. Reißner in Berlin.

Das räumliche Problem der Rotation eines Körpers in einer unendlich ausgedehnten inkompressiblen Flüssigkeit legt es nahe, das Strömungsfeld in innere und äußere Gebiete zu zerlegen, in den inneren Gebieten die Potentialfunktion nach steigenden in dem äußeren Gebiete nach fallenden Potenzen des Radius zu entwickeln und die Stetigkeit des Überganges an der gemeinsamen Grenze der beiden Gebiete sowohl für die Normal- als für die Tangentialkomponente der Ableitung, d. h. für die normalen und tangentialen Geschwindigkeitskomponenten zu benutzen, um die Bestimmungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten zu gewinnen.

Um diese Methode zu beleuchten, schien es Verfasser zweckmäßig, solche Fälle, in denen schon Lösungen nach andern Methoden bekannt sind, zu betrachten, insbesondere die oben angedeutete Methode auf den ebenen Fall zu übertragen, dessen Lösung mit Hilfe der konformen Abbildung grundsätzlich erledigt und auch in einzelnen Fällen sehr einfach ist.

Es werde demzufolge ein sternförmiges System von q axial unendlich langen Wänden gleicher radialer Länge a und gleichen Winkelabstandes $\frac{2\pi}{q}$ betrachtet (Fig. 1), welches in eine rreibungslosen, inkompressiblen, unendlich ausgedehnten Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiere.

Bei der Bestimmung des ebenen Geschwindigkeitsfeldes u, v sind die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

1. Die Geschwindigkeiten müssen von einer Potentialfunktion abhängen, die jedoch in verschiedenen Gebieten verschieden entwickelt werden kann.

2. Führt man in den inneren Gebieten (I) Potentialfunktionen Φ_i, in dem äußeren Gebiet (II) eine Potentialfunktion Φ_a ein, so müssen die aus beiden Funktionen folgenden radialen und tan-

1) Vorgetragen in der 257. Sitzung am 29. Mai 1929.

Digitized by Google

gentialen Ableitungen, d. h. die entsprechenden Geschwindigkeiten stetig ineinander übergehen.

3. Die Normalkomponenten v_i der Geschwindigkeit in den Gebieten I müssen an den Wänden die Werte

$$v_i = \omega r$$

annehmen.

Mit den Bezeichnungen der Fig. 1 kann man nun für jedes der inneren Felder die Potentialfunktion aus der folgenden analytischen Funktion ableiten:

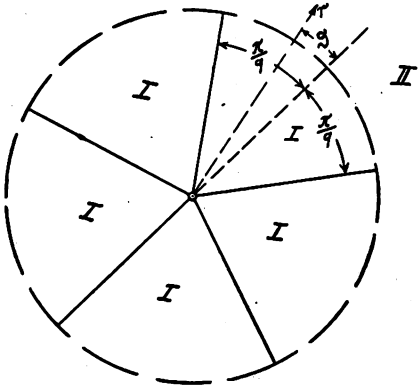


Fig. 1

$$(1)\quad W_i = \Phi_i(r,\vartheta) + i\,\Psi_i(r,\vartheta) = -i\frac{\omega}{2\cos\frac{2\pi}{q}}z^2 - \sum_{1,3,5\ldots}^{m}{}^{\infty} iA_m z^{\frac{qm}{2}}$$

sodaß ihr reeller Teil, die Potentialfunktion den Wert hat:

$$(1a)\qquad \Phi_i = \frac{\omega}{2\cos\frac{2\pi}{q}}r^2\sin 2\vartheta + \sum_{1,3,5\ldots}^{m}{}^{\infty} A_m r^{\frac{qm}{2}}\sin\left(\frac{qm}{2}\vartheta\right)$$

und die Radial- und Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit im Polarkoordinatensystem der Fig. (1) in der Form auftreten:

$$(2)\quad \begin{cases} u_i = \dfrac{\partial\Phi_i}{\partial r} = \dfrac{\omega}{\cos\frac{2\pi}{q}}r\sin 2\vartheta + \sum A_m\frac{qm}{2}r^{\frac{qm}{2}-1}\sin\frac{qm}{2}\vartheta \\ v_i = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial\vartheta} = \dfrac{\omega}{\cos\frac{2\pi}{q}}r\cos 2\vartheta + \sum A_m\frac{qm}{2}r^{\frac{qm}{2}-1}\cos\frac{qm}{2}\vartheta \end{cases}$$

Aus diesem Ansatz ist ersichtlich, daß tatsächlich an den Wänden

$$v_i = \omega r$$

und die an den Wänden entlanglaufenden Geschwindigkeiten u_i entgegengesetzt gleich sind, wie es die Symmetrie verlangt.

Nur im Falle $q = 4$ versagt dieser Ansatz.

Es ist offenbar zweckmäßig zur Abkürzung zu setzen:

$$(2a)\qquad \frac{\omega a}{\cos\frac{2\pi}{q}} = \omega_1, \qquad A_m\frac{qm}{2}a^{\frac{qm}{2}-1} = C_m, \qquad \frac{r}{a} = \varrho,$$

Digitized by Google

sodaß man übersichtlicher schreiben kann:

$$(2\,b)\qquad \begin{cases} u_i = \omega_1 \varrho \sin 2\vartheta + \sum\limits_{1,3,5\ldots}^{m=\infty} C_m \varrho^{\frac{qm}{2}-1} \sin \frac{qm}{2}\vartheta \\ v_i = \omega_1 \varrho \cos 2\vartheta + \sum\limits_{1,3,5\ldots}^{m=\infty} C_m \varrho^{\frac{qm}{2}-1} \cos \frac{qm}{2}\vartheta. \end{cases}$$

Für das äußere Gebiet muß sich der Strömungsvorgang in dem jeder Kammer zugeordneten Außenraumwinkel wiederholen und ferner müssen in der Fortsetzung jeder Wand aus Symmetriegründen die Radialgeschwindigkeiten u_a verschwinden.

Man setze dementsprechend im Außenraum das komplexe Potential (die analytische Funktion)

$$(3)\qquad W_a = iB_0 \ln z + \sum_{1}^{k=\infty} iB_k z^{-kq}$$

und daraus folgend das Potential:

$$(3\,a)\qquad \Phi_a = -B_0\vartheta + \sum_{1}^{k=\infty} B_k r^{-kq} \sin kq\vartheta$$

ferner die Geschwindigkeiten:

$$(4)\qquad \begin{cases} u_a = \dfrac{\partial \Phi_a}{\partial r} = -\sum B_k kq r^{-(kq+1)} \sin kq\vartheta \\ v_a = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi_a}{\partial \vartheta} = -\dfrac{B_0}{r} + \sum B_k kq r^{-(kq+1)} \cos kq\vartheta. \end{cases}$$

Auch wird man die Abkürzungen einführen

$$(4\,a)\qquad B_k kq a^{-(qk+1)} = D_k, \quad \frac{r}{a} = \varrho, \quad B_0 a = D_0$$

und demzufolge schreiben:

$$(4\,b)\qquad \begin{cases} u_a = -\sum D_k \varrho^{-(kq+1)} \sin kq\vartheta \\ v_a = -D_0 \varrho^{-1} + \sum D_k \varrho^{-(kq+1)} \cos kq\vartheta. \end{cases}$$

Der stetige Geschwindigkeitsübergang von innen nach außen $v_i = v_a$, $u_i = u_a$, an der Stelle $\varrho = 1$ verlangt nun die folgenden zwei Beziehungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \omega_1 \sin 2\vartheta + \sum C_m \sin \frac{qm}{2}\vartheta = -\sum D_k \sin kq\vartheta \\ \omega_1 \cos 2\vartheta + \sum C_m \cos \frac{qm}{2}\vartheta = -D_0 + \sum D_k \cos kq\vartheta. \end{cases}$$

Zur Gewinnung der Bestimmungsgleichungen für die inneren Koeffizienten C_m multipliziere man die erste der Gl. (5) mit $\sin lq\vartheta$

Digitized by Google

die zweite mit $\cos lq\vartheta$ und integriere von $-\frac{\pi}{q}$ bis $+\frac{\pi}{q}$, d. h. über den Winkelraum einer Kammer also über eine Periode.

Man erhält für alle Werte von q außer $q=1$ und $q=2$ folgende Gleichungen

$$\text{a)}\quad \begin{cases} \omega_1(-1)^k \sin\frac{2\pi}{q}\frac{2kq}{4-k^2q^2} - \sum C_m(-1)^{k+\frac{m+1}{2}}\frac{2k}{q\left(\frac{m^2}{4}-k^2\right)} = -D_k\frac{\pi}{q} \\ \omega_1(-1)^k \sin\frac{2\pi}{q}\frac{4}{4-k^2q^2} - \sum C_m(-1)^{k+\frac{m+1}{2}}\frac{m}{q\left(\frac{m^2}{4}-k^2\right)} = +D_k\frac{\pi}{q}. \end{cases}$$

Die Addition ergibt;

$$\text{(6)}\qquad \sum C_m(-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{1}{m-2k} = \frac{\omega a}{2}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{q}\frac{q}{2-kq}.$$

Für die Kammerzahlen $q=1$ und $q=2$ ergibt sich etwas einfacher:

$$kq \neq 2$$

$$\text{(6a)}\qquad \sum C_m(-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{1}{m-2k} = 0.$$

und für

$$kq = 2$$

$$\text{(6b)}\qquad \sum C_m(-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{1}{m-2k} = \omega_1\frac{\pi}{2} = -\omega a\frac{\pi}{2},$$

d. h. entweder bei der Kammerzahl $q=1$, $k=2$ oder bei der Kammerzahl $q=2$, $k=1$.

Die Fälle $q=1$ und $q=2$ zeichnen sich also dadurch aus, daß die Bestimmungsgleichungen der Koeffizienten C_m jedesmal bis auf die erste bezw. zweite Gleichung homogen sind.

Im übrigen sind die linken Seiten der Gleichungen unabhängig von der Kammerzahl q immer dieselben und von einer gewissen zyklischen Symmetrie, wie man erkennt, wenn man sie explizite hinschreibt nämlich, wenn man für den Augenblick zur Abkürzung

$$C_m(-1)^{\frac{m+1}{2}} = C'_m$$

setzt:

Digitized by Google

$$(6c)\qquad \begin{cases} -C_1' + C_3' + C_5'\tfrac{1}{3} + C_7'\tfrac{1}{5} \cdots + C_m' \dfrac{1}{m-2} \\ -C_1'\tfrac{1}{3} - C_3' + C_5' + C_7'\tfrac{1}{3} + C_9'\tfrac{1}{5} \cdots + C_m' \dfrac{1}{m-4} \\ -C_1'\tfrac{1}{5} - C_3'\tfrac{1}{3} - C_5' + C_7' + C_9'\tfrac{1}{3} \cdots + C_m' \dfrac{1}{m-6} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Zunächst ist die bekannte Kochsche hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung eines solchen Gleichungssystems (6c), daß die Faktoren der C_m eine absolut konvergente Reihe bilden nicht erfüllt, da $\sum \frac{1}{m}$, wo m ungrade eine divergente Reihe ist[2]).

Jedoch läßt sich jedenfalls in den Fällen $q = 1$ und $q = 2$, wo die Methode der konformen Abbildung besonders einfache Ergebnisse liefert, die Lösung der Gl. (6a) und (6c) leicht angeben.

Es werde dies z. B. für den Fall $q = 2$[3]) durchgeführt. Die konforme Abbildung:

$$(7)\qquad x_1 + iy_1 = z_1 = a\,\mathfrak{Cof}\,\zeta = \mathfrak{Cof}(\xi + i\eta) \quad \begin{cases} x_1 = a\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta \\ y_1 = a\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta \end{cases}$$

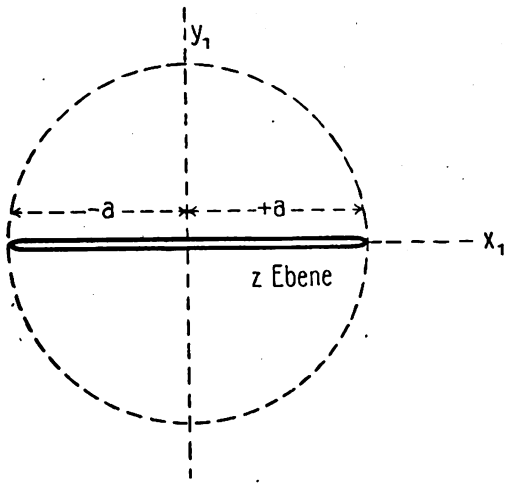


Fig. 2

bildet die Graden $\xi =$ konst. und $\eta =$ konst. in der ζ Ebene auf die Ellipsen bezw. Hyperbeln ab und insbesondere geht die Linie $\xi = 0$ in die Doppellinie (ausgeartete Ellipse x von $-a$ bis $+a$ über (Fig. 2).

Die Strömung wird dann wiedergegeben durch die Funktion

$$(8)\qquad W = i\frac{\omega a^2}{4} e^{-2\zeta}$$

oder da nach Gl. (7)

$$e^{-\zeta} = \frac{z_1}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{z_1}{a}\right)^2 - 1}$$

$$W = \frac{\omega a^2}{4} i\left[\frac{z_1}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{z_1}{a}\right)^2 - 1}\right]^2.$$

2) Siehe z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 924, Springer, S. 114, G. Kowalewski, Determinantentheorie, 1909, S. 372.

3) Siehe z. B. H. Lamb, Hydrodynamics, Cambr. 1924, S. 83.

Digitized by Google

Dieser Ausdruck kann nun leicht in eine entweder im Innengebiet oder im Außengebiet konvergente Potenzreihe entwickelt und mit der früher angesetzten Potenzreihe verglichen werden, wie folgt:

$$W = i\frac{\omega}{2}z_1^2 - i\frac{\omega a^2}{4} \pm \frac{\omega a^2}{2}\frac{z_1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{z_1}{a}\right)^2}.$$

Es ist nun zu beachten, daß bei dieser Form der Lösung das Koordinatensystem um $\frac{\pi}{2}$ gedreht ist, da früher die Winkelhalbierende einer Kammer die x-Achse war. Man hat also $z_1 = -iz$ zu setzen und erhält:

$$W = -i\frac{\omega}{2}z^2 - i\frac{\omega a^2}{4} \mp \frac{\omega a^2}{2} i\frac{z}{a}\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}$$

$$W = -i\frac{\omega}{2}z^2 - i\frac{\omega a^2}{4} \mp i\frac{\omega a^2}{2}\frac{z}{a}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \frac{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}-1\right)}{1.2}\left(\frac{z}{a}\right)^4 + \cdots + \binom{\tfrac{1}{2}}{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{z}{a}\right)^{m-1}\cdots\right] \tag{1b}$$

Dieser Ausdruck (1b), in dem für jede Seite der Wand eins der Vorzeichen zu nehmen ist, wird identisch bis auf das unwesentliche konstante Glied mit dem ursprünglichen Ausdruck (1) für $q = 2$ wenn man setzt:

$$A_m = \frac{\omega a^{2-m}}{2}\binom{\tfrac{1}{2}}{\frac{m-1}{2}}$$

oder nach (2a)

$$C_m = A_m m a^{m-1} = \frac{\omega a}{2} m \binom{\tfrac{1}{2}}{\frac{m-1}{2}}.$$

Obige Werte der Koeffizienten C_m müssen nun die Gl. (6a) und (6d) befriedigen, was sich folgendermaßen einsehen läßt:

Die Erfüllung der Gleichungen erfordert das Bestehen der Beziehungen:

$$\begin{cases} \sum(-1)^{\frac{m+1}{2}} \dfrac{m}{m-2}\binom{\tfrac{1}{2}}{\frac{m-1}{2}} = -\pi \\ \sum(-1)^{\frac{m+1}{2}} \dfrac{m}{m-2k}\binom{\tfrac{1}{2}}{\frac{m-1}{2}} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Digitized by Google

Die Frage nach der Richtigkeit dieser Gl. (9) kann auf die Ausrechnung eines bestimmten Integrals zurückgeführt werden wie folgt:

Man bilde den Ausdruck:

$$\int z^{-2k} \frac{d}{dz} z\sqrt{1-z^2} = -\sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \binom{\frac{1}{2}}{\frac{m-1}{2}} \frac{m}{m-2k} z^{m-2k}.$$

Die rechte Seite stimmt nun für $z = 1$ bis auf das Vorzeichen mit der linken Seite der Gl. 9 überein, sodaß als Kontrolle für die Richtigkeit der Gl. 9 untersucht werden muß, ob:

$$\int_{-1}^{+1} z^{-2k} \frac{d}{dz}(z\sqrt{1-z^2})\,dz = \pm\pi \qquad \text{für } k = 1$$

$$= 0 \qquad \text{für } k \neq 1.$$

In der Tat kann man sich durch Auswertung der Integrale überzeugen, daß die obigen Beziehungen richtig sind.

Grundsätzlich ist es nun sicher auch möglich, wenn auch ungleich komplizierter, die Gleichungen (6) auch für diejenigen Fälle, wo $q \neq 1$ und $\neq 2$ ist durch Vergleich mit den entsprechenden Lösungen der konformen Abbildung zu lösen. Vielleicht würde es aber auch gelingen, die linearen Gleichungen (9) unter Zuhilfenahme der zyklischen Symmetrieeigenschaften dieser Gleichungen und der beiden durch $q = 1$ und $q = 2$ gegebenen Lösungen unabhängig zu behandeln, da ja für alle q die linken Seiten (die homogenen Gleichungen) unverändert bleiben.

Zum Schluß möchte ich noch auf die bei dem Ansatz (2) gemachte Feststellung zurückkommen, daß für die Zellenzahl $q = 4$ der Ansatz einer Potenzreihe in Z versagt.

Um einen Begriff zu bekommen, wie in diesem Fall der Ansatz abzuändern ist, möge wiederum die konforme Abbildung und zwar für den Fall $q = 4$ herangezogen werden.

Diese Abbildung ist grundsätzlich sogar für krummlinige Wände von Spannhake[4]) angegeben und ausgearbeitet worden.

Es kommt darauf an, die komplexe (physikalische) z-Ebene so auf das Innere eines Einheitskreises in einer w-Ebene abzubilden, daß die beiden Ufer eines kreuzförmigen Schlitzes der z-Ebene auf die Berandung des Kreises abgebildet werden.

4) W. Spannhake, Z. A. M. u. M. 1925 S. 481. In den Lehrbüchern der Hydrodynamik wird auf diese zweite Randwertaufgabe fast garnicht eingegangen. Die explizite Durchführung dieses Sonderfalles verdanke ich Herrn St. Bergmann.

Digitized by Google

Dabei wird die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ jeder Potentialfunktion der z-Ebene in Richtung der Normalen n zu den Schlitzufern in eine Ableitung in Richtung der Normalen n_1 des Kreisrandes vom Betrage

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \cdot \left| \frac{dz}{dw} \right|$$

übergeführt.

Die Abbildung, welche dieses leistet, ist bekanntlich

$$w = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$
$$t = 4z^4 - 1.$$

Das gesuchte komplexe Potential läßt sich nun im Innern des Kreises der w-Ebene jedenfalls als eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen entwickeln, da die Funktion im Kreise regulär ist.

Wie man die vorgeschriebene Verteilung der Ableitung $\frac{\partial W}{\partial n}$ auf dem Rande immer erzielen kann hat z. B. Spannhake sehr übersichtlich gezeigt. Für die hier aufgeworfene Frage ist nur die Form der Lösung als Funktion von z von Interesse.

Man kann also setzen:

$$W = \sum A_n w^n = \sum A_n \left[4z^4 - 1 \pm \sqrt{(4z^4-1)^2 - 1}\right]^n$$
$$= \sum A_n \left[4z^4 - 1 \pm 4z^2 \sqrt{z^4 - \tfrac{1}{2}}\right]^n.$$

Man sieht sofort, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, W in eine im ganzen Einheitskreise konvergente Reihe zu entwickeln, sondern daß eine mögliche Grenze für die Konvergenz durch das Verschwinden des Radikanden gegeben ist. Man wird also im allgemeinen die Entwicklung in den ursprünglichen Koordinaten z nur in der Form ansetzen dürfen:

$$W = \sum A_n z^n + \sqrt{z^4 - \tfrac{1}{2}} \sum B_n z^n.$$

Allerdings ist die Befriedigung der Randbedingungen mit dieser Form der Lösung nicht so einfach wie in den Ansätzen der Gleichung (2).

Digitized by Google

Einige Randwertprobleme der Elastizitätstheorie in zwei Dimensionen. Bemerkungen zur Methode der Airyschen Spannungsfunktion[1]).

Von Michael Sadowsky.

1. Allgemeine Formeln. Um mit der Mehrzahl der Autoren konform zu gehen, versteht der Verfasser diesmal unter dem „ebenen Problem" den Fall, in dem keine Spannungen in der z-Richtung auftreten, also den Fall $Z_x = Z_y = Z_z = 0$. Dieser Fall wird in der Literatur öfters mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion behandelt. Diese an und für sich einwandfreie Behandlungsart hat den großen Nachteil, daß sie die Resultate für die Spannungen unmittelbar durch zweimaliges Differenzieren liefert, ohne dabei die Werte der Verschiebungen zu brauchen. Dadurch werden diese letzteren öfters garnicht ausgerechnet, und bei einer nachträglichen Aufstellung der Verschiebungswerte können diese *vieldeutig* ausfallen, wodurch die Lösung des Problems durch die Airysche Funktion sich als illusorisch erweist. Leider wird diese in der Methode der Airyschen Funktion enthaltene Gefahr immer noch zu wenig beachtet, so daß manche sonst wertvolle und elegante Arbeit nur eine Scheinlösung der gestellten Probleme liefert. Im Laufe der weiteren Ausführungen wird der Verfasser die in Betracht kommenden Arbeiten angeben. Aus den eben angeführten Gründen wird auf eine vollständige Angabe der Verschiebungs- und Spannungsgrößen besonderer Wert gelegt, die richtige Lösung eines jeden physikalisch sinnvollen Problems muß *eindeutige* Verschiebungen und *eindeutige* Spannungen liefern. Die jetzt folgenden Formeln sind das allgemeine Integral der elastischen Gleichungen für den Fall des ebenen Problems im oben erklärten Sinne, dabei wird außerdem Symmetrie in Bezug auf die $x-y$ Ebene vorausgesetzt. Diese Formeln sollen stets dazu herangezogen werden, um die Eindeutigkeit der Verschiebungen nachzuprüfen. Die folgenden Formeln sind streng exakt (im Sinne der exakten Elastizitätstheorie), bei den Anwendungen dieser Gleichungen wollen wir uns aber auf die Untersuchung des Deformation- bzw. Spannungszustandes in der Symmetrieebene $z = 0$ beschränken (wie es ja bei den ebenen Problemen allgemein üblich ist), also $z = 0$

1) Vorgetragen in der 257. Sitzung am 29. Mai 1929.

Digitized by Google

setzen. Es ist beachtenswert, daß der Ausdruck für Θ auch im strengen Sinne von z unabhängig ist.

$$
(1)\quad \begin{cases}
u = -\dfrac{3-\sigma}{1+\sigma} H_1 + 2y\dfrac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial x} + H_2 - \dfrac{2\sigma}{1+\sigma} z^2 \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial x^2}, \\
v = -\dfrac{3-\sigma}{1+\sigma} \mathfrak{H}_1 + 2y\dfrac{\partial H_1}{\partial x} - \mathfrak{H}_2 - \dfrac{2\sigma}{1+\sigma} z^2 \dfrac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial y^2}, \\
w = \dfrac{4\sigma}{1+\sigma} z \dfrac{\partial H_1}{\partial x}, \\
\Theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = -4\dfrac{1-2\sigma}{1+\sigma}\dfrac{\partial H_1}{\partial x}, \\
X_x + Y_y + Z_z = -8G\dfrac{\partial H_1}{\partial x}, \\
X_x = 2G\left(-3\dfrac{\partial H_1}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial H_2}{\partial x}\right) - \dfrac{4G\sigma}{1+\sigma} z^2 \dfrac{\partial^3 H_1}{\partial x^3}, \\
Y_y = 2G\left(-\dfrac{\partial H_1}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial^2 H_1}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial y}\right) - \dfrac{4G\sigma}{1+\sigma} z^2 \dfrac{\partial^3 \mathfrak{H}_1}{\partial y^3}, \\
X_y = 2G\left(2y\dfrac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial x} + \dfrac{\partial H_2}{\partial y}\right) - \dfrac{4G\sigma}{1+\sigma} z^2 \dfrac{\partial^3 H_1}{\partial x^2\,\partial y}, \\
Z_x = Z_y = Z_z = 0.
\end{cases}
$$

Dabei bedeuten $H_i = H_i(x, y)$ und $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_i(x, y)$ harmonische (in x und y) Funktionen, und $\mathfrak{H}_i$ ist zu H_i konjugiert — harmonisch (dann ist also H_i zu $-\mathfrak{H}_i$ konjugiert).

2. Die grundlegenden logarithmischen Singularitäten für die untere Halbebene.

a) (zu Abb. 1)[2]).

$$
(2)\qquad H_1 + i\mathfrak{H}_1 = H_2 + i\mathfrak{H}_2 = -\frac{i}{4\pi G}\ln(x+iy).
$$

Diese Singularität liefert für die untere Halbebene ($y \leqq 0$) einen spannungsfreien Rand ($Y_y = X_y = 0$ für $y = 0$) bis auf den singulären Punkt $x = y = 0$, in dem eine Druckkraft vom Betrage 1 angreift.

Für die Verschiebungen und Spannungen erhält man

$$
(2)\quad \begin{cases}
u = -\dfrac{1}{2\pi G}\left(\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right), \\
v = \dfrac{1}{2\pi G}\left(\dfrac{1}{1+\sigma}\ln(x^2+y^2) - \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right), \\
X_x = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{x^2 y}{r^4}, \quad X_y = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{xy^2}{r^4}, \quad Y_y = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{y^3}{r^4}, \\
Z_x = Z_y = Z_z = 0.
\end{cases}
$$

2) Die Abbildungen befinden sich auf S. 99.

Digitized by Google

b) (zu Abb. 2)

$$H_1 + i\mathfrak{H}_1 = -(H_2 + i\mathfrak{H}_2) = \frac{1}{4\pi G}\ln(x+iy). \tag{4}$$

Diese Singularität liefert für die untere Halbebene einen spannungsfreien Rand bis auf den singulären Punkt $x = y = 0$, in dem eine Horizontalkraft (Schubkraft) vom Betrage 1 angreift.

Für die Verschiebungen und Spannungen erhält man

$$\begin{cases} u = -\dfrac{1}{2\pi G}\left(\dfrac{2}{1+\sigma}\ln r + \dfrac{y^2}{r^2}\right), \\ v = -\dfrac{1}{2\pi G}\left(\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}\varphi - \dfrac{xy}{r^2}\right), \\ X_x = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{x^3}{r^4}, \quad X_y = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{x^2y}{r^4}, \quad Y_y = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{xy^2}{r^4}, \\ Z_x = Z_y = Z_z = 0, \text{ dabei } x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r \geqq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Die auftretenden Verschiebungen sind nach den hier gegebenen Gleichungen *eindeutig*, weil ein Umlauf um den singulären Punkt $x = y = 0$ nicht möglich ist. Durch eine Superposition der beiden Lösungen a) und b) läßt sich der Fall behandeln, in dem im Punkte $x = y = 0$ eine Kraft mit beliebigen Komponenten X, Y angreift, und durch eine Integration längs des Randes läßt sich dann die Randwertaufgabe für eine gegebene Druckverteilung $p(x)$ und Schubspannungsverteilung $\tau(x)$ (beides bezogen auf den Rand $y = 0$) lösen. Die Existenz- und Stetigkeitsbeweise ergeben sich mühelos für im Unendlichen beschränkte und im Endlichen integrable $|p(x)|$ und $|\tau(x)|$. (Vgl. ZS. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 10, z. Zt. in Druck.)

3. Fall der Viertelebene $y \leqq 0$, $x \leqq 0$ mit dem Rande $y = 0$, $x \leqq 0$; $x = 0$, $y \leqq 0$. Aus den Gleichungen (3) und (5) erkennt man, daß beim Durchschneiden der Halbebene in 2 Viertelebenen durch den geradlinigen Schnitt $x = 0$ dieser Schnitt frei von Randspannungen X_x und X_y ausfallen wird. Diese Feststellung gestattet durch geeignete Superposition der beiden Kernlösungen den Fall zu behandeln, in dem die Viertelebene durch eine an der Ecke $x = 0$, $y = 0$ angreifende Kraft beansprucht wird. Genaue Betrachtungen in der Umgebung der singulären Stelle führen zu folgenden Ergebnissen: der Kern

$$\begin{aligned} H_1 + i\mathfrak{H}_1 &= \frac{\pi - 2i}{2G(\pi^2-4)}\ln(x+iy), \\ H_2 + i\mathfrak{H}_2 &= \frac{-\pi - 2i}{2G(\pi^2-4)}\ln(x+iy) \end{aligned} \tag{6}$$

Digitized by Google

liefert für die Viertelebene einen spannungsfreien Rand bis auf den singulären Punkt $x = 0$, $y = 0$, in dem eine Horizontalkraft $X = 1$ angreift (Abb. 3).

Der Kern

$$(7)\qquad \begin{aligned} H_1 + i\mathfrak{H}_1 &= \frac{-4+2\pi i}{2G(\pi^2-4)} \ln(x+iy), \\ H_2 + i\mathfrak{H}_2 &= \frac{4+2\pi i}{2G(\pi^2-4)} \ln(x+iy) \end{aligned}$$

liefert für die Viertelebene einen spannungsfreien Rand bis auf die Ecke $x = 0$, $y = 0$, in der eine Vertikalkraft $Y = 1$ (nach oben) angreift (Abb. 4).

4. Der integrierte komplexe Kern $(x+iy)(\ln(x+iy)-1)$. Dieser Kern liefert *unstetige* Belastungen für die obere Halbebene und einen nicht-trivialen Fall für die Viertelebene.

a) Die Wahl

$$(8)\qquad H_1 + i\mathfrak{H}_1 = -(H_2 + i\mathfrak{H}_2) = -\frac{(x+iy)}{4\pi G}(\ln(x+iy)-1)$$

liefert für die Spannungen die Werte

$$(9)\qquad \begin{cases} X_x = \dfrac{1}{2\pi}(4\ln r + 2\sin^2\varphi), \\ X_y = \dfrac{1}{2\pi}(-2\varphi - \sin 2\varphi), \\ Y_y = \dfrac{1}{2\pi}(-2\sin^2\varphi). \end{cases}$$

Für den Rand der unteren Halbebene ergeben sich die Randwerte

$$Y_y = 0, \quad X_y = -\frac{1}{\pi}\varphi = \begin{cases} 0 \text{ für } x > 0, \\ 1 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Die Halbebene ist demnach nur durch Schubspannungen am Rande belastet, und dabei so, daß für $x < 0$ diese Schubspannung den konstanten Wert 1 hat, und daß für $x > 0$ auf dem Rande überhaupt keine Spannungen wirken. Die Verschiebungen sind eindeutig, weil ein Umlauf um die singuläre Stelle $x = y = 0$ nicht möglich ist.

b) Die Wahl

$$(10)\qquad H_1 + i\mathfrak{H}_1 = H_2 + i\mathfrak{H}_2 = i\frac{x+iy}{4\pi G}(\ln(x+iy)-1)$$

liefert für die Spannungen die Werte

Digitized by Google

$$(11)\qquad \begin{cases} X_x = \dfrac{1}{2\pi}(2\varphi + \sin 2\varphi), \\ X_y = \dfrac{1}{2\pi}\cdot 2\sin^2\varphi, \\ Y_y = \dfrac{1}{2\pi}(2\varphi - \sin 2\varphi). \end{cases}$$

Für den Rand $y = 0$ der unteren Halbebene erhält man

$$X_y = 0, \quad Y_y = \frac{1}{\pi}\varphi = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x > 0, \\ -1, \text{ wenn } x < 0. \end{cases}$$

Die Halbebene ist demnach durch eine unstetige, streckenweise konstante Druckbelastung von Betrage 1 (bezogen auf die Längeneinheit der x-Achse) beansprucht.

5. Fall einer Viertelebene, die am oberen Rande ($y = 0$, $x < 0$) durch eine konstante Schubspannung vom Betrage 1 beansprucht wird und am rechten Rande ($x = 0$, $y < 0$) spannungsfrei ist.

Die Gl. (11) geben für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ die Werte

$$X_x = -\frac{1}{2}, \quad X_y = \frac{1}{\pi}.$$

Durch eine Superposition mit einem homogenen Zustand lassen sich diese Randwerte wegschaffen und auch die Druckspannung auf dem oberen Rande der *Viertel*ebene läßt sich dadurch ausgleichen. Zu diesem Ausgleich führt z. B. das System

$$(12)\qquad \begin{aligned} H_1 &= -\frac{3}{16G}x + \frac{1}{2\pi G}y, & \mathfrak{H}_1 &= -\frac{3}{16G}y - \frac{1}{2\pi G}x, \\ H_2 &= -\frac{5}{16G}x, & \mathfrak{H}_2 &= -\frac{5}{16G}y. \end{aligned}$$

Dann bleibt für den oberen Rand nur noch eine Schubspannung vom Betrage $-\frac{1}{\pi}$ übrig, und diese kann durch Multiplikation mit $-\pi$ auf 1 normiert werden. Somit haben wir das Ergebnis, daß der komplexe Kern

$$(13)\qquad \begin{aligned} H_1 + i\mathfrak{H}_1 &= \frac{x+iy}{4G}\left(-i\ln(x+iy) + \frac{3}{4}\pi + 3i\right), \\ H_2 + i\mathfrak{H}_2 &= \frac{x+iy}{4G}\left(-i\ln(x+iy) + \frac{5}{4}\pi + i\right) \end{aligned}$$

den Fall gibt, in dem die Viertelebene $x \leqq 0$, $y \leqq 0$ am oberen Rande $y = 0$ durch eine konstante Schubspannung vom Betrage 1

Digitized by Google

beansprucht wird und sonst an den beiden Rändern spannungsfrei ist. Für die Spannungen erhält man

$$(14)\qquad \begin{cases} X_x = -\dfrac{\pi}{2} - \varphi - \sin\varphi\cos\varphi, \\ X_y = \cos^2\varphi, \\ Y_y = -\pi - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi, \\ \text{dabei } -\pi \leqq \varphi \leqq -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(Der Fall einer konstanten *Druck*belastung 1 auf dem oberen Rande bei sonst spannungsfreien Rändern ist eine Trivialität, die z. B. durch

$$(15)\qquad H_1 = \frac{x}{8G}, \quad \mathfrak{H}_1 = \frac{y}{8G}, \quad H_2 = \frac{3x}{8G}, \quad \mathfrak{H}_2 = \frac{3y}{8G}$$

gegeben ist.)

6. Kraft vom Betrage 1, in dem Punkte $x=0$, $y=0$ der vollen Ebene angreifend. Der Angriffspunkt der Kraft ist in diesem Fall ein *innerer* Punkt des Bereiches, geschlossene Umläufe um diesen Punkt sind zulässig und somit ist die Gefahr da, daß die Funktion $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ in den Verschiebungen u, v, w auftreten wird und als vieldeutige Funktion stören wird. Diesem Umstande ist unbedingt volle Aufmerksamkeit zu schenken. Um die Vieldeutigkeit in den Verschiebungen auszuschließen setze man z. B.

$$(16)\qquad H_1 + i\mathfrak{H}_1 = \frac{1+\sigma}{3-\sigma}(H_2 + i\mathfrak{H}_2) = \frac{i(1+\sigma)}{16\pi G}\ln(x+iy)$$

dann ist der unendlich-vieldeutige $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ in den Verschiebungen nicht mehr vorhanden, der Verschiebungszustand in der (punktierten) $x-y$-Ebene ist vollkommen eindeutig und entpricht dem Fall einer vertikalen, nach oben gerichteten Einzelkraft vom Betrage 1. Für die Verschiebungen und Spannungen erhält man

$$(17)\qquad \begin{aligned} u &= \frac{1+\sigma}{8\pi G}\cdot\frac{xy}{r^2}, \quad v = \frac{1}{8\pi G}\left((1+\sigma)\frac{y^2}{r^2} - (3-\sigma)\ln r\right), \\ w &= \frac{2\sigma}{8\pi G}\cdot\frac{yz}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{4\pi r^4}\left((1+3\sigma)x^2y - (1-\sigma)y^3\right), \\ X_y &= -\frac{1}{4\pi r^4}\left((1-\sigma)x^3 + (3+\sigma)xy^2\right), \\ Y_y &= -\frac{1}{4\pi r^4}\left((1-\sigma)x^2y + (3+\sigma)y^3\right). \end{aligned}$$

Digitized by Google

7. Einzelkraft in einem inneren Punkte der unteren Halbebene.

Dieser Fall ist von Riedel[3]) in Angriff genommen worden; seine sehr elegante Methode läßt leider den Umstand unbeachtet, daß die Verschiebungen u, v, w vieldeutig ausfallen, somit liegt dort ein Irrtum vor (Riedel selbst berechnet die Verschiebungen überhaupt nicht). Mit Hilfe der Gl. (17) und (3) der vorliegenden Arbeit läßt sich die gestellte Aufgabe explizit lösen.

Der Rand $y = 0$ der unteren Halbebene sei spannungsfrei gedacht, im Punkte $x = 0$, $y = -a$ $(a > 0)$ soll die Kraft vom Betrage 1 angreifen.

1. Fall: Kraftrichtung senkrecht zum Rand (nach oben), Abb. 5.

Benutzen wir die in 6 entwickelten Beziehungen für den Fall einer Einzelkraft in der punktierten Vollebene, und nehmen wir zum Spannungszustand noch die „gespiegelte" Kraft hinzu — also die Kraft 1, abwärts gerichtet, im Punkte $x = 0$, $y = a$ angreifend, hinzu, so bekämen wir — *bei eindeutigen Verschiebungen* — für den Spannungszustand die Gleichungen

$$(18)\qquad \begin{aligned} Y_y = &-\frac{1}{4\pi r_1^4}\left[(1-\sigma)x^2 y_1 + (3+\sigma)y_1^3\right] \\ &+\frac{1}{4\pi r_2^4}\left[(1-\sigma)x^2 y_2 + (3+\sigma)y_2^3\right] \end{aligned}$$

usw., vgl. Gl. (17). Für den Rand $y = 0$, $x = \xi$ bekommt man die Werte

$$(19)\qquad \begin{aligned} Y_y(x=\xi, 0) &= -\frac{a}{2\pi}\,\frac{(3+\sigma)a^2 + (1-\sigma)\xi^2}{(a^2+\xi^2)^2}, \\ X_y &= 0. \end{aligned}$$

(Das Verschwinden der Schubspannung ist durch die Hinzunahme der gespiegelten Kraft erreicht worden.)

Um den Rand $y = 0$ spannungsfrei zu erhalten, benutzt man die Gl. (3) und superponiert hinzu den Zustand mit den Randwerten

$$(20)\qquad X_y \equiv 0, \quad p(\xi) = -\frac{a}{2\pi}\,\frac{(3+\sigma)a^2 + (1-\sigma)\xi^2}{(a^2+\xi^2)^2}.$$

Diesem zusätzlichen Zustande entsprechen die Spannungen (im Inneren)

---

3) Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion, Dissertation Göttingen 1926; auch Z. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 7 (1927), S. 169—188.

Digitized by Google

$$(21)\quad \begin{cases} Y_y = -\dfrac{a y^2}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(3+\sigma)a^2+(1-\sigma)\xi^2}{[(x-\xi)^2+y^2]^2(a^2+\xi^2)^2}\,d\xi, \\ X_y = -\dfrac{a y^2}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(3+\sigma)a^2+(1-\sigma)\xi^2}{[(x-\xi)^2+y^2]^2(a^2+\xi^2)^2}(x-\xi)\,d\xi, \\ X_x = -\dfrac{a y}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(3+\sigma)a^2+(1-\sigma)\xi^2}{[(x-\xi)^2+y^2]^2(a^2+\xi^2)^2}(x-\xi)^2\,d\xi. \end{cases}$$

Die Superposition der Zustände (18) und (21) liefert die Lösung des vorgelegten Problems.

Die Auswertung der Integrale (21) führt an und für sich auf eine elementare Partialbruchzerlegung, deren Durchführung im allgemeinen Falle hier nicht vorgenommen wird. Die Berechnung für die Symmetrielinie $x = 0$ ist weniger umständlich, man kommt auf die Integrale

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(a^2+\xi^2)^2(y^2+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{y^2-3ay+a^2}{a^3y^3(y-a)^3}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2\,d\xi}{(a^2+\xi^2)^2(y^2+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{ay(y-a)^3}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^4\,d\xi}{(a^2+\xi^2)^2(y^2+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(a-y)^3} \end{cases}$$

gültig für $a > 0$ *und* $y < 0$.

Für die Symmetrieachse $x = 0$, $y \leqq 0$ lautet dann der superponierte — also endgültige — Spannungszustand wie folgt:

$$(23)\quad \begin{cases} X_x(0,y) = \dfrac{1-\sigma}{4\pi}\left(\dfrac{1}{y+a}-\dfrac{1}{y-a}\right)+\dfrac{(3+\sigma)a^2-(1-\sigma)ay}{2\pi(a-y)^3}, \\ X_y(0,y) = 0, \\ Y_y(0,y) = \dfrac{3+\sigma}{4\pi}\left(\dfrac{1}{y-a}-\dfrac{1}{y+a}\right)+\dfrac{4y^2+(3+\sigma)(-3ay+a^2)}{2\pi(a-y)^3}. \end{cases}$$

2. Fall: Kraftrichtung parallel zum Rande (Abb. 6). Der Kern

$$(24)\quad H_1+i\mathfrak{H}_1 = -\frac{1+\sigma}{3-\sigma}(H_2+i\mathfrak{H}_2) = \frac{1+\sigma}{16\pi G}\ln(x+iy)$$

liefert den elastischen Zustand, welcher einer Wirkung einer Kraft $X = 1$, im Nullpunkte der *vollen* Ebene angreifend, ent-

Digitized by Google

spricht. Die Verschiebungen sind nach 6 eindeutig, für die Spannungen erhält man

$$(25)\qquad \begin{cases} X_x = \dfrac{1}{4\pi}\left(-(3+\sigma)\dfrac{x}{r^2}+(1+\sigma)\dfrac{2xy^2}{r^4}\right), \\ Y_y = \dfrac{1}{4\pi}\left((1-\sigma)\dfrac{x}{r^2}-(1+\sigma)\dfrac{2xy^2}{r^4}\right), \\ X_y = \dfrac{1}{4\pi}\left(-2\dfrac{y}{r^2}+(1+\sigma)y\dfrac{y^2-x^2}{r^4}\right). \end{cases}$$

Soll die Kraft $X = 1$ im Punkte $x = 0$, $y = -a$ der unteren Halbebene angreifen, bei spannungsfreiem Rande $y = 0$ der Halbebene, so nehme man zunächst eine Superposition der durch Gl. (24) und (25) gegebenen Zustände, bezogen auf $x = 0$, $y = -a$ und auf $x = 0$, $y = a$. Man hätte also, um die Spannungen zu bestimmen, in den Gl. (25) y einmal durch $y + a$, das andere mal durch $y - a$ zu ersetzen und die beiden Ausdrücke zu überlagern. Für den Rand $y = 0$, $x = \xi$ bekäme man dann

$$(26)\qquad X_y = 0, \quad Y_y = \frac{1}{2\pi}\,\frac{-(1+3\sigma)a^2\xi+(1-\sigma)\xi^3}{(a^2+\xi^2)^2}.$$

Zum Ausgleich der Normalrandspannung verwerten wir die Gl. (3), indem wir noch einen Zustand mit

$$(27)\qquad p(\xi) = \frac{-(1+3\sigma)a^2\xi+(1-\sigma)\xi^3}{2\pi(a^2+\xi^2)^2}$$

dazufügen. Zu den Spannungen kommen also noch die folgenden Zusatzspannungen hinzu:

$$(28)\qquad \begin{cases} X_x = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)\,\frac{(x-\xi)^2 y}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}\,d\xi, \\ X_y = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)\,\frac{(x-\xi)\,y^2}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}\,d\xi, \\ Y_y = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)\,\frac{y^3}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}\,d\xi. \end{cases}$$

Die formale Durchrechnung dieser Integrale ist vom Verfasser für den allgemeinen Fall nicht durchgeführt worden. Für die Symmetrielinie $x = 0$ vereinfachen sich die Integrale, man bekommt für den endgültigen Zustand — also als Lösung der gestellten Aufgabe für die Symmetrielinie $x = 0$ — die Re-

Digitized by Google

sultate

$$(29)\qquad \begin{aligned} X_x(0,y) &= Y_y(0,y) = 0,\\ X_y(0,y) &= -\frac{1-\sigma}{4\pi}\left(\frac{1}{y+a}+\frac{1}{y-a}\right)-\frac{(1+3\sigma)ay+(1-\sigma)y^2}{2\pi(a-y)^3}. \end{aligned}$$

8. Einige Bemerkungen zur Methode der Airyschen Spannungsfunktion. Wie schon zu Beginn dieser Arbeit erwähnt, hat die Methode der Spannungsfunktion $\psi(x,y)$ den Nachteil, daß sie unmittelbar die Spannungen als Differentialquotienten 2-ter Ordnung liefert

$$X_x = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}$$

und die Verschiebungen u, v, w beiseite läßt. Dieser Umstand bringt die Gefahr mit sich, die sich in der Mehrdeutigkeit der harmonischen Funktionen verbirgt: es müssen die Verschiebungen *eindeutige* Ortsfunktionen sein. Die Spannungen werden dann als Ableitungen eindeutiger Funktionen auch eindeutig ausfallen. Die Airysche Spannungsfunktion dagegen darf vieldeutig ausfallen, weil sie keiner physikalisch faßbaren eindeutigen Größe entspricht. Und nun zeigt sich Folgendes: *eine eindeutige Spannungsfunktion kann zu vieldeutigen Verschiebungen führen (aber selbstverständlich wieder zu eindeutigen Spannungen!).* Diese Aussage dürfte nicht so überraschend sein, wenn man bedenkt, daß die Verschiebungen aus den Spannungen durch eine einmalige Integration gewonnen werden, daß also beispielsweise Ausdrücke wie

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \int\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dy, \quad \int\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}dx$$

in den Verschiebungen vorkommen können, und die beiden letzteren dieser Ausdrücke brauchen auch bei einer eindeutigen Spannungsfunktion ψ nicht eindeutig zu sein. Eine solche Spannungsfunktion entspricht aber keinem *schlichten* ebenen Problem und liefert eine unrichtige „Lösung". Z. B. ist in einer Arbeit[4]) $\psi = y\ln r$ als Spannungsfunktion für das ebene Verschiebungsproblem

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y), \quad w = 0$$

für einen bestimmten Fall für die *volle* Ebene gegeben; eine Nachprüfung der Verschiebungen, die dieser eindeutigen Spannungsfunktion entsprechen zeigt, daß diese unendlich vieldeutig aus-

4) S. Fußnote 3) zu Nr. 7.

Digitized by Google

fallen ($u(x, y)$). Damit muß aber leider festgestellt werden, daß die Lösung des Problems durch diese Funktion nicht geliefert worden ist.

Um Versehen von der soeben geschilderten Art sicher zu vermeiden, bedient sich der Verfasser der vorliegenden Arbeit ganz bewußt niemals der Airyschen Spannungsfunktion. Es werden vielmehr stets die Gl. (1) den Ausführungen zugrunde gelegt. Es ist selbstverständlich, daß sich zu einer jeden richtig gelösten Aufgabe der Elastizitätstheorie die richtige Spannungsfunktion durch Integration gewinnen läßt, jedoch braucht man sie dann kaum; und als Ausgangspunkt der Rechnung gewählt, verlangt die Methode der Spannungsfunktion die unbedingt erforderlichen Eindeutigkeitsbetrachtungen für die Verschiebungen u, v, w ohne deren Durchführung keine Aufgabe der Elastizitätstheorie als gelöst betrachtet werden kann.

9. Eindeutigkeit bzw. Vieldeutigkeit bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Ist der Bereich mehrfach zusammenhängend, so dürfen in einigen (bzw. auch unendlich vielen) Randpunkten Singularitäten auftreten, die für die *volle* Ebene wegen der Vieldeutigkeit der Verschiebungen verboten waren. Dabei müssen aber die Verschiebungen im mehrfach zusammenhängenden Gebiet *eindeutig* bleiben, und es ist diese Forderung für sämtliche, durch den Zusammenhang ermöglichte Umlaufsarten aufrechtzuerhalten. Trifft die Eindeutigkeit der Verschiebungen für irgendeinen Umlauf nicht zu, so sind die Verschiebungen vieldeutig und die entsprechende Singularität ist dann nicht zulässig. So ist z. B. in einer Arbeit[5]) der Fall einer unendlichen Ebene mit zwei kreisrunden Löchern behandelt worden; dabei sind bei der Eindeutigkeitsfrage scheinbar nur die Umläufe von der Art $aaaa\ldots$ berücksichtigt worden; bei den Umläufen vom Typ $bbbb\ldots$ bzw. $cccc\ldots$ erweisen sich die Verschiebungen als unendlich vieldeutig (Abb. 7). Dieser Umstand ist bereits von Herrn C. Weber als eine wesentliche Unstimmigkeit empfunden worden[6]).

Um ein Beispiel für ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet mit einer strengen Eindeutigkeitsbetrachtung zu geben, möchte der Verfasser hier an die Gl. (4) und (5) anknüpfen: diese entsprechen einer Horizontalkraft 1, die im Nullpunkte angreift; das Gebiet ist dabei eine Halbebene, die wir jetzt als *rechte* Halb

5) Z. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 1 (1921), Heft 3, S. 174—180.
6) Z. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 2 (1922), Heft 3, S. 185—187.

Digitized by Google

ebene wählen wollen ($x \geqq 0$). Die Gl. (4) und (5) sind für eine *volle* Ebene ungültig (wegen der vieldeutigen — in der vollen Ebene — Verschiebungen). Überlagern wir aber zwei solche Zustände mit verschiedenen Vorzeichen, setzen also etwa (Abb. 8)

$$(30) \qquad \begin{cases} X_x = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\cos^3\varphi_2}{r_2} - \dfrac{\cos^3\varphi_1}{r_1}\right) - \dfrac{1}{a\pi}, \\ X_y = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\cos^2\varphi_2 \sin\varphi_2}{r_2} - \dfrac{\cos^2\varphi_1 \sin\varphi_1}{r_1}\right), \\ Y_y = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\cos\varphi_2 \sin^2\varphi_2}{r_2} - \dfrac{\cos\varphi_1 \sin^2\varphi_1}{r_1}\right) - \dfrac{1}{a\pi} \end{cases}$$

die konstanten additiven Glieder sollen uns dabei nicht stören — sie sind für ein späteres Randwertproblem eingeführt worden), und schließen wir die Möglichkeit eines Umlaufes um einen *einzelnen* singulären Punkt aus, etwa dadurch, daß wir durch die beiden singulären Punkte $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ eine geschlossene Kurve legen, deren Inneres nicht mehr zu unserem Gebiet gehören soll, so haben wir in der jetzt gelochten Ebene (also in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet) die Verschiebungen *eindeutig* gemacht — denn die Vieldeutigkeit, die von der einen singulären Stelle herrührt, wird bei einem vollen Umlauf um die *beiden* singulären Stellen durch die Vieldeutigkeit der anderen singulären Stelle aufgehoben, so daß das Ergebnis eindeutig ist. Das hier angegebene Beispiel läßt sich für eine Randwertaufgabe verwerten: ist die geschlossene Kurve, die durch die beiden Punkte $(a, 0)$ und $(-a, 0)$ gelegt worden ist, ein Kreis $x^2 + y^2 = a^2$, so zeigt eine leichte Ausrechnung, daß der Rand des Kreises spannungsfrei ist (dies war der Zweck der Einführung der konstanten Glieder in den Gl. (30)) — spannungsfrei bis auf die beiden diametralen Punkte $(a, 0)$ und $(-a, 0)$, in denen Druckkräfte vom Betrage 1 angreifen (Abb. 8). Wir sehen also, daß durch Integration folgende Randwertaufgabe nun exakt gelöst werden kann: Das Gebiet ist eine unendliche Ebene, die ein kreisrundes Loch hat, der Rand des Loches ist frei von Schubspannungen und wird durch eine Normalspannung (als Druck positiv gerechnet) $p(\vartheta)$ belastet; diese Normalspannung ist von der Art, daß sie der Beziehung $p(\vartheta + \pi) = p(\vartheta)$ genügt. Durch eine Integration längs des Randes kann dann die Spannungsverteilung in der gelochten Ebene gefunden werden, von der Funktion $p(\vartheta)$ wird man in üblicher Weise absolute Integrabilität voraussetzen; bei der Ausführung der Integration hätte man auf die Drehung

Digitized by Google

des Koordinatensystems zu achten; die Integrationsgrenzen würden sich auf den *halben* Umlauf beziehen, da die Singularitäten diametral liegen. Auf die Aufstellung der formalen Integralausdrücke möchte der Verfasser nicht eingehen, weil die Koordinatendrehung bei der Integration zu langgeschriebenen Formeln führen würde; es genüge hier die Feststellung, daß wegen der nachgewiesenen Eindeutigkeit der Verschiebungen die Lösung prinzipiell richtig ist.

Digitized by Google

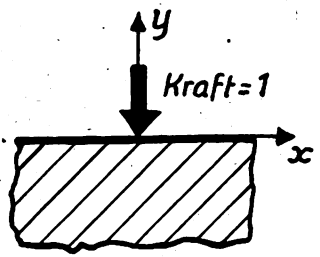


Fig.1

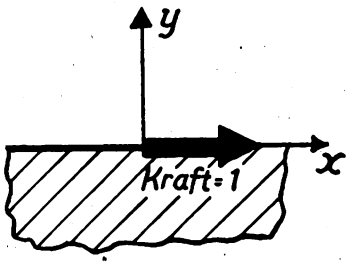


Fig.2

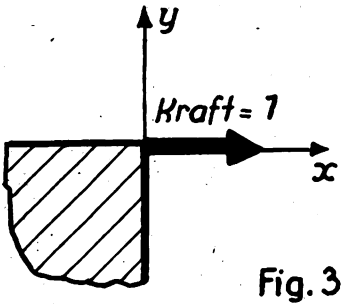


Fig.3

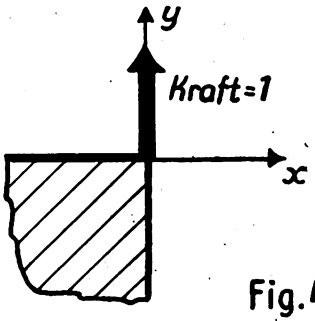


Fig.4.

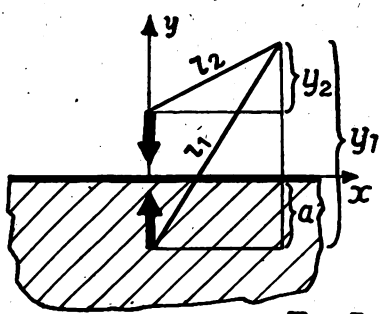


Fig.5

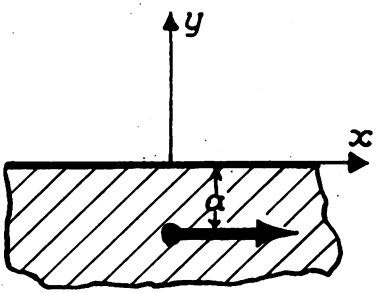


Fig.6

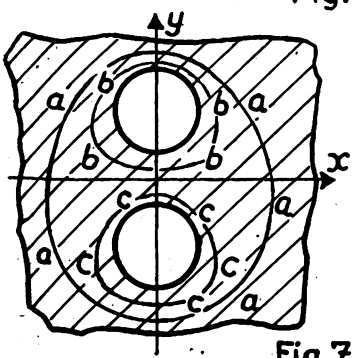


Fig.7

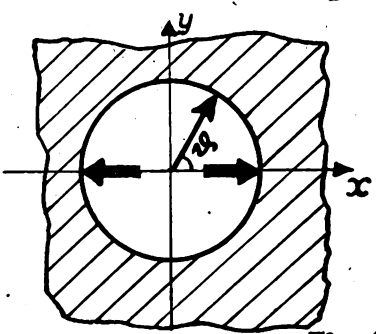


Fig.8

Digitized by Google

Über ein neues Übertragungsprinzip in der projektiven Invariantentheorie [1]).

Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Das im Folgenden entwickelte Übertragungsprinzip unterscheidet sich in einigen Punkten von den sonst bekannten.

Bei letzteren wird die Struktur invarianter algebraischer Gebilde dadurch erweitert, daß gewisse m-reihige symbolische Determinanten-Klammerfaktoren vermöge Adjunktion von neuen Variabeln (oder auch Konstanten) in solche von mehr als m Reihen übergehen.

Hier dagegen werden, unsymbolisch, in den vorgelegten Reihen von je binären, ternären, ... Urformen in resp. einer, zweier, ... nichthomogenen Variabeln die Koeffizienten von vornherein als gegebene Formen von weiteren homogenen Variabeln (Unbestimmten) angesehen. Die Urformen erscheinen dann wieder als Formen in einem System homogener Variabeln.

Umgekehrt läßt sich eine Reihe homogener Variabeln in zwei Gruppen spalten, sodaß die Elemente der einen als homogene, die der andern dagegen als nichthomogene Größen erscheinen.

Man übertrage diese Auffassung auf Kovarianten resp. Invarianten der Urformen, und deute $n+1$ homogene Variable als Punktkoordinaten in einem S_n.

Die gleich Null gesetzten Urformen stellen dann im S_n $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten M dar.

Kennt man für irgend welche Kovarianten resp. Invarianten der Urformen deren geometrische Bedeutung im ursprünglichen binären, ternären, ... Gebiete, so erlaubt das Übertragungsprinzip, jene Bedeutungen unmittelbar auf Gebilde im S_n auszudehnen, die aus den M durch Adjunktion resp. eines Punktes, einer Geraden, einer Ebene u. s. f. hervorgehen.

Es wird sich empfehlen, als Typus des Verfahrens den einfachsten Fall binärer Urformen eingehender zu verfolgen, und durch zweckmäßige Beispiele zu illustrieren.

Anhangsweise mag dann noch der ternäre Fall, als der nächst höhere, kurz besprochen werden.

1) Vorgetragen in der 258. Sitzung am 26. Juni 1929. Eine ausführlichere Darstellung erscheint demnächst im Giorn. di Mat.

Digitized by Google

A. Das binäre Übertragungsprinzip.

Nr. 1. Seien $G, H, \ldots$ binäre Urformen der Ordnungen $p, q, \ldots$ in einer nichthomogenen Variabeln x_u:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} G \equiv G(x_u) \equiv a_0 x_u^p + a_1 x_u^{p-1} + \cdots + a_p, \\ H \equiv H(x_u) \equiv b_0 x_u^q + b_1 x_u^{q-1} + \cdots + b_q, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wo die Indizes $r, s, \ldots$ in den Koeffizienten $a_r, b_s \ldots$ deren Gewichte angeben.

Sei K eine simultane Kovariante der Urformen, von der Ordnung ν und vom Leitgliedgewicht w:

$$\text{(II)} \qquad K \equiv K(x_u) \equiv k_w x_u^\nu + k_{w+1} x_u^{\nu-1} + \cdots + k_{w+\nu}.$$

Man nehme an, die Größen $a_r, b_s, \ldots$ — und damit auch die $k_{w+\nu}$ — seien selbst wieder gegebene Formen in n homogenen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, jeweils von einer durch den Index bezeichneten Ordnung.

Dann lassen sich die Formen $G, H, \ldots; K$ auch auffassen als $(n+1)$-äre in den $n+1$ homogenen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n; x_u$, von den Ordnungen $p, q, \ldots \nu + w$.

Algebraisch besteht dann das Übertragungsprinzip einfach in dieser doppelten Auffassung der Formen; die Variable x_u fungiert einmal im ursprünglichen Sinne, als solche des binären Gebietes, andererseits, im erweiterten Sinne, als Teil eines Systems von $n+1$ homogenen Veränderlichen.

Die Kraft des Prinzips tritt erst bei den Anwendungen hervor.

Nr. 2. Man deute die $x_1, x_2, \ldots x_n; x_u$ als homogene Punktkoordinaten in einem linearen Raume S_n. Ein beliebig, aber fest gewählter Ausgangspunkt, werde als die u-te Ecke A_u des Koordinatenpolytops gewählt.

Durch A_u lege man irgend eine Gerade g, die man als Verbindungsgerade von A_u mit einem Punkte $(x_1, x_2, \ldots x_n; 0)$ der „Koordinatengegenseite“ $(x_u = 0)$ auffasse. Der laufende Punkt auf g wird durch Angabe des nichthomogenen Parameters x_u bestimmt.

Dann stellen die Gleichungen $G(x_u) = 0$, $H(x_u) = 0, \ldots$, $K(x_u) = 0$ — als solche in der Unbekannten x_u aufgefaßt — vermöge ihrer Wurzeln die Punktreihen $(P), (Q), \ldots; (K)$ dar, die auf g von den durch $G(x_1, x_2, \ldots x_n; x_u) = 0$, $H(x_1, x_2, \ldots x_n; x_u) = 0$, $K(x_1, x_2, \ldots x_n; x_u) =$ dargestellten „Flächen“ (i. e. Gebilden $M^{(n-1)}$ von der Dimension $n-1$) $G, H, \ldots; K$ ausgeschnitten werden.

Digitized by Google

Dabei steht nach Voraussetzung die Reihe (K) zu den anderen in projektiver (binärinvarianter) Beziehung.

Variiert nunmehr die Gerade g durch A_u, so erfüllt die Reihe (K) eine Fläche K, mit der Gleichung $K(x_1\, x_2, \ldots x_n, x_u) = 0$, die sich daraufhin im Einzelnen diskutieren läßt. Sie ist von der Ordnung $v+w$, und besitzt in A_u einen w-fachen Knotenpunkt d_w, dessen Flächentangenten den „Kegel" $k_w(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ erfüllen. Im Besondern kann sich, für $v = 0$, die Kovariante $K(x_u)$ auf eine Invariante $J_w = J$ vom Gewichte w reduzieren. Dann stellt $J_w(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ einen „Kegel" der Ordnung w mit der Spitze in A_u dar, dessen Kanten g aus den Flächen $G, H, \ldots$ solche Punktreihen $(P), (Q), \ldots$ ausschneiden, daß sie auf allen g der projektiven (binärinvarianten) Bedingung $J = 0$ unterliegen.

Nr. 3. Bei den folgenden Anwendungen beschränken wir uns auf Urformen niedriger Ordnung.

Sei zuerst vorgelegt eine allgemeine Fläche 3. Ordnung F_3 im S_3 (x_i, x_k, x_l, x_m), und der beliebig, aber fest gewählte Punkt A_m $(x_i = x_k = x_l = 0)$. Die Gleichung der F_3 ordne man nach x_m:

$$F_3 = a_0 x_m^3 + 3a_1 x_m^2 + 3a_2 x_m + a_3 = 0, \tag{1}$$

wo a_r eine in den x_i, x_k, x_l ternäre Form der Ordnung r bedeutet. Irgend eine Gerade g durch A_m treffe die F_3 in dem Punktetripel $P(P_1, P_2, P_3)$; dieses bestimmt sich durch die kubische, in x_m binäre Gleichung $F_3(x_m) = 0$.

Nr. 4. Auf g denke man sich einmal die beiden, zum Tripel P aequianharmonischen Punkte H_1, H_2, andererseits die drei, zu P_i bez. (P_k, P_l) vierten harmonischen Punkte Q_i. Bei Variieren von g durch A_m erfüllen H_1, H_2 eine Fläche H, die „aequianharmonische", und Q_1, Q_2, Q_3 eine Fläche Q, die „harmonische".

Zufolge des Prinzips ergeben sich die Gleichungen der Flächen H und Q als die, gleich Null gesetzte, quadratische und kubische Kovariante $H(x_m)$ und $Q(x_m)$ von $F_3(x_m)$.

Explizite hat man:

$$\begin{aligned} H &\equiv h_2 x_m^2 + h_3 x_m + h_4 \\ &\equiv x_m^2(a_0 a_2 - a_1^2) + x_m(a_0 a_3 - a_1 a_2) + (a_1 a_3 - a_2^2) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Q &= \begin{vmatrix} a_0 x_m^2 + 2a_1 x_m + a_2, & 2h_2 x_m + h_3 \\ a_1 x_m^2 + 2a_2 x_m + a_3, & h_3 x_m + 2h_4 \end{vmatrix} \\ &\equiv q_3 x_m^3 + q_4 x_m^2 + q_5 x_m + q_6 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Digitized by Google

Zunächst werde die Fläche H[2]) diskutiert. Sie ist von der 4. Ordnung und besitzt in A_m einen Knotenpunkt d_2, mit dem Tangentenkegel $h_2 = 0$; letzterer ist zugleich der von A_m an die erste Polare $F_2 \equiv a_0 x_m^2 + 2a_1 x_m + a_2 = 0$ (bez. F_3) gehende Berührkegel.

Da die Diskriminante D von $F_3(x_m)$ mit der von $H(x_m)$ übereinstimmt, geht von A_m aus an die Flächen F_3 und H derselbe Tangentenkegel 6. Ordnung D:

$$D \equiv 4h_2 h_4 - h_3^2 = 0. \tag{4}$$

Beide Flächen, sowie der Kegel D, berühren sich längs einer Kurve 6. Ordnung C_6; letztere erscheint einmal als Schnittkurve der F_3 mit der Polare F_2, andererseits als doppelt zählende Schnittkurve von F_3 mit H.

Da weiter $F_3(x_m)$ dann und nur dann drei koinzierende Wurzeln besitzt, wenn $H(x_m)$ identisch verschwindet, so sind die sechs, von A_m an die F_3 gehenden Haupttangenten, die zugleich auf den Flächen H und D liegen, die gemeinsamen Kanten der drei Kegel: $h_2 = 0$, $h_3 = 0$, $h_4 = 0$. In der Tat liegen auf Grund der Identität:

$$a_0 h_4 - a_1 h_3 + a_2 h_2 \equiv 0, \tag{5}$$

die sechs gemeinsamen Kanten der Kegel h_2 und h_3 auch auf dem dritten h_4.

Bezüglich der Realitätsverhältnisse des Tripels P_1, P_2, P_3, des Paares H_1, H_2, und des Tripels Q_1, Q_2, Q_3 gelten die bekannten Kriterien.

Nr. 6. Was sodann die Fläche $Q(4)$ angeht, so ist sie von der 6. Ordnung, und besitzt in A_m einen dreifachen Punkt d_3, mit dem Tangentenkegel $q_3 = 0$, auf dem auch die sechs obigen Haupttangenten liegen.

Da mit zwei Wurzeln von $F_3(x_m)$ alle drei von $Q(x_m)$ koinzidieren, so oskuliert die Fläche Q die F_3 längs der C_6.

Für eine dreifache Wurzel von $F_3(x_m)$ verschwinden $H(x_m)$ und $Q(x_m)$ identisch, die obigen sechs Haupttangenten liegen also auch auf der Fläche Q.

Hinterher kann man auch den Fall zulassen, daß der Punkt A_m der F_3 selbst angehört, sodaß sich (1) reduziert auf:

$$F_3 = 3a_1 x_m^2 + 3a_2 x_m + a_3 = 0, \qquad (a_0 = 0). \tag{1'}$$

2) Direkt untersucht diese Fläche E. Ciani, Lomb. Ist. Rend. (2) 54 (1921), p. 255.

Digitized by Google

Es treten dann einige Modifikationen ein. Der d_2 der Fläche H wird jetzt ein uniplanarer, mit der Doppelebene $a_1 = 0$, die zugleich die Tangentialebene T_m der F_3 in A_m ist.

Die Fläche Q zerfällt jetzt in zwei Faktoren Q_2', Q_4', wo $Q_2' = 0$ die erste Polare F_2 von A_m in Bezug auf die F_3 liefert, während $Q_4' = 0$ die „eigentliche" harmonische Fläche repräsentiert:

$$(3') \qquad Q_4' \equiv x_m^2 a_1^2 + x_m a_1 a_2 + (3a_1 a_3 - 2a_2^2) = 0.$$

Andererseits zerfällt auch die Diskriminante D von $Q_4'(x_m)$:

$$(4') \qquad D \equiv a_1^2(4a_1 a_3 - 3a_2^2) \equiv a_1^2 D' = 0,$$

wo D' die Diskriminante von $F_3(x_m)$ ist. Von dem früheren Tangentenkegel D von A_m an die F_3 (1) spaltet sich die Ebene T_m doppelt ab, und es verbleibt der „eigentliche", nach Geiser[3]) benannte Tangentenkegel D' 4. Ordnung. Dieser berührt die F_3 wiederum längs einer C_6, längs deren sich auch die beiden Flächen H und Q_4' berühren. Außer dieser C_6 berühren sich die vier Flächen noch in den beiden Erzeugenden s_1, s_2 der Polaren F_2, die durch A_m gehen. Diese geometrischen Beziehungen zwischen den Flächen F_3, H, Q_4', D', F_2, a_1 werden noch durchsichtiger auf Grund der Identitäten:

$$\begin{cases} (6_h') & a_1 F_3 + 3H \equiv D', \quad -4H \equiv F_2^2 - D', \\ (6_q') & -a_1 F_3 + 3Q_4' \equiv 2D', \quad 4Q_4 \equiv F_2^2 + 2D', \\ (6_{h,q}') & H + Q_4' \equiv D'. \end{cases}$$

Diese Beziehungen prägen sich auch aus, wenn man mit Geiser die Gesamtfigur mit einer Ebene, etwa $x_m = 0$, schneidet.

Nr. 7. Ein beachtenswerter, fast elementarer Sonderfall tritt ein, wenn die F_3 in eine (einteilige) F_2 und eine Ebene E zerfällt. Sei die letztere $x_m = 0$, und die Gleichung der F_2:

$$(8) \qquad F_2 \equiv b_0 x_m^2 + b_1 x_m + b_2 = 0.$$

Dann wird die Gleichung der F_3:

$$(1\,a) \qquad F_3 \equiv F_2 . E \equiv b_0 x_m^3 + b_1 x_m^2 + b_2 x_m = 0,$$

sodaß in (1) das freie Glied a_3 wegfällt.

Die Gleichung der Fläche H wird dann:

$$(2\,a) \qquad H \equiv x_m^2(b_1^2 - 3b_0 b_2) + x_m b_1 b_2 + b_2^2 = 0,$$

während die des Kegels D zerfällt:

3) F. Geiser, Math. Ann. 1 (1868), p. 129.

Digitized by Google

(4a) $$D \equiv b_2^2(4b_0 b_2 - b_1^2) \equiv b_2^2 B = 0,$$

wo $B = 0$ den von A_m an die F_2 gehenden Berührkegel darstellt, mit dem Berührkegelschnitt b. Andererseits sei k der Schnittkegelschnitt von F_2 und E, sodaß der Kegel $b_2 = 0$ auf k steht.

Treffen sich k und b in den Punkten S_1, S_2, so ist die Gerade (S_1, S_2) der Schnitt von E mit der Polarebene Π_m von A_m bez. F_2:

(10) $$\Pi_m \equiv 2b_0 x_m + b_1 = 0.$$

Die beiden Geraden $s_1 = (A_m, S_1)$ und $s_2 = (A_m, S_2)$ repräsentieren die beiden von A_m an die zerfallende F_3 gehenden Haupttangenten.

Die Fläche H — reell nur bei einteiligem B — besitzt in A_m einen d_2, mit dem Tangentenkegel $b_1^2 - 3b_0 b_2 = 0$, enthält k doppelt und berührt F_2 (sowie B) längs b; endlich liegen auf H die Geraden s_1, s_2.

Nr. 8. Wir kommen zur Diskussion der Fläche Q. Es treffe g die F_2 in P_1, P_2, und die E in P_3. Der zu P_3 bez. (P_1, P_2) vierte harmonische Punkt Q_3 erfüllt für sich eine Fläche 2. Ordnung Q_2':

(11) $$Q_2' \equiv x_m b_1 + 2b_2 = 0,$$

sodaß die Identität gilt:

(12) $$2F_2 \equiv x_m \Pi_m + Q_2'.$$

Es geht also Q_2' durch k, b, wie den Punkt A_m, womit sie auch eindeutig bestimmt ist[4]). Die Fläche Q zerfällt daher wiederum in Q_2' und eine Fläche Q_4', die „eigentliche" harmonische Fläche, als Ort von Q_1 und Q_2. In der Tat gilt für die Kovariante $Q(x_m)$ (3) jetzt die Zerlegung:

(3a) $$Q(x_m) \equiv Q_2' Q_4' = (x_m b_1 + 2b_2)\{x_m^2(9b_0 b_2 - 2b_1^2) + x_m b_1 b_2 + b_2^2\}$$

und die Gleichung der Fläche Q_4' wird:

(13) $$Q_4' \equiv x_m^2(9b_0 b_2 - 2b_1^2) + x_m b_1 b_2 + b_2^2 = 0.$$

Somit haben auch in diesem Falle die beiden Flächen H und Q_4' die wesentlichsten Eigenschaften gemein.

Es bestätigt sich dies noch deutlicher durch die Identitäten:

(14_h) $$H \equiv b_2 F_2 - x_m^2 B,$$

(14_q) $$Q_4' \equiv b_2 F_2 + 2x_m^2 B,$$

(14) $$Q_4' - H \equiv 3x_m^2 B,$$

4) Es sei noch auf den metrischen Spezialfall hingewiesen, wo F_2 eine Kugel, und E die E_∞ ist. Dann werden die Flächen H und Q_4' Rotationszykliden, mit dem Doppelpunkte A_m.

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{ll} (14'_h) & H \equiv -3b_2 F_2 + Q_2'^2, \\ (14'_q) & Q_4' \equiv 9b_2 F_2 - 2Q_2'^2, \\ (14') & Q_4' + H \equiv 3(4b_2 F_2 - Q_2'^2), \\ (14_a) & Q_4' + 2H \equiv 3b_2 F_2, \\ (14_b) & Q_4' + 3H \equiv Q_2'^2 \text{ 5)}. \end{array}\right.$$

Nr. 9. Es werde weiter dem Systeme (F_3, A_m) noch eine beliebige, vor der Hand nicht durch A_m gehende Ebene F_1 adjungiert:

$$F_1 \equiv x_m \varrho_0 + \varrho_1 = 0. \tag{15}$$

Eine Gerade g durch A_m treffe die F_3 wieder in P_1, P_2, P_3, die Ebene F_1 im Punkte R'. Sei $R_i (i = 1, 2, 3)$ der zu R' bez. (P_k, P_l) vierte harmonische Punkt, so erfüllt das Tripel (R_i) bei variierender Geraden g eine Fläche R.

Man verstehe unter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln der kubischen Gleichung $F_3(x_m) = 0$ und etwa λ_1, λ_2 seien die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$g(x_m) \equiv g_0 x_m^2 + 2g_1 x_m + g_2 = 0. \tag{16}$$

Der Punkt R_3 bestimmt sich durch die Wurzel der Linearform p_3, der ersten Überschiebung von g und F_1:

$$\left.\begin{array}{r} p_3 \equiv \begin{vmatrix} g_0 x_m + g_1, & \varrho_0 \\ g_1 x_m + g_2, & \varrho_1 \end{vmatrix} \\ \equiv g_0 \left\{ x_m + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \varrho_0 \right) - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \varrho_1 + \lambda_1 \lambda_2 \varrho_0 \right) \Big\}, \end{array}\right. \tag{17}$$

die Gleichung der Fläche R bestimmt sich also als die Produktgleichung:

$$R \equiv p_1 p_2 p_3 = 0. \tag{18}$$

Da R eine Komitante des Systems (F_3, A_m, F_1) ist, genügt die Kenntnis des Leitgliedes ν_0 von R:

$$\nu_0 \equiv \prod_{\lambda_3} \left(\varrho_1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \varrho_0 \right). \tag{19}$$

---

5) Die Fläche Q_2' geht auch durch den Pol K von k (bez. der F_3), beide Pole A_m und K erweisen sich als gleichberechtigt. Denkt man sich umgekehrt die Fläche Q_2' innerhalb des aus F_2 und dem Ebenenpaar (k, b) zusammengesetzten Büschels beliebig vorgegeben, so gehört zu ihr noch eine zweite Ausgangsfläche F_2', die sich von F_2 nur durch Vertauschung der beiden Pole A_m und K unterscheidet. Das Flächenpaar F_2, F_2' ist harmonisch zu dem Paar der im Büschel enthaltenen Kegel.

Digitized by Google

Führt man hier die Koeffizienten a der $F_3(1)$ ein, so ergibt sich:

$$(20)\quad \begin{aligned} \nu_0 &\equiv \varrho_1^3 a_0^2 - 3\varrho_1^2\varrho_2 a_0 a_1 + \tfrac{3}{4}\varrho_1\varrho_0^2(3a_1^2 - a_0 a_2) + \tfrac{1}{8}\varrho_0^3(a_0 a_3 - 9a_1 a_2) \\ &\equiv a_0(a_0\varrho_1^3 - 3a_1\varrho_1^2\varrho_0 + 3a_2\varrho_1\varrho_0^2 - a_3\varrho_0^3) - \tfrac{9}{8}\varrho_0^2(2h_2\varrho_1 - h_3\varrho_0). \end{aligned}$$

Hier ist der Faktor von a_0 die Resultante P von $F_3(x_m)$ und $F_1(x_m)$, während innerhalb der zweiten Klammer h_2 und h_3 die beiden ersten Koeffizienten in $H(2)$ sind.

Ersetzt man in (20) die Leitglieder a_0, ϱ_0, $2h_2\varrho_1 - h_3\varrho_0$ durch die zugehörigen Kovarianten F_3, F_1, H', wo:

$$(21)\quad H' = \begin{vmatrix} 2h_2 x_m + h_3, & \varrho_0 \\ h_3 x_m + 2h_4, & \varrho_1 \end{vmatrix}$$

die erste Überschiebung von $H(x_m)$ und $F_1(x_m)$ ist,, so hat man als invariante (typische) Darstellung der Fläche R:

$$(22)\quad R \equiv F_3 P - \tfrac{9}{8}F_1^2 H' = 0,$$

aus der sich wieder eine Reihe geometrischer Eigenschaften der Fläche R sofort ablesen läßt.

Nr. 10. Ein interessanter Sonderfall tritt ein, wenn die Ebene F_1 durch den Punkt A_m hindurchgeht, sodaß ϱ_0 verschwindet, während die Fläche F_3 den Punkt A_m nicht enthalte.

Dann spaltet sich in (20) der Faktor ϱ_1^3 ab, und die Fläche R reduziert sich nach Abspaltung der dreifach zählenden Ebene F_1 auf eine kubische, von D. Montesano[6]) direkt untersuchte Fläche M, den Ort der drei Punkte auf g, die zu A_m in bezug auf je eines der drei Paare (P_i, P_k) harmonisch sind.

Aus (22) ergibt sich als Gleichung von M:

$$(23)\quad M \equiv 8a_0 F_3 - 9H_m = 0,$$

wo $H_m = \dfrac{\partial H}{\partial x_m}$ (Polare von A_m bez. H) eine Semikovariante ist.

Beachtenswert ist, daß das Auftreten eines d_2 bei der F_3 das Entsprechende bei der M nach sich zieht, und vice versa, wie sich auf Grund einfacher Rechnungen ergibt. Die Lagenbeziehung des Punktes A_m zu den beiden d_2 regelt sich durch den Satz: Besitzt die F_3 an einer Stelle D_2 einen d_2, so treffe die Gerade (A_m, D_2) die F_3 noch im Punkte D_1.

Dann besitzt die M einen d_2 an einer Stelle D_2' auf der Geraden (A_m, D_2), während D_2 ihr weiterer Treffpunkt mit der M

6) D. Montesano, Napoli Rend. (2) 5 (1899), p. 88.

Digitized by Google

ist. Die beiden Punktepaare (D_1, D_2) und (A_m, D_2') sind zueinander harmonisch.

Nr. 11. Eine weitere Anwendung des Übertragungsprinzips möge sich auf zwei Flächen 2. Ordnung F_2, G_2, und deren Büschel B beziehen. Die Gleichungen der beiden Flächen seien:

$$(24) \qquad \begin{cases} F_2 \equiv F \equiv a_0 x_m^2 + 2a_1 x_m + a_2 = 0, \\ G_2 \equiv G \equiv b_0 x_m^2 + 2b_1 x_m + b_2 = 0. \end{cases}$$

Auf einer Geraden g durch A_m schneiden die Individuen des Büschels B eine Involution aus, deren Doppelpunkte D_1 und D_2 seien. Die Gleichung des Ortes von D_1, D_2 ergibt sich durch das Verschwinden der ersten Überschiebung Θ von $F_2(x_m)$ und $G_2(x_m)$:

$$(25) \qquad \Theta \equiv \Theta_3 \equiv p_{01} x_m^3 + p_{02} x_m + p_{12} = 0,$$

wo $p_{ik} = (ab)_{ik}$.

Dies ist eine kubische Fläche Θ, die durch A_m hindurchgeht; sie erscheint auch im besondern als Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die von A_m aus an die Individuen von B gehen.

Das ist eine der Steinerschen Erzeugungen einer F_3; indem sie hier unter allgemeinerem Gesichtspunkt auftritt, kann man ihr neue Eigenschaften abgewinnen.

Die Fläche Θ_3 enthält die Grundkurve C_4 des Büschels B. Der Kegel 4. Ordnung D, mit der Spitze in A_m, der die Θ_3 längs der C_4 berührt, hat zur Gleichung die verschwindende Resultante von $F_2(x_m)$ und $G_2(x_m)$ — oder auch der Diskriminante $\Theta_3(x_m)$:

$$(26) \qquad D \equiv p_{02}^2 - 4 p_{01} p_{12} = 0.$$

Nr. 12. Die Formen Θ_3 und D sind noch anderer Darstellungen fähig.

Sind F_1, G_1 die ersten Polaren von F, G:

$$(27) \qquad F_1 = a_0 x_m + a_1, \quad G_1 = b_0 x_m + b_1,$$

so erscheint $\Theta = \Theta_3$ auch als semikovariante lineare Kombination von F und G:

$$(25') \qquad -G_1 F + F_1 G \equiv \Theta.$$

Sind weiter D_a und D_b die beiden Diskriminanten von F und G, h deren bilineare Invariante:

$$(28) \qquad \begin{aligned} D_a &\equiv 2(a_0 a_2 - a_1^2), \quad D_b \equiv 2(b_0 b_2 - b_1^2), \\ h &\equiv a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1, \end{aligned}$$

so läßt sich D auch als semikovariante lineare Kombination von

Digitized by Google

Θ, F und G darstellen:

$$(26') \quad D \equiv -2p_0\Theta + F(a_0 D_b + b_0 h) + G(b_0 D_a + a_0 h).$$

Endlich gestattet D auch die typische Darstellung:

$$(26'') \quad D \equiv h^2 - D_a D_b.$$

Aus den Identitäten (25), (25'), (26), (26'), (26'') läßt sich eine Reihe geometrischer Beziehungen zwischen den Flächen $F_2, G_2, \Theta_3, D, F_1, G_1, D_a, D_b, h$ ablesen, was dem Leser überlassen bleibe.

Dagegen sei bemerkt, daß, eben für geometrische Zwecke, eine gewisse Modifikation der Darstellungen (24) von F_2 und G_2, sowie der weiteren, nützlich ist.

Da Θ und D Kombinanten von F_3 und G_2 sind, so darf man etwa G_2 durch diejenige lineare Kombination (mit konstanten Koeffizienten) von F_3 und G_2, in der das Glied mit x_m^2 herausfällt, ersetzen, sodaß man schreiben darf:

$$(24_1) \quad F \equiv x_m^2 + 2a_1 x + a_2 = 0, \quad G \equiv 2b_1 x_m + b_2 = 0.$$

Die Fläche G ist dann diejenige des Büschels B, die den Punkt A_m enthält. Zufolge (24_1) reduziert sich (25) auf:

$$(25_1) \quad \Theta \equiv \Theta_3 \equiv b_1 x_m^2 + b_2 x_m + (ab)_{12} \equiv 0,$$

G_1 auf b_1, D_1 auf $-2b_1^2$, und h auf $b_2^2 - 2a_1 b_1$.

Die Flächen Θ_3 und G_2 besitzen in A_m dieselbe Tangentialebene T_m ($b_1 = 0$), und haben die beiden, durch A_m laufenden Erzeugenden g_1, g_2 von G_2 gemein, die zugleich dem Kegel $b_2 = 0$ angehören.

Die erste Polare von A_m bzw. Θ_3, $2b_1 x_m + b_2 = 0$ fällt mit G_2 zusammen, und schneidet Θ_3 — außer in g_1, g_2 — in einer C_4, dem eigentlichen Ort der Berührungspunkte der von A_m an Θ_3 gehenden Tangenten, der Grundkurve des Büschels B.

Von A_m aus gehen zwei Sekanten an die C_4; das sind eben g_1 und g_2.

Die Ebene T_m schneidet aus der Fläche Θ_3 noch eine dritte Gerade g_3 aus, die gemeinsame Achse von T_m mit allen Polarebenen von A_m bzw. der Flächen in B.

Nr. 13. Umgekehrt gehe man von einer beliebig vorgegebenen kubischen Fläche F_3 aus. Sei A_0 der Treffpunkt irgend zweier inzidenter — reeller oder konjugiert imaginärer — Geraden g_1, g_2 der Fläche. Von A_0 aus geht ein Kegel D, der die F_3 längs einer C_4 berührt. Durch diese C_4 geht ein Büschel B von Flächen 2. Ordnung.

Dann erscheint die F_3 zunächst als Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die von A_0 aus an die Flächen des Büschels B

Digitized by Google

gehen; darüber hinaus aber als Ort der Doppelpunkte D_1, D_2 der Punktinvolutionen, die auf den g durch A_0 von den Individuen in B ausgeschnitten werden.

In B befindet sich ein durch A_0 gehendes Individuum G; dann sind g_1, g_2 die beiden, durch A_0 gehenden Erzeugenden von G, sowie die beiden von A_0 an die C_4 gehenden Sekanten.

Die beiden Flächen F_3 und G haben in A_0 dieselbe Tangentialebene $T_m(g_1, g_2)$, die aus der F_3 noch eine dritte (reelle) Gerade g_3 ausschneidet.

Diese Gerade g_3 ist zugleich die Achse der Polarebenen von A_0 in Bezug auf die Flächen von B.

Dieser Umkehrungsprozeß läßt sich algebraisch leicht bestätigen. Die Gleichung einer durch A_m gehenden F_3 ist von der Gestalt:

$$F_3 \equiv b_1 x_m^2 + b_2 x_m + b_3 = 0, \tag{26}$$

und damit die ihrer Polaren von A_m:

$$G \equiv 2 b_1 x_m + b_2 = 0. \tag{27}$$

Die F_3 enthalte die beiden — durch $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ bestimmten — durch A_m laufenden Erzeugenden g_1, g_2 von G. Folglich muß sich das freie Glied b_3 in (26) in die Gestalt kleiden lassen:

$$b_3 \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1 \equiv (a_1 + \lambda b_1) b_2 - (a_2 + \lambda b_2) b_1, \tag{28}$$

wo λ ein Parameter ist.

Nr. 14. Die obigen Entwicklungen über ein Büschel B von Flächen 2. Ordnung lassen sich auf den Fall der Ebene übertragen. Man gelangt so zu neuen Eigenschaften von der bekannten Figur der vier, von einem Punkte einer kubischen Kurve c_3 an sie gehenden Tangenten, nebst ihren vier Berührungspunkten als Grundpunkten eines Büschels B von Kegelschnitten c_2.

Es bietet sich hier noch die Vereinfachung dar, daß man an Stelle der einen Grundform F von B ein (reelles) Geradenpaar, dessen Doppelpunkt eine Koordinatenecke ist, wählen kann.

Nr. 15. Ohne auf weitere Anwendungen des binären Übertragungsprinzips einzugehen, behandeln wir noch in Kürze den nächst höheren Fall:

B. Das ternäre Übertragungsprinzip. Sei vorgelegt eine Reihe ternärer Urformen G, H, ..., von den Ordnungen $p, q, \ldots$ in zwei nichthomogenen Variabeln x_u, x_v, und angeordnet nach den Dimensionen in letzteren:

Digitized by Google

$$\text{(I')} \qquad \begin{aligned} G(x_u, x_v) &\equiv G \equiv a_0 g_p + a_1 g_{p-1} + \cdots + a_p g_0, \\ H(x_u, x_v) &\equiv H \equiv b_0 h_q + b_1 h_{q-1} + \cdots + b_q h_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo $g_i, h_k, \ldots$ binäre Formen in den homogenen x_u, x_v bedeuten, von den Ordnungen $i, k, \ldots$, und die Indizes $r, s, \ldots$ der Koeffizienten $a_r, b_s, \ldots$ deren Gewichte.

Weiter sei $K(x_u, x_v)$ eine Kovariante der Urformen $G, H, \ldots$:

$$\text{(II')} \qquad K(x_u, x_v) \equiv K \equiv k_w q_v + k_{w+1} q_{v-1} + \cdots + k_{w+v} q_0,$$

von der Ordnung v und dem Leitgewicht w; q_l ist wiederum binär in x_u, x_v, von der Ordnung l, und $w+t$ das Gewicht des Koeffizienten k_{w+t}.

Nunmehr werde angenommen, daß die $a_r, b_s, \ldots k_{w+t}$ nicht konstant seien, sondern *homogene* Formen von $n-1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$.

Dann lassen sich die Bildungen $G, H, \ldots$ in (I') auch auffassen als homogene Formen in allen $n+1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; x_u, x_v$, von den Ordnungen $p, q, \ldots$, und analog K als eine solche Form der Ordnung $w+v$.

Nr. 16. Behufs geometrischer Deutung fasse man die $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; x_u, x_v$ auf als homogene Punktkoordinaten in einem S_n. Eine beliebig, aber fest gewählte Gerade a_{uv} werde als Koordinatenkante ($x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$) gewählt.

Durch a_{uv} lege man irgend eine Ebene E; da diese die Kante a_{uv} mit einem Punkte $(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; 0, 0)$ des „Gegengebildes" verbindet, so lassen sich x_u, x_v als nichthomogene Punktkoordinaten innerhalb der Ebene E ansehen.

Dann stellen die Gleichungen $G(x_u, x_v) = 0$, $H(x_u, x_v) = 0, \ldots$ — als solche in den nichthomogenen Koordinaten x_u, x_v aufgefaßt — Kurven $C_p, C_q, \ldots$ der Ordnungen $p, q, \ldots$, dar, die von der Ebene E auf den $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten $M^{(n-1)}$: $G, H, \ldots$ ausgeschnitten werden, die durch die Gleichungen

$$G(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; x_u, x_v) = 0, \quad H(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; x_u, x_v) = 0, \quad \ldots$$

im S_n dargestellt werden.

Das Analoge gilt von der durch $K(x_u, x_v) = 0$ ausgedrückten Kurve C_{w+v}, als Schnitt der $M^{(n-1)}$: $K(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; x_u, x_v) = 0$ mit der Ebene E; nach Voraussetzung steht diese Kurve C_{w+v} mit den obigen in E in ternär-projektiver Beziehung.

Variiert nun die Ebene E durch a_{uv}, so erfüllen die Kurven

Digitized by Google

C_{w+v} eine $M^{(n-1)}$: K_{w+v}, der Ordnung $w+v$, die direkt durch die Gleichung $K(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; x_u, x_v) = 0$ geliefert wird.

Ist im Besondern die Ordnung v der Kovariante K (II′) gleich Null, so reduziert sie sich auf eine Invariante I_w der Urformen $G, H, \ldots$. Dann stellt die Gleichung $I_w(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = 0$ eine von ∞^{n-3} Ebenen E umhüllte $M^{(n-1)}$: $I_w^{(n-1)}$ dar, der Ordnung w, so daß die E aus den $M^{(n-1)}$: $G, H, \ldots$ solche Kurven $C_p, C_q, \ldots$ ausschneiden, die der ternär-invarianten Bedingung $I = 0$ unterliegen.

Es ist damit ersichtlich, wie sich die höheren Stufen des Übertragungsprinzips gestalten.

Nr. 17. Für das ternäre Prinzip sei noch eine einfache Anwendung hinzugefügt. Es liege im $S_3(x_i, x_k, x_l, x_m)$ eine Fläche n-ter Ordnung F_n vor, nebst der Geraden a_{lm} ($x_i = 0$, $x_k = 0$), die eine $(n-2)$-fache Gerade auf der F_n sei. Die Gleichung der F_n nimmt die Gestalt an:

$$F_n \equiv a_{n-2} f_2 + a_{n-1} f_1 + a_n f_0 = 0, \tag{29}$$

wo die a_i binäre Formen der x_i, x_k von der Ordnung i seien, und die f_k solche der x_l, x_m, von der Ordnung k. Explizite geschrieben seien die f_k:

$$f_2 \equiv a_{ll} x_l^2 + 2 a_{lm} x_l x_m + a_{mm} x_m^2, \quad f_1 \equiv b_l x_l + b_m x_m, \quad f_0 \equiv c_0. \tag{30}$$

Eine Ebene E durch a_{lm} schneidet die F_n in einem Restkegelschnitt C_2, dessen Gleichung, in den nichthomogenen Koordinaten x_l, x_m direkt durch (29) dargestellt ist. Es sollen die in Geradenpaare zerfallenden C_2 bestimmt werden. Das Kriterium des Zerfallens ist das Verschwinden der Determinante D der quadratischen Form $F_n(x_l, x_m)$. Das liefert die Gleichung:

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{ll} a_{n-2}, & a_{lm} a_{n-2}, & b_l a_{n-1} \\ a_{lm} a_{n-2}, & a_{mm} a_{n-2}, & b_m a_{n-1} \\ b_l a_{n-1}, & b_m a_{n-1}, & c_0 a_n \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

Da diese Gleichung im Parameter x_i/x_k vom Grade $3n-4$ ist, so erhält man sofort das Aggregat der $3n-4$ Ebenen E, die aus der F_n zerfallende C_2 ausschneiden, oder auch, was nach Auflösung einer quadratischen Hilfsgleichung auf dasselbe hinauskommt, das Aggregat der $3n-4$ Geradenpaare auf der F_n, die die Gerade a_{lm} treffen.

Für $n = 3$ ergeben sich so die fünf Geradenpaare einer F_3, die eine vorgelegte Gerade auf der F_3 treffen.

Digitized by Google

Dies ist freilich seit Salmon[7]) bekannt, und seine Methode ist später auf den Fall einer F_n übertragen worden.

Es ist aber leicht zu erkennen, daß die obige Methode erheblich durchsichtiger ist.

Auf Grund der nemlichen Gleichung $D = 0$ läßt man auch die analoge Aufgabe im S_4. Liegt eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit F_n vor, mit einer $(n-2)$-fachen Geraden a_{mn} $(x_i = x_k = x_l = 0)$, so lautet die Gleichung der F_n formal, wie in (29), nur daß jetzt die Koeffizienten a ternäre Formen in den x_i, x_k, x_l sind.

Dann liefert die Gleichung $D = 0$ (31), von der Ordnung $3n-4$ in den x_i, x_k, x_l die ∞^1 Geradenpaare auf der F_n, die die Gerade a_{mn} treffen.

Endlich sei noch auf eine ähnliche, aber weniger einfache Erscheinung bei einer F_4 im S_4 hingewiesen.

Auf einer F_4 liegen ∞^1 Gerade g. Man greife eine solche als die Kante a_{mn} heraus. Die Gleichung der F_4 ist dann von der Gestalt:

$$(32) \qquad F_4 \equiv a_1 f_3 + a_2 f_2 + a_3 f_1 + a_4 f_0 \equiv c_3(x_m, x_n) = 0,$$

wo die linke Seite c_3 eine kubische Form in den nichthomogenen Punktkoordinaten x_m, x_n bedeutet, also die Gleichung $c_3 = 0$ als die einer ebenen kubischen Kurve c_3 angesehen werden kann. Stellt man die bekannten beiden invarianten Bedingungen dafür auf, daß die c_3 in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt, so gelangt man zu der endlichen Anzahl von Geraden g auf der F_4, die die vorgegebene Gerade a_{mn} treffen.

7) G. Salmon, bei A. Cayley, Cambr. Dublin math. J. 4 (1849), p. 456.

Digitized by Google

Affinminimalflächen und Gewindekurven[1]).

Von E. Salkowski.

1. Die Flächen

$$rt - s^2 = \text{konst.} \tag{1}$$

sind bereits seit langem in expliziter Form bekannt[2]). Ihre einfachste analytische Darstellung ist

$$\begin{aligned} x_1 &= v - u, \\ x_2 &= U' - V', \\ x_3 &= (uV' - vU') - 2(U - V) - uU' + vV', \end{aligned} \tag{2}$$

wobei x_1, x_2, x_3 die Koordinaten des Radiusvektors

$$x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

und $U(u)$, $U(v)$ beliebige Funktionen je eines Parameters u bezw. v bedeuten. Aus dieser Darstellung läßt sich eine Reihe von Eigenschaften dieser Flächenklasse mit Leichtigkeit ablesen, indessen hat erst Blaschke[3]) sie in einen größeren Zusammenhang eingeordnet, indem er erkannte, daß sie mit den „uneigentlichen Affinsphären" identisch sind, d. h. mit denjenigen Flächen, deren Affinnormalen ein Parallelstrahlbündel bilden. Da aber seine Darstellung, ebenso wie die früheren, im wesentlichen analytischer Natur ist, dürfte es nicht überflüssig sein, sich zu überzeugen, in welch einfacher Weise diese Flächen auch geometrischen Untersuchungsmethoden zugänglich sind.

2. Wir gehen von einer Schubfläche (Translationsfläche) aus, die dadurch entsteht, daß eine Kurve U ($U(u)$ bedeute gleichzeitig die analytische Darstellung der Kurve durch ihren Radiusvektor) sich längs einer zweiten Kurve V verschiebt. Dann wird die erzeugte Fläche durch die Radienvektoren der „Schubkurven" $U(u)$, $V(v)$ in der Form

$$\mathfrak{x}(u, v) = U + V \tag{3}$$

dargestellt.

1) Vorgetragen in der 251. Sitzung am 28. November 1928.

2) Darboux, Théorie des surfaces III, (1894) S. 273, Goursat, Bull. de la Soc. Math. de France 24 (1896) S. 43; Scheffers, Math. Zs. 5 (1919), S. 112.

3) Blaschke, Differentialgeometrie II (1923) S. 216.

Digitized by Google

Zur Vereinfachung der analytischen Formeln seien als Kurvenparameter u, v die Affinlängen der betr. Kurven gewählt, so daß

$$(U' U'' U''') = 1, \quad (V' V'' V''') = 1$$

ist. Dabei ist zu beachten, daß für Kurven positiver Windung die Affinlänge reell, für Kurven negativer Windung die Affinlänge rein imaginär ausfällt.

Man konstruiere in jedem Punkte der Fläche $\mathfrak{x}$ die Schmiegungsebene der erzeugenden Kurven; diese schneiden sich in dem zum Punkte $\mathfrak{x}$ gehörigen „Schmiegungsstrahl". Die Gesamtheit der Schmiegungsstrahlen bildet eine Linienkongruenz von bemerkenswert einfachem Bau. Betrachtet man nämlich diejenigen Strahlen der Kongruenz, die die Punkte einer Kurve U treffen, für die also $v = v_0$ konstant ist, so liegen diese in den Schmiegungsebenen der dem Werte v_0 entsprechenden Punkte der Kurven v, gehen also durch Parallelverschiebung ineinander über. Alle diese Geraden sind demnach einer festen Ebene parallel. Da die Kurven U und V gleichberechtigt sind, gilt das entsprechende auch für diejenigen Strahlen der Kongruenz, die eine feste Kurve V schneiden:

Die Kongruenz der Schmiegungsstrahlen der Schubkurven einer Translationsfläche enthält $2\infty^1$ geradlinige Flächen mit Richtebene, deren Leitkurve jeweils eine erzeugende Kurve und deren Richtebene die Schmiegungsebene in einem festen Punkte einer Kurve der zweiten Schar ist.

Die analytische Darstellung der Kongruenz ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \lambda \mathfrak{\xi}, \tag{4}$$

wobei der Vektor $\mathfrak{\xi}$ parallel den Schmiegungsebenen von U und V sein muß, deren Stellung durch die Vektorprodukte

$$[U' U''] \text{ bezw. } [V' V'']$$

gekennzeichnet ist.

Demnach wird

$$\mathfrak{\xi} = [[U' U''] [V' V'']], \tag{5}$$

ein Vektor, der sich als Vektor der Schmiegungsebene von U in der Form

$$\mathfrak{\xi} = \alpha U' + \beta U'', \tag{5a}$$

als Vektor der Schmiegungsebene von V dagegen

$$\mathfrak{\xi} = \gamma V' + \delta V'' \tag{5b}$$

Digitized by Google

schreiben läßt, wobei

$$\alpha = -(U'' V' V''), \quad \beta = (U' V' V'')$$
$$\gamma = (U' U'' V''), \quad \delta = -(U' U'' V') \tag{6}$$

gesetzt ist[4]).

3. Gehört die Schubkurve U einem Gewinde an, so sind die Schmiegungsstrahlen, die sie schneiden, Strahlen dieses Gewindes; da sie außerdem parallel einer festen Ebene sind, so schneiden diese Schmiegungsstrahlen noch eine feste Gerade im Endlichen, den zu der uneigentlichen Geraden der Richtebene konjugierten Durchmesser des Gewindes, d. h. die Schmiegungsstrahlen bilden Konoide.

Ist eine erzeugende Kurve U der Schubfläche eine Gewindekurve, so bilden die Schmiegungsstrahlen, die die Kurve U schneiden, ein Konoid, dessen Leitgerade ein Durchmesser des Gewindes ist.

Daß auch umgekehrt, wenn die Schmiegungsstrahlen der Kurve U ein Konoid bilden, die Kurve eine Gewindekurve sein muß, ergibt sich unmittelbar aus der Überlegung, daß die Kurve U auf der zugehörigen Schmiegungsstrahlenfläche eine Asymptotenlinie sein muß, da ihre Schmiegungsebene mit der Tangentialebene der Fläche zusammenfällt. Die Asymptotenlinien eines Konoids aber sind immer Gewindekurven.

Durch Rechnung findet man die Achse des Konoids am einfachsten, wenn man in Gleichung (4) bei konstantem v den Parameter $\lambda = \lambda(u)$, so bestimmt, daß

$$\frac{d^2 \mathfrak{z}}{du^2} = c \frac{d\mathfrak{z}}{du} \tag{7}$$

wird.

Einen besseren Einblick in den Zusammenhang gewinnt man indessen, wenn man zunächst für die Schmiegungsstrahlenfläche $v =$ konst. die krummen Asymptotenlinien bestimmt; die Bedingung dafür, daß auch eine Kurve dieser Schar geradlinig wird, führt dann sofort auf den soeben geometrisch behandelten Sonderfall.

Auf der Fläche

$$\mathfrak{z} = U + V + \lambda \xi(u, v) \qquad (v = \text{konst.}) \tag{4}$$

sind die Asymptotenlinien durch diejenigen Werte $\lambda = \lambda(u)$ bestimmt, für die die Vektoren

$$\frac{d\mathfrak{z}}{du}, \quad \frac{d^2 \mathfrak{z}}{du^2}, \quad \xi$$

4) Vgl. etwa Lagally, Vektorrechnung (1928) S. 33.

Digitized by Google

komplanar sind. Die Bedingung dafür ist das Verschwinden der Determinante

$$(U' + \lambda\xi_u, \quad U'' + \lambda\xi_{uu} + \lambda_u\xi_u, \cdot\ \xi).$$

Die einfache Ausrechnung, bei der die aus den Elementen der Affingeometrie bekannte Beziehung [5])

$$U^{IV} + kU'' + tU' = 0, \tag{8}$$

$$k(u) = (U^{IV}\, U'\, U'''), \quad t(u) = -(U^{IV}\, U''\, U''') \tag{9}$$

zu benutzen ist, ergibt, daß die krummen Asymptotenlinien der Schmiegungsstrahlenflächen durch

$$\lambda = \text{konst.} \tag{10}$$

gekennzeichnet sind.

Für eine geradlinige Asymptotenlinie dieser Schar muß der Vektor

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{du^2} = -k\lambda\alpha U' + (1 + (\alpha_u - \beta k)\lambda)\, U'' - \lambda\alpha U'''$$

zu dem Tangentenvektor

$$\frac{d\mathfrak{z}}{du} = (1 + \lambda\alpha_u)\, U' + \lambda\beta U'''$$

parallel sein; d. h.

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{du^2} = \nu \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{du}. \tag{11}$$

Vergleicht man in den beiden Vektoren links und rechts die Komponenten in den Richtungen U', U'', U''' miteinander, so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} -k\lambda\alpha &= \nu(1 + \lambda\alpha_u) \\ -\lambda\alpha &= \nu \cdot \lambda\beta \\ \lambda &= \frac{1}{\beta k - \alpha_u}. \end{aligned} \tag{12}$$

Aus der zweiten folgt

$$\nu = -\frac{\alpha}{\beta},$$

so daß die Gleichung (11) die Form

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{du^2} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{d\mathfrak{z}}{du} = 0$$

5) Leipz. Ber. 70 (1918) S. 160; vgl. auch Blaschke, Differentialgeometrie Bd. 2 (1923) S. 72 f.

Digitized by Google

annimmt, oder, da $\alpha = -\beta_u$:

$$\beta \frac{d^2 \mathfrak{z}}{du^2} - \beta_u \frac{d\mathfrak{z}}{du} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\beta}\frac{d\mathfrak{z}}{du}\right) = 0,$$

also

$$\frac{d\mathfrak{z}}{du} = C\beta,$$

wobei C ein von u unabhängiger Vektor ist. Beachtet man den Wert von β, so ergibt sich für die gerade Asymptotenlinie die Darstellung

$$\mathfrak{z} = C(U, V', V'') + A, \tag{13}$$

wobei auch der Vektor A von u unabhängig ist. Aus der ersten oder dritten Gleichung (12) (beide sind gleichbedeutend) ergibt sich in Verbindung mit (10), daß

$$(\beta k - \alpha_u) \cdot \lambda = 1$$

konstant sein muß, also

$$(U''' + kU', V' V'') \cdot \lambda = 1$$

von u unabhängig. Differentiert man nach u, so ergibt sich unter Beachtung der Formel (8):

$$k' = t, \tag{14}$$

d. h. die Kurven U gehören einem Gewinde an, und ihre Differentialgleichung kann in der Form

$$U''' + kU' = a \tag{15}$$

$$a = \text{konst.}$$

geschrieben werden. Setzt man den Wert von λ

$$\lambda = \frac{1}{(a\, V'\, V'')} \tag{16}$$

in die Gleichung (4) ein, so muß sich die geradlinige Asymptotenlinie in der Form der Gleichung (13) ergeben. Nun ist für eine Gewindekurve (15) das Vektorprodukt

$$[U'\, U'''] = [U'\, a],$$

somit

$$[U'\, U''] = [Ua] + b,$$

wobei b ein beliebiger konstanter Vektor ist. Damit wird in

Digitized by Google

diesem Fall

$$\xi = [[U'U''], [V'V'']] = [[Ua],]V'V'']] + [b[V'V'']],$$

und damit

$$\xi = (UV'V'')a - (aV'V'')U + (bV'')V' - (bV')V''. \tag{17}$$

Mit Hilfe der Formeln (16) und (17) wird die geradlinige Asymptotenlinie (4) in der Form

$$\mathfrak{z} = \frac{(UV'V'')a + (bV'')V' - (bV')V''}{(aV'V'')} + V \tag{18}$$

dargestellt. Daraus ergibt sich, daß der Vektor C in (13) zum Vektor a, d. h. zur Richtung des Gewindedurchmessers, parallel ist:

$$C = \frac{a}{(aV'V'')}.$$

4. Die Brennflächen der Schmiegungsstrahlenkongruenz sind Affinminimalflächen; sie werden von allen Regelflächen $u =$ konst. und $v =$ konst. der Schmiegungsstrahlen (4) eingehüllt, und zwar berühren die Regelflächen jede der beiden Brennflächen in einer Asymptotenlinie.

Man erhält nämlich die Brennfläche einer Kongruenz

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \lambda\xi(u, v), \tag{4}$$

wenn man λ als Funktion von u und v so bestimmt, daß $d\mathfrak{z}$ proportional zu ξ, also

$$d\mathfrak{z} = \xi\, dv$$

wird, d. h.

$$(U' + \lambda_u\xi + \lambda\xi_u)\, du + (V' + \lambda_v\xi + \lambda\xi_v)\, dv = \xi\, dv.$$

Hieraus folgt, daß die drei Vektoren

$$U' + \lambda_u\xi + \lambda\xi_u,$$
$$V' + \lambda_v\xi + \lambda\xi_v,$$
$$\xi$$

oder, was dasselbe ist

$$U' + \lambda\xi_u, \quad V' + \lambda\xi_v, \quad \xi$$

komplanar sein müssen. Die Bedingung dafür

$$(U' + \lambda\xi_u,\ V' + \lambda\xi_v,\ \xi) = 0 \tag{19}$$

nimmt nach einigen Umformungen die einfache Form

$$\lambda^2 + 1 = 0 \tag{19a}$$

Digitized by Google

an, so daß die beiden Mäntel der Brennfläche durch die Gleichungen

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{\zeta}, \tag{20}$$

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{\zeta} \tag{21}$$

dargestellt werden. Sie sind nur dann reell, wenn $\mathfrak{\zeta}$ imaginär, also wenn der Affinbogen der einen erzeugenden Kurve reell, der der zweiten imaginär ist.

Die Schmiegungsstrahlenkongruenz besitzt dann und nur dann reelle Brennflächen, wenn die erzeugenden Kurven Torsionen mit entgegengesetzten Vorzeichen haben.

Ferner lassen die Gleichungen (20) und (21) erkennen, daß die Schmiegungsstrahlenfläche, deren Leitkurve $u =$ konst. (bezw. $v =$ konst.) ist, die beiden Brennflächen in Kurven berühren, die den konstanten Parameterwerten $\lambda = +i$ und $\lambda = -i$ entsprechen; diese Berührungskurven sind also nach Formel (10) Asymptotenlinien dieser Regelflächen. Wenn aber zwei Flächen sich längs einer Kurve berühren, die auf einer von ihnen Asymptotenlinie ist, so muß sie auch auf der zweiten Fläche Asymptotenlinie sein.

Die Schmiegungsstrahlenflächen der erzeugenden Kurven berühren beide Brennmäntel in Asymptotenlinien.

Da also auf den Brennflächen sich die Asymptotenlinien entsprechen, ist die Kongruenz eine W-Kongruenz, und da zudem das Stück der Kongruenzstrahlen zwischen den Brennflächen (20) und (21) von der Fläche $\mathfrak{x}$ halbiert wird, so ergibt sich folgender Sachverhalt:

Die Schmiegungsstrahlen einer Schubfläche $\mathfrak{x}$ bilden eine W-Kongruenz, deren Mittelfläche die Fläche $\mathfrak{x}$ selber ist, dabei entsprechen den Asymptotenlinien der Brennflächen die erzeugenden Kurven der Schubfläche.

Diese Brennflächen sind übrigens identisch mit den von Darboux entdeckten und von Blaschke so genannten Affinminimalflächen, wie auch ihre Gleichungen (20), (21) zeigen, die mit den üblichen übereinstimmen. Ihre aus den Formeln durch leichte Rechnung ableitbaren Eigenschaften lassen sich aus den eben gefundenen Sätzen ebenso leicht geometrisch entwickeln. Indessen soll an dieser Stelle nur der Sonderfall eingehender betrachtet werden, in dem die erzeugenden Kurven U und V zwei „paralleler Gewinden", d. h. Gewinden mit parallelen Durchmessern angehören.

5. Ist U eine Gewindekurve, so gehören die Asymptotenlinien jeder Fläche von Schmiegungsstrahlen von U ebenfalls Gewinden

Digitized by Google

an, und zwar solchen, deren Durchmesser denen des Gewindes von U parallel sind; insbesondere sind die Asymptotenlinien $\mathfrak{U}$ einer Affinminimalfläche, die einer durch U erzeugten Schubfläche zugeordnet sind, ebenfalls Kurven in parallelen Gewinden. Nun weiß man, daß die Asymptotenlinien eines beliebigen Konoids, in der Richtung der Leitgeraden (d. i. in der Durchmesserrichtung der Gewinde, denen die Asymptotenlinien angehören) auf eine beliebige Ebene projiziert, ähnliche und ähnlich liegende Projektionskurven erzeugen.

Liegen nun die Kurven U und V in parallelen Gewinden, so projiziert sich das Netz der Asymptotenkurven $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ auf den zugehörigen Affinminimalflächen in ein ebenes Kurvennetz $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, das dem Netz der Projektionskurven U_1, V_1 der Erzeugenden der Schubfläche $\mathfrak{x}$ in entsprechenden Punkten parallel zugeordnet ist. (Die Projektionsrichtung ist die Richtung des Gewindedurchmessers.) Da nun das Netz U_1, V_1 ein Translationsnetz ist, so ist $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ ein ebensolches.

Sind die Asymptotenlinien einer Affinminimalfläche Kurven in Gewinden mit parallelen Durchmessern, so ist ihre Projektion in der Durchmesserrichtung auf eine beliebige Ebene ein Translationsnetz.

6. Die Vermutung liegt nahe, daß für die zuletzt untersuchte Sonderklasse von Affinminimalflächen die Projektionsrichtung eine besondere Bedeutung besitzt. In der Tat erkennt man leicht, daß sie mit der Affinnormale zusammenfallen muß.

Eine der zahlreichen gleichwertigen Definitionen der Affinnormale einer Fläche ist die folgende: Man betrachte ein Viereck $PQRS$ auf der Fläche, dessen gegenüberliegende Seiten PQ und RS zwei Bogen der Asymptotenlinien v = konst., während PS und QR Bogen der Asymptotenlinien u = konst. sind, ziehe in P und Q die Tangenten $P\mathfrak{S}$ und $Q\mathfrak{R}$ an die Asymptotenlinien PS und QR, und lege durch $P\mathfrak{S}$ die Ebene parallel zu $Q\mathfrak{R}$; entsprechend ziehe man in P und S die Tangenten $P\mathfrak{Q}$ und $S\mathfrak{R}_1$ an die Asymptotenlinien PQ und SR, und lege die Ebene durch $P\mathfrak{Q}$ parallel zu $S\mathfrak{R}$. Läßt man dann Q und S mit P zusammenfallen, so ist die Grenzlage der Schnittlinie beider Ebenen die Affinnormale der Fläche im Punkte P.

Wir betrachten jetzt diejenigen Affinminimalflächen, die einer Schubfläche zugeordnet ist, bei der die erzeugenden Kurven U und V in Gewinden mit parallelen Durchmessern liegen. Ist U eine Gewindekurve, so entspricht ihr auf einer Brennfläche der Schmiegungskongruenz eine Asymptotenlinie $\mathfrak{U}$, die auch auf dem

Digitized by Google

Schmiegungsstrahlenkonoid der Kurve U Asymptotenlinie ist. Nun sind aber die Durchmesserebenen durch die Tangenten der krummen Asymptotenlinien eines Konoids in den Punkten derselben Erzeugenden der Fläche alle zu einander parallel, insbesondere ist auch die Durchmesserebene durch die Tangente von $\mathfrak{U}$ parallel zu der Durchmesserebene durch die Tangente von U. Verschiebt man nun die Kurve U längs einer Kurve V parallel bis in die Lage U^* auf der Schubfläche, so behält die Durchmesserebene durch die Tangente von U^* ihre Stellung bei. Der Kurve U^* entspricht jetzt ein anderes Berührungskonoid mit der Brennfläche, aber die Berührungskurve $\mathfrak{U}^*$ hat auf jeden Fall wieder eine Durchmesserebene, die parallel zu der von U^*, also auch der von U ist.

Daraus folgt, daß alle Asymptotenlinien $\mathfrak{U}$ im Schnitt mit einer festen Kurve $\mathfrak{V}$ Tangentenrichtungen haben, die einer festen Ebene parallel sind, derjenigen Durchmesserebene des Gewindes, dem U angehört, die durch die Tangente der Kurve U im Schnittpunkt mit der entsprechenden Kurve V bestimmt ist. (Dieser Satz gilt bekanntlich allgemein, auch wenn U und V keine Gewindekurven sind, für alle Affinminimalflächen. Er läßt sich aus der analytischen Darstellung ohne weiteres ablesen; geometrisch sieht man ihn am einfachsten ein, wenn man die Erzeugenden der Schubfläche durch Schmiegungsgewindekurven ersetzt.) Man erkennt daraus, daß bei dem Grenzübergang, der vorher zur Konstruktion der Affinnormale benutzt wurde, die Stellung der Ebene sich nicht ändert, sobald U und V Kurven irgendwelcher Gewinde sind.

Die Affinnormalen einer Affinminimalfläche, deren Asymptotenlinien Gewindekurven sind, ergeben sich als Schnittlinien der durch die Tangenten der Asymptotenlinien bestimmten Durchmesserebenen.

Sind die Durchmesser der Gewinde, denen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ angehören, parallel, so fällt die Schnittlinie in die den beiden Durchmesserebenen gemeinsame Richtung, d. h. in die Richtung des Durchmessers. Da nun diese Durchmesser allenthalben für die Kurven $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ dieselbe Richtung haben, sind diese Affinminimalflächen dadurch gekennzeichnet, daß ihre Affinnormalen alle zu einander parallel sind, sie sind also mit den von Blaschke so bezeichneten uneigentlichen Affinsphären identisch.

Die Flächen, die den Gegenstand der Untersuchung bildeten, sind also die uneigentlichen Affinsphären, und der Schefferssche Satz über diese Flächen läßt sich demnach folgendermaßen präzisieren:

Projiziert man die Asymptotenlinien einer uneigentlichen Affinsphäre in der Richtung ihrer Affinnormalen in eine beliebige

Digitized by Google

Ebene, so entsteht ein ebenes Schiebungsnetz; die Asymptotenlinien selbst sind Kurven in parallelen Gewinden.

Auf die rechnerische Herleitung dieser Ergebnisse, die im Anschluß an die Darstellung der Nr. 4 leicht in einer von der üblichen nicht wesentlich abweichenden Form durchgeführt werden kann und daher kein besonderes Interesse bietet, sei an dieser Stelle verzichtet.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXIX. JAHRGANG

1. STÜCK

INHALT:

	Seite
Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Reihen. Von **I. Schur**	3—13
Neue geometrische Deutung der Apolaritätsbeziehung zwischen zwei binären kubischen Formen. Von **E. A. Weiß**	14—17
Projektion der Kugel. Von **G. Scheffers**	18—21
Über einige Integraleigenschaften der Bessel'schen Funktionen und eine Anwendung derselben. Von **A. Korn**	22—32
259. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 30. Oktober 1929	1
260. Sitzung am 27. November 1929	1
261. Sitzung und außerordentliche Migliederversammlung am 18. Dezember 1929	2
262. Sitzung am 29. Januar 1930	2

1930

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

7) Alle Zuschriften, welche den Inhalt der Sitzungsberichte betreffen, sind zu richten an den derzeitigen Schriftleiter, Herrn **Prof. Dr. Ernst Jacobsthal, Berlin-Zehlendorf, Am Fischtal 2a.**

Mitteilungen:

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten entweder an den Schriftführer oder an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Obersekretär M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse und nicht an die Adresse des Schriftführers zu senden.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

259. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 30. Oktober 1929.

Vorsitzender: Herr Korn, während der Wahl des ersten Vorsitzenden Herr E. Jacobsthal. Anwesend: 36 Mitglieder und Gäste.

Zu Beginn der Sitzung teilt Herr Korn das Ableben des Mitgliedes G. Rückle mit. Die Anwesenden ehren das heimgegangene Mitglied durch Erheben von ihren Plätzen.

A) Geschäftlicher Teil:

1. Bericht des Kassenwartes und der Kassenprüfer. Die Entlastung des Kassenprüfers wird einstimmig beschlossen.

2. Neuwahl des Vorstandes und der Kassenprüfer. Die Zettelwahl des ersten Vorsitzenden ergibt die Wiederwahl von Herrn Korn. Die übrigen Herren werden durch Zuruf wiedergewählt: Herr E. Jacobsthal (2. Vorsitzender und Schriftführer), Herr P. B. Fischer (Kassenwart). Kassenprüfer sind wieder die Herren Singer und Zacharias.

3. Neuwahl zweier Mitglieder der Redaktionskommission. Es scheiden aus die Herren Reißner und Salkowski; dafür werden hineingewählt die Herren E. Landau und R. Rothe.

4. Herr Hamel erstattet einen Bericht über die Tagung des Mathematischen Reichsverbandes in Prag.

B) Wissenschaftlicher Teil:

Namens der Redaktionskommission legt Herr Salkowski eine Note des Herrn E. A. Weiß vor: Neue geometrische Deutung der Apolaritätsbeziehung zwischen zwei binären kubischen Formen.

Herr I. Schur: Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Reihen.

260. Sitzung am 27. November 1929.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 25 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr G. Scheffers: Projektion der Kugel.

Herr M. Sadowsky: Über das Möbiussche Band.

Digitized by Google

261. Sitzung und ausserordentliche Mitgliederversammlung am 18. Dezember 1929.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

A) Geschäftlicher Teil:

Der Vorstand stellte auf Anregung von Herrn Feigl folgenden Antrag: Der Jahresbeitrag von Mitgliedern, die sich noch nicht in einer festen Stellung befinden, kann durch den Vorstand auf besonderen Antrag auf drei Reichsmark herabgesetzt werden, wenn diese Mitglieder auf den Bezug der Sitzungsberichte der Gesellschaft verzichten.

Nach längerer Aussprache wurde der Antrag einstimmig angenommen.

B) Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr E. Hopf: Eine Bemerkung zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen.

Herr K. Hoecken: Synthetische Entwicklung der Raumgetriebe aus der Theorie der Freiheitsgrade. (Mit Vorführung von neuen Modellen aus der Reuleaux-Sammlung der Technischen Hochschule.)

262. Sitzung am 29. Januar 1930.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 26 Mitglieder und Gäste.

Zu Beginn der Sitzung teilt Herr Korn das Ableben zweier Mitglieder, der Herren A. Kneser und Study mit. Zu Ehren der Verstorbenen erheben sich die Anwesenden von ihren Plätzen.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr A. Fleck: Gleichungen zwischen Polygonalzahlen.

Herr A. Korn: Einige Integraleigenschaften der Bessel'schen Funktionen und eine Anwendung derselben.

Digitized by Google

Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Reihen [1]).

Von I. Schur.

Die folgenden Ausführungen knüpfen an zwei Arbeiten an, in denen ich mich mit Mittelbildungen in der Reihentheorie beschäftigt habe: Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Ann. 74 (1913), S. 447—458, und Zur Theorie der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Zeitschrift 31 (1929), S. 391—407. Diese Arbeiten werden im folgenden kurz mit M. I und M. II zitiert.

Ich verstehe wie in M. II unter einer Mittelfolge mit dem Quotientenlimes a eine Folge $p_1, p_2, \ldots$ von Null verschiedener Zahlen, für die der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{np_n} = a$$

existiert und die Quotienten

$$\frac{|p_1|+|p_2|+\cdots+|p_n|}{n|p_n|} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

nach oben beschränkt sind. Bezeichnet man mit

$$h_n^{(k)} \text{ und } c_n^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, \; n = 1, 2, \ldots)$$

die zu einer gegebenen Folge $x_1, x_2, \ldots$ gehörenden Hölderschen und Cesàroschen Mittelwerte, so gilt folgende Erweiterung des bekannten Knopp-Schneeschen Äquivalenzsatzes:

I. *Dann und nur dann haben die Zahlen* $p_1, p_2, \ldots$ $(p_n \neq 0)$ *die Eigenschaft, daß für jede Folge* x_n *und für jedes* $k = 1, 2, \ldots$ *die beiden Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n^{(k)}}{p_n} = l_k, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n^{(k)}}{p_n} = l_k'$$

entweder, gleichzeitig existieren oder nicht existieren, wenn die p_n *eine Mittelfolge bilden. Ist* a *der Quotientenlimes dieser Mittelfolge und haben die Limites* l_k *und* l_k' *einen Sinn, so besteht zwischen ihnen die Beziehung*

$$(1) \qquad l_k = \frac{(1+a)(1+2a)\ldots(1+(k-1)a)}{k!} \cdot l_k'. \qquad (k > 1)$$

1) Vorgetragen in der 259. Sitzung am 30. Oktober 1929.

Digitized by Google

Bei dem in M. II für diesen Satz angegebenen Beweise lag es mir weniger daran, möglichst große Kürze zu erzielen als den Zusammenhang zwischen dem Satz und den allgemeinen Eigenschaften der Mittelfolgen auf breiterer Basis darzustellen. Eine besonders wichtige Rolle spielten hierbei die Sätze:

II. *Der zu einer Mittelfolge gehörende Quotientenlimes a ist entweder gleich Null oder eine Zahl mit positivem Realteil.*

III. *Sind p_n und q_n zwei Mittelfolgen mit den Quotientenlimites a und b, so bilden die Zahlen np_nq_n eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes $\frac{ab}{a+b}$. Auszuschließen ist der Fall $a = b = 0$.*

Der Satz II setzt in Evidenz, warum der in (1) auftretende Zahlenfaktor nicht den Wert Null haben kann, der Satz III gestattet einen allgemeinen Hilfssatz (M. II, Satz VI) abzuleiten, aus dem der Satz I ohne Mühe folgt. Eine einfache Analyse lehrt aber, daß es zum Beweis des Satzes I genügt, nur einen geringen Teil der in II und III enthaltenen Aussagen zu kennen:

IV. *Bilden die Zahlen p_n eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes a, so ist $a \neq -1$ und die Zahlen np_n stellen eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes $\frac{a}{a+1}$ dar.* Für diesen Satz werde ich in § 1 einen kurzen, direkten Beweis angeben und in § 2 zeigen[2]), wie man hieraus den Satz I sehr einfach folgern kann. Zugleich wird sich eine nicht unwesentliche Vereinfachung des von mir in M. I veröffentlichten Beweises für den Knopp-Schneeschen Äquivalenzsatz ergeben.

Im letzten Paragraphen behandle ich einige Fragen, auf die man beim Studium der Mittelfolgen geführt wird. Es ergeben sich hierbei weitere, nicht uninteressante Ergänzungen zum Äquivalenzsatz.

§ 1.
Beweis des Satzes IV. Folgerungen.

Von den in M. II, § 1 aufgezählten Eigenschaften der Mittelfolgen brauche ich nur das Einfachste, was dort mit wenigen Worten bewiesen werden konnte.

1. Für jede Mittelfolge p_n ist $\lim_{n\to\infty} n|p_n| = \infty$.

2. Dann und nur dann stellt die lineare Transformation

$$v_n = \frac{p_1u_1 + p_2u_2 + \cdots + p_nu_n}{np_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine konvergenzerhaltende Operation dar, wenn die p_n eine Mittel-

2) § 2 ist erst bei der Niederschrift im Dezember 1929 hinzugekommen.

Digitized by Google

folge bilden. Ist a der zugehörige Quotientenlimes, so folgt aus $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ stets $\lim_{n\to\infty} v_n = au$.

3. Bilden die Zahlen p_n eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes a, so gilt dasselbe für jede Folge q_n, für welche die Quotienten $\frac{q_n}{p_n}$ einem von Null verschiedenen Grenzwerte zustreben.

Um nun Satz IV zu beweisen, schließe man folgendermaßen. Aus

$$\frac{|p_1|+|p_2|+\cdots+|p_n|}{n|p_n|} < M$$

folgt auch

$$(2)\qquad \frac{|p_1|+2|p_2|+\cdots+n|p_n|}{n\,.\,n|p_n|} \leqq \frac{n(|p_1|+|p_2|+\cdots+|p_n|)}{n\,.\,n|p_n|} < M.$$

In Verbindung mit $\lim_{n\to\infty} n|p_n| = \infty$ ergibt sich schon hieraus auf Grund des bekannten Toeplitzschen Kriteriums (vgl. M. II, Einleitung), daß für jede Nullfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ auch die Ausdrücke

$$\eta_n = \frac{p_1\varepsilon_1+2p_2\varepsilon_2+\cdots+np_n\varepsilon_n}{n^2p_n} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

eine Nullfolge bilden.

Es sei nun

$$(3)\qquad s_n = p_1+p_2+\cdots+p_n = (a+\varepsilon_n)np_n.$$

Nach Voraussetzung wird dann $\lim \varepsilon_n = 0$. Aus (3) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu = np_1+(n-1)p_2+\cdots+p_n = a\sum_{\nu=1}^{n}\nu p_\nu + \sum_{\nu=1}^{n}\nu p_\nu\varepsilon_\nu.$$

Die links stehende Summe läßt sich aber auch in der Form

$$(n+1)s_n - \sum_{\nu=1}^{n}\nu p_\nu$$

schreiben. Wir erhalten demnach

$$(4)\qquad (a+1)\frac{\sum_{\nu=1}^{n}\nu p_\nu}{n^2p_n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{s_n}{np_n} - \frac{\sum_{\nu=1}^{n}\nu p_\nu\varepsilon_\nu}{n^2p_n}.$$

Der rechts stehende Ausdruck konvergiert auf Grund des oben Gesagten gegen a. Wäre nun $a = -1$, so würde sich aus (4)

$$0 = a \neq -1$$

ergeben. Daher ist $a+1$ von Null verschieden und folglich liefert (4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1+2p_2+\cdots+np_n}{n^2p_n} = \frac{a}{a+1}.$$

Digitized by Google

In Verbindung mit (2) ergibt dies den Satz IV.

Aus diesem Satz folgt ohne Mühe:

V. *Bilden die Zahlen p_n eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes a und ist h eine positive ganze Zahl, so ist $a \neq -\frac{1}{h}$ und die Zahlen*

$$p_n^{(h)} = n^h p_n$$

bilden eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes

$$a^{(h)} = \frac{a}{ha+1}.$$

Denn weiß man schon, daß dies für einen Wert von $h = 1, 2, \ldots$ richtig ist, so folgt aus IV, daß

$$\frac{a}{ha+1} \neq -1, \quad \text{d. h. } a \neq -\frac{1}{h+1}$$

wird, und daß die Zahlen

$$p_n^{(h+1)} = n \cdot p_n^{(h)}$$

eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes

$$\frac{\frac{a}{ha+1}}{\frac{a}{ha+1}+1} = \frac{a}{(h+1)a+1}$$

bilden.

Beachtet man, daß für $k = 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n+k-2}{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}$$

ist, so ergibt sich wegen 3., daß zugleich mit den Zahlen p_n auch die Zahlen

$$\binom{n+k-2}{k-1} p_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine Mittelfolge repräsentieren. Hieraus folgt aber wegen 2. in Verbindung mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \binom{n+k-2}{k-1}}{\binom{n+k-1}{k}} = k$$

Digitized by Google

VI. *Bilden die Zahlen p_n eine Mittelfolge, so stellt die lineare Transformation*

$$v_n = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \binom{\nu+k-2}{k-1} p_\nu u_\nu}{\binom{n+k-1}{k} p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine konvergenzerhaltende Operation dar.

§ 2.
Beweis des Satzes I.

Der besseren Übersicht wegen zeige ich zunächst, wie sich der Knopp-Schneesche Äquivalenzsatz (Fall $p_n = 1$) am einfachsten beweisen läßt.

Bedeutet M die gewöhnliche Mittelbildung

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

so wird in den üblichen Bezeichnungen

$$h_n^{(k)} = M^k(x_n).$$

Setzt man

$$S_k = \frac{1}{k} E + \frac{k-1}{k} M \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

und versteht unter C_k die Operation, die den Übergang von der Folge x_n zu den Cesàroschen Mittelwerten $c_n^{(k)}$ bewirkt, so besteht (vgl. M. I, § 2) die Beziehung

$$M C_{k-1} = S_k C_k. \tag{5}$$

Hieraus folgt wegen $C_1 = M$

$$M^k = S_2 S_3 \ldots S_k C_k. \tag{6}$$

Dies liefert unmittelbar die Tatsache, daß aus $\lim c_n^{(k)} = s$ auch $\lim h_n^{(k)} = s$ folgt.

Um das Umgekehrte zu beweisen, hat man zu zeigen, daß für jedes k auch S_k^{-1} (ebenso wie S_k) eine konvergenzerhaltende Operation darstellt. Dies habe ich in M. I aus dem allgemeineren Satz gefolgert, der besagt, daß für jede Zahl α mit positivem Realteil die Operation

$$S = \alpha E + (1-\alpha) M$$

„reversibel" ist. Der Beweis erforderte eine etwas umständliche Rechnung. Es war mir entgangen, daß man für $\alpha = \frac{1}{k}$ die Re-

Digitized by Google

versibilität der Operation S_k unmittelbar aus den Formeln (5) und (6) folgern kann.

Aus (6) ergibt sich nämlich ohne Weiteres (was in M. I, § 4, auch ausdrücklich hervorgehoben wird), daß C_k (und also auch C_{k-1}) mit M vertauschbar ist. Die Formel (5) liefert daher

$$C_{k-1} M = S_k C_k = \frac{1}{k} \cdot C_k + \frac{k-1}{k} C_k M \tag{7}$$

oder auch

$$C_k = k \, . \, C_{k-1} M + (1-k) C_k M.$$

Setzt man

$$C_k C_{k-1}^{-1} = U_k,$$

so wird also

$$C_k = (k E + (1-k) U_k) C_{k-1} M.$$

Vergleicht man dies mit (7), so erhält man

$$S_k^{-1} = k E + (1-k) U_k. \tag{8}$$

Diese Relation setzt aber in Evidenz, daß S_k^{-1} eine konvergenzerhaltende Operation ist. Denn U_k bedeutet nur den einfachen Prozeß

$$v_n = \frac{1}{\binom{n+k-1}{k}} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{\nu+k-2}{k-1} u_\nu, \tag{9}$$

dem man unmittelbar ansieht, daß er eine konvergenzerhaltende Operation darstellt (das bedeutet nur die längst bekannte Tatsache, daß aus $\lim c_n^{(k-1)} = s$ auch $\lim c_n^{(k)} = s$ folgt)[3].

Um nun zu dem allgemeineren Satz I zu gelangen, schließt man folgendermaßen. Wie in M. II, § 2, verstehe man, wenn eine Folge von Null verschiedener Zahlen p_n gegeben ist und eine lineare Transformation

$$v_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu} u_\nu \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{A}$$

3) Auf diese einfache Schlußweise bin ich erst durch die Note des Herrn A. F. Andersen, Bemerkung zum Beweis des Herrn Knopp für die Äquivalenz der Cesàro- und Hölder-Summabilität, Math. Zeitschrift, Bd. 28 (1928), S. 356—359 geführt worden. Herr Andersen zitiert meine Arbeit, beachtet aber nicht, daß die von ihm abgeleiteten Relationen mit den von mir benutzten im wesentlichen identisch sind. Der Kernpunkt des von ihm erzielten Fortschritts tritt, wie ich glaube, am deutlichsten hervor, wenn man seinen Ansatz, wie das hier geschieht, mit meiner Beweisanordnung in Verbindung bringt und das Hauptgewicht auf die neuhinzukommende Formel (8) legt.

Digitized by Google

vorliegt, unter A^* die Operation

$$v_n = \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu} p_\nu u_\nu. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Es wird dann einfach $A^* = P^{-1} A P$, wobei P den Prozeß $v_n = p_n u_n$ bedeutet. Die lineare Transformation

$$v_n = \frac{p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_n u_n}{n p_n}$$

ist in diesen Bezeichnungen M^* zu nennen, ferner ist

$$S_k^* = \frac{1}{k} E + \frac{k-1}{k} M^*$$

zu setzen. Aus (6) folgt dann

$$M^{*k} = S_2^* S_3^* \ldots S_k^* C_k^*,$$

und der Beweis des Satzes I erfordert wie in M. II nur noch den Nachweis, daß S_k^* und S_k^{*-1} für jede Mittelfolge konvergenzerhaltende Operationen sind. Für S_k^* liegt das auf der Hand, für S_k^{*-1} schließt man so: Aus (8) folgt

$$S_k^{*-1} = k E + (1-k) U_k^*,$$

und man braucht nur zu wissen, daß die aus der linearen Transformation (9) hervorgehende Operation U_k^* konvergenzerhaltend ist. Daß dies der Fall ist, bildet aber den Inhalt des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes VI.

§ 3.

Über eine spezielle Klasse von Zahlenfolgen.

In M. II, § 4 habe ich bewiesen, daß man die allgemeinste Mittelfolge p_n mit von Null verschiedenem Quotientenlimes a erhält, indem man

$$p_n = \frac{c_n}{n} e^{\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}}$$

setzt und verlangt, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} c_n = c, \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a'$$

existieren und den Bedingungen

$$c \neq 0, \quad \Re(a') > 0$$

genügen sollen (es wird dann $a a' = 1$). Dafür kann man aber

Digitized by Google

offenbar auch etwas einfacher sagen: Es muß p_n die Form

$$p_n = e^{u_n + \frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} + \cdots + \frac{v_n}{n}}$$

haben, wobei die Folgen $u_1, u_2, \cdots$ und $v_1, v_2, \cdots$ konvergieren sollen und der Realteil von $\lim v_n$ größer als -1 sein soll.

Dies führt auf das Studium der Folgen

$$w_n = u_n + \frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} + \cdots + \frac{v_n}{n} \tag{10}$$

mit der Forderung, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v$$

existieren sollen. Eine solche Folge möge etwa eine **Folge von logarithmischem Typus** genannt werden.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß man diese Folgen in ähnlicher Weise, wie das für die Mittelfolgen p_n der Fall war, durch einfache Eigenschaften gewisser Mittelbildungen charakterisieren kann.

VII. *Eine Zahlenfolge w_n ist dann und nur dann von logarithmischem Typus, wenn die Folge der Zahlen*

$$w_n' = w_n - M(w_n) = w_n - \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}{n}$$

konvergent ist. Es wird hierbei

$$\lim_{n\to\infty} w_n' = \lim_{n\to\infty} v_n.$$

1. Lassen sich die w_n auf die Form (10) mit konvergenten u_n und v_n bringen, so wird

$$\begin{aligned} M(w_n) &= M(u_n) + \frac{1}{n}\left[\frac{n v_1}{1} + \frac{(n-1)v_2}{2} + \cdots + \frac{v_n}{n}\right] \\ &= M(u_n) + \frac{n+1}{n}\left[\frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} + \cdots + \frac{v_n}{n}\right] - M(v_n), \end{aligned}$$

also

$$w_n' = u_n - M(u_n) + M(v_n) - \frac{1}{n}\left[\frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} + \cdots + \frac{v_n}{n}\right].$$

Hierbei wird

$$\lim_{n\to\infty}[u_n - M(u_n)] = u - u = 0, \quad \lim_{n\to\infty} M(v_n) = v,$$

und das noch hinzukommende Glied strebt offenbar wegen der Konvergenz der v_n dem Grenzwert 0 zu. Es wird also in der Tat $\lim w_n' = v$.

Digitized by Google

Weiß man umgekehrt, daß $\lim w_n' = w'$ existiert, so wird $w_1' = 0$ und für $n > 1$

$$n w_n' - (n-1) w_{n-1}' = n w_n - (n-1) w_{n-1} - w_n = (n-1)(w_n - w_{n-1}).$$

Das liefert

$$w_n - w_{n-1} = w_n' - w_{n-1}' + \frac{w_n'}{n-1} = w_n' - w_{n-1}' + \frac{w_n'}{(n-1)n} + \frac{w_n'}{n},$$

und hieraus folgt durch Addition für w_n eine Darstellung der Form (10) mit

$$u_n = w_1 + w_n' + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{w_\nu'}{(\nu-1)\nu}, \quad v_n = w_n'.$$

Diese Zahlenfolgen sind aber konvergent, wenn $\lim w_n'$ existiert.

Es ist nun bemerkenswert, daß man bei dieser Betrachtungsweise nichts Neues erhält, wenn man anstatt der gewöhnlichen Mittelbildung M die Hölderschen oder Cesàroschen Mittelbildungen höherer Ordnung benutzt:

VIII. *Eine Zahlenfolge w_n ist dann und nur dann von logarithmischem Typus, wenn für irgendeine positive ganze Zahl k einer der Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty} [w_n - M^k(w_n)] = L_k$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} [w_n - C_k(w_n)] = L_k'$$

existiert.

Der Beweis beruht auf dem Hilfsatz:

IX. *Ist*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m = c_0 \prod_{\mu=1}^{m} (1 - \omega_\mu x) \qquad (c_0 \neq 0)$$

und sind die Realteile der Größen ω_μ sämtlich kleiner als 1, so ist, wenn

$$T_k = c_0 E + c_1 M + \cdots + c_m M^m$$

gesetzt wird, neben T_k auch T_k^{-1} eine konvergenzerhaltende Operation[4]).

Dies folgt unmittelbar aus dem auf S. 7 erwähnten Satz über die Reversibilität der Operation $\alpha E + (1-\alpha) M$ für $\Re(\alpha) > 0$. Denn es wird

$$T_k = c_0 \prod_{\mu=1}^{m} (E - \omega_\mu M),$$

4) Vgl. hierzu W. A. Hurwitz und L. L. Silverman, American M. S. Trans. 18 (1917), S. 1—20.

Digitized by Google

und jeder Faktor läßt sich in der Form

$$E-\omega_\mu M = (1-\omega_\mu)[\alpha_\mu E+(1-\alpha_\mu)M]$$

schreiben, wobei

$$\alpha_\mu = \frac{1}{1-\omega_\mu}$$

einen positiven Realteil hat.

Der Satz VIII besagt nun in Verbindung mit VII nur, daß die Grenzwerte L_k und L_k' dann und nur dann existieren, wenn der Grenzwert L_1 einen Sinn hat, daß also die Operationen $E-M^k$ und $E-C_k$ der Operation $E-M$ äquivalent sind. Für $E-M^k$ ist das sehr leicht zu sehen. Denn es wird

$$E-M^k = T_k(E-M) \tag{11}$$

mit

$$T_k = E+M+\cdots+M^{k-1} = \prod'(E-\varrho M), \tag{12}$$

wo ϱ alle von 1 verschiedenen k-ten Einheitswurzeln durchläuft. Der Realteil einer solchen Zahl ϱ ist aber gewiß kleiner als 1.

Um das Analoge für die Operation $E-C_k$ zu beweisen, gehe man so vor. Setzt man wie früher

$$S_k = \frac{1}{k}E+\frac{k-1}{k}M,$$

so wird

$$M^k = P_k C_k \text{ mit } P_k = S_2 S_3 \ldots S_k,$$

also

$$P_k(E-C_k) = P_k-M^k.$$

Führt man die ganze rationale Funktion

$$f_k(x) = \frac{1}{1-x}\left[\frac{(1+x)(1+2x)\ldots(1+(k-1)x)}{k!}-x^k\right] \tag{13}$$

ein und setzt

$$F_k = f_k(M),$$

so wird

$$P_k-M^k = F_k(E-M),$$

also auch

$$P_k(E-C_k) = F_k(E-M). \tag{14}$$

Da P_k eine reversible Operation ist, haben wir nur noch zu zeigen, daß neben F_k auch F_k^{-1} eine konvergenzerhaltende Operation ist. Hierzu genügt es zu wissen, daß wenn

Digitized by Google

(15) $$f_k(x) = \frac{1}{k!}\prod_{\mu=1}^{k-1}(1-\omega_\mu x)$$

gesetzt wird, die Realteile der ω_μ sämtlich kleiner als 1 sind.

Dies erkennt man folgendermaßen. Man ersetze in (15) x durch $\frac{1}{y}$ und multipliziere mit y^{k-1}. Wegen (13) erhält man

$$\frac{1}{y-1}\left[\frac{y(y+1)\dots(y+k-1)}{k!}-1\right] = \prod_{\mu=1}^{k-1}(y-\omega_\mu).$$

Der links stehende Ausdruck konvergiert für $y \to 1$ gegen einen von Null verschiedenen Wert. Daher sind die ω_μ nur die von 1 verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{y(y+1)\dots(y+k-1)}{k!} = 1.$$

Setzt man $y = 1+\alpha+i\beta$, so ergibt sich insbesondere

$$\prod_{\nu=1}^{k}\left|\frac{\nu+\alpha+i\beta}{\nu}\right| = \prod_{\nu=1}^{k}\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^2+\frac{\beta^2}{\nu^2}} = 1.$$

Diese Gleichung kann aber für $\alpha \geqq 0$ nur dann bestehen, wenn $\alpha = \beta = 0$, d. h. $y = 1$ wird. Die Realteile der ω_μ sind daher in der Tat kleiner als 1.

Damit ist der Satz VIII vollständig bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn der Grenzwert L_1 existiert, die Grenzwerte L_k und L_k' aus den Formeln

$$L_k = kL_1, \quad L_k' = \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)L_1$$

zu berechnen sind. Dies ergibt sich ohne Mühe auf Grund der Gleichungen (11), (12), (13) und (14) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß

$$f_k(1) = -\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{k-1}{k}-k\right] = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}$$

wird.

Digitized by Google

Neue geometrische Deutung der Apolaritätsbeziehung zwischen zwei binären kubischen Formen[1]).

Von E. A. Weiss in Bonn.

Wählt man eine rationale kubische Raumkurve zum Träger eines binären Gebietes, so kann man eine binäre kubische Form bekanntlich[2]) entweder auf die Ebene abbilden, die die Nullstellen der Form aus der Kurve ausschneidet, oder auf den Punkt, dessen Schmiegungsebenen in diesen Nullstellen berühren. Punkt und Ebene sind dann inzident und entsprechen sich in dem mit der Raumkurve verbundenen (regulären) Nullsystem. Sind zwei Formen $(\alpha\tau)^3$ und $(\alpha'\tau)^3$ apolar — verschwindet ihre bilineare Invariante $(\alpha\alpha')^3$ —, so liegt der Bildpunkt der einen auf der Bildebene der anderen.

Im Folgenden möchte ich eine neue geometrische Deutung der Apolaritätsbeziehung angeben.

Im $\mathfrak{R}_3$ können zwei Punktetripel $1, 2, 3$ und $1', 2', 3'$ allgemeiner Lage (keine vier Punkte gehören einer Ebene an) nicht perspektiv liegen. Aber man kann nach dem *Ort der Punkte fragen, von denen aus die beiden Dreiecke perspektiv erscheinen.* Wird die Art der Perspektivität, etwa $\binom{1\ 2\ 3}{1'2'3'}$-Perspektivität, vorgeschrieben, so ist dieser Ort eine (reguläre) Fläche 2. Ordn., welche durch die drei Erzeugenden $11', 22', 33'$ bestimmt wird. Den sechs möglichen Arten der Perspektivität entsprechen so sechs Flächen 2. Ordn., die wir wie folgt bezeichnen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &f_0 : \binom{1\ 2\ 3}{1'2'3'},\ f_\alpha : \binom{1\ 2\ 3}{2'3'1'},\ f_\beta : \binom{1\ 2\ 3}{3'1'2'},\\ &f_{11} : \binom{1\ 2\ 3}{1'3'2'},\ f_{22} : \binom{1\ 2\ 3}{3'2'1'},\ f_{33} : \binom{1\ 2\ 3}{2'1'3'}. \end{aligned}$$

In den drei ersten Fällen sprechen wir von zyklischer, in den drei anderen Fällen von azyklischer Perspektivität. Diese Unterscheidung hängt natürlich von der Bezeichnung der beiden Dreiecke ab.

1) Vorgelegt in der 259. Sitzung am 30. Oktober 1929.

2) Vgl. z. B. W. Fr. Meyer, Apolarität und Rationale Kurven, Tübingen (1883).

Digitized by Google

Aus der Theorie der mehrfach-perspektiven Dreiecke in der Ebene [3]) ist nun bekannt, daß aus der zweifach-zyklisch (-azyklisch)-perspektiven Lage zweier Dreiecke die dreifach-zyklisch (-azyklisch)-perspektive Lage folgt. Die drei Flächen f_0, f_α, f_β und ebenso die Flächen f_{11}, f_{22}, f_{33} gehören also je einem Büschel an:

I. Sind 1, 2, 3 und 1′, 2′, 3′ zweimal drei Raumpunkte allgemeiner Lage, so gehören die Flächen 2. Ordn. durch die Geraden:

$$11', 22', 33'; \quad 12', 23', 31': \quad 13', 21', 32';$$

und

$$11', 23', 32'; \quad 22', 31', 13'; \quad 33', 12', 21'$$

je einem Büschel an. Jedes dieser Büschel bestimmt als Basiskurve eine Raumkurve 4. Ordn.: Ort der Punkte, von denen aus die beiden Punktetripel als dreimal (zyklisch oder azyklisch) perspektive Dreiecke erscheinen [4]).

Jede der beiden Raumkurven schneidet jede Fläche der anderen in je zwei Punkten, die zusammen mit den sechs Ausgangspunkten ein Oktupel assoziierter Punkte bilden. Also:

II. Es gibt $6 \cdot 2 = 12$ Punkte, von denen aus zweimal drei Raumpunkte allgemeiner Lage als vierfach-perspektive (dreimal zyklisch- und einmal azyklisch- oder dreimal azyklisch- und einmal zyklisch-perspektive) Dreiecke erscheinen.

Sind diese 12 Perspektivitätszentren voneinander verschieden, so gibt es keinen Punkt, von dem aus die Punkte als zwei sechsfach perspektive Dreiecke erscheinen. Soll ein derartiger Punkt existieren, so müssen die Punkte einer Bedingung genügen, die jetzt abgeleitet werden soll.

Wenn die beiden Raumkurven sich außerhalb der sechs vorgegebenen Punkte in einem und also dann gleich in zwei Punkten schneiden, so gehören die sechs Flächen (1) einem Bündel an. Setzt man nun:

(2) $f_1 = (12'3'x)(1'23x), \quad f_2 = (23'1'x)(2'31x), \quad f_3 = (31'2'x)(3'12x),$

so läßt sich jede Fläche 2. Ordn. des durch die sechs vorgegebenen Punkte bestimmten Gebüsches aus diesen drei Ebenenpaaren und

3) I. Rosanes, Über Dreiecke in perspektiver Lage. H. Schröter, Über perspektivisch liegende Dreiecke. Math. Ann. 2. (1870).

4) A. Harnack, Über die Darstellung der Raumkurve vierter Ordn.... durch doppeltperiodische Funktionen. Math. Ann. 12 (1877) S. 70. Anm. Synthetischer Beweis bei H. Schröter, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve 4. Ordn. 1. Species. Leipzig (1890) S. 17.

Digitized by Google

der Fläche f_0:

$$(3)\quad \begin{matrix} +(122'x)(1'33'x)+(233'x)(2'11'x)+(311'x)(3'22'x) \\ -(133'x)(1'22'x)-(211'x)(2'33'x)-(322'x)(3'11'x) \end{matrix} = 0$$

linear zusammensetzen:

$$(4)\quad u_0 f_0 + u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 = 0.$$

Zugleich wird durch (4) jede Fläche u des Gebüsches auf die Ebene u eines Bildraumes abgebildet. In dieser Abbildung entsprechen den beiden Raumkurven 4. Ordn. die Geraden mit den Plückerschen Koordinaten:

$$(5)\quad \begin{matrix} 1:1:1: & 0 & : & 0 & : & 0 \\ 0:0:0:(22'33') & \begin{pmatrix}11'23'\\11'32'\end{pmatrix} & : & (33'11')\begin{pmatrix}22'31'\\22'13'\end{pmatrix} & : & (11'22')\begin{pmatrix}33'12'\\33'21'\end{pmatrix}. \end{matrix}$$

Die Inzidenzbedingung für diese beiden Geraden liefert die gesuchte Beziehung:

$$(6)\quad \boxed{(22'33')\begin{pmatrix}11'23'\\11'32'\end{pmatrix}+(33'11')\begin{pmatrix}22'31'\\22'13'\end{pmatrix}+(11'22')\begin{pmatrix}33'12'\\33'21'\end{pmatrix} = 0.}$$

Durch die sechs Raumpunkte läuft nun eine (rationale) kubische Raumkurve. Um die quaternäre Bedingung (6) in eine binäre Beziehung zwischen den Parametern der sechs Punkte auf dieser Kurve zu verwandeln, haben wir[5])

$$(7)\quad (abcd) = (ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)$$

zu setzen, wobei wir — ohne eine Verwechslung befürchten zu müssen — den binären Parameter des Punktes a mit $a_1 : a_2$ und die aus zwei binären Parametern gebildete zweireihige Determinante mit:

$$(8)\quad (ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

bezeichnet haben. Führen wir die Substitution (7) in (6) aus und spalten wir den nach Voraussetzung von Null verschiedenen Faktor:

$$(9)\quad (11')(22')(33')\begin{matrix}(23) & (31) & (12) & (23')(31')(12') \\ (2'3') & (3'1') & (1'2') & (32')(13')(21')\end{matrix}$$

ab, so erhalten wir die Bedingung in der binären Gestalt:

$$(10)\quad \boxed{(11')(23')(2'3)+(22')(31')(3'1)+(33')(12')(1'2) = 0.}$$

5) F. Lindemann, Über die Darstellung binärer Formen und ihrer Covarianten durch geometrische Gebilde im Raume. Math. Ann. 23 (1884) S. 138, (48).

Digitized by Google

Denken wir uns hierin endlich die beiden Punktetripel als Nullstellen der kubischen Formen:

$$(11) \qquad (\alpha\tau)^3 = (1\tau)(2\tau)(3\tau); \quad (\alpha'\tau)^3 = (1'\tau)(2'\tau)(3'\tau),$$

so nimmt (10) die Gestalt:

$$(12) \qquad \boxed{(\alpha\alpha')^3 = 0}$$

an:

III. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zweimal drei Raumpunkte allgemeiner Lage von zwei Punkten (die dann mit ihnen ein Oktupel assoziierter Punkte bilden) als sechsfach perspektive Dreiecke erscheinen, besteht darin, daß die beiden Punktetripel auf der durch sie bestimmten kubischen Raumkurve apolar sind.*

Digitized by Google

Projektion der Kugel[1]).

Von Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

Da die Kugel ein durchaus metrisch bedingtes Gebilde ist, pflegt man sie in senkrechter Projektion darzustellen. Vor der allgemeinen oder schiefen Parallelprojektion der Kugel scheint man eine gewisse Scheu zu haben. Man glaubt wohl, es sei schwierig, mittels allgemeiner Parallelprojektion solche Aufgaben zu lösen, die die Geometrie auf der Kugel betreffen. Aber mittels einer ganz einfachen und naheliegenden Bemerkung kann man jede derartige Aufgabe zurückführen auf dieselbe Aufgabe in senkrechter Projektion. In der Tat, wenn die Kugel in beliebiger Richtung auf eine Tafel T projiziert werden soll, denke man sich eine zweite Ebene E senkrecht zur Projektionsrichtung. Ist nun P ein Punkt auf der Kugel, so trifft sein projizierender Strahl die Tafel T im Bildpunkte $\mathfrak{P}$ und die Ebene E in einem Punkte P'. Da der Strahl $\mathfrak{P}P'$ zur Ebene E senkrecht ist, entsteht nicht nur auf der Tafel T eine allgemeine Parallelprojektion der Kugel, sondern auch auf der Ebene E die senkrechte Projektion der Kugel, und beide Bilder sind vermöge der Strahlen $\mathfrak{P}P'$ affin aufeinander bezogen. Also: *Wenn man eine Aufgabe über die Geometrie auf der Kugel in senkrechter Projektion gelöst hat, ergibt sich ihre Lösung in beliebiger Parallelprojektion einfach dadurch, daß man die gefundene Lösung affin abändert.*

Man muß dabei beachten, daß der Umriß des Kugelbildes in allgemeiner Parallelprojektion eine Ellipse ist, deren Nebenachse dieselbe Länge wie der Kugeldurchmesser hat. Weil der Kugeldurchmesser nicht gleich Null und die Projektionsrichtung nicht zur Tafel parallel sein soll, artet die Umrißellipse niemals in eine Strecke aus. Die Großkreise der Kugel werden abgebildet als diejenigen der Umrißellipse eingeschriebenen Ellipsen, die mit der Umrißellipse einen Durchmesser gemein haben. Auch muß man daran denken, daß jede Ellipse vermöge Affinität in eine Ellipse übergeht, jedes konjugierte Durchmesserpaar in ein ebensolches. Kommen bei der Lösung einer Kugelaufgabe in senkrechter Projektion rechtwinklige Kreisdurchmesser vor, so treten daher an

1) Vorgetragen in der 260. Sitzung am 27. November 1929.

Digitized by Google

ihre Stelle bei der Lösung in allgemeiner Parallelprojektion konjugierte Ellipsendurchmesser. Am bequemsten ist es, die Kugelmitte M auf der Tafel selbst anzunehmen, so daß die Kugel zur Hälfte über der Tafel liegt. Das ist gestattet, weil sich das Bild nicht ändert, wenn man die Kugel in der Projektionsrichtung verschiebt.

Das immerhin ziemlich langweilige Verfahren, die Lösung einer Kugelaufgabe in allgemeiner Parallelprojektion aus der Lösung in senkrechter Projektion mittels Affinität abzuleiten, kann man häufig durch praktische Bemerkungen abkürzen. Dies will ich an einem Beispiel erläutern.

Die einfache Aufgabe werde gestellt: *In allgemeiner Parallelprojektion den Äquator a und die Nord-Süd-Achse NS der als Globus aufgefaßten Kugel zu zeichnen.* Zunächst erinnern wir uns an das Verfahren in senkrechter Projektion. Hierbei ist der Umriß ein Großkreis u mit der Mitte M und das Bild des Äquators a irgendeine Ellipse a', die einen Durchmesser AB von u als Hauptachse hat, siehe Fig. 1. Die Nebenachse $C'D'$ von a' darf beliebig lang angenommen werden. Um dann die Projektionen der Pole N und S zu finden, legt man die projizierende Ebene des steilsten Äquatordurchmessers CD in die Tafel um. Die Spurgerade dieser Ebene ist der zu AB senkrechte Durchmesser UV des Umrisses u. Vermöge des Umlegens ergeben sich aus C und D die Punkte (C) und (D) des Umrisses u auf den in C' und D' auf UV nach verschiedenen Seiten hin errichteten Loten. Nun dreht man den Durchmesser $(C)(D)$ um M in die senkrechte Lage $(N)(S)$. Die Fußpunkte der Lote von (N) und (S) auf UV sind dann die gesuchten Projektionen N' und S' der Pole.

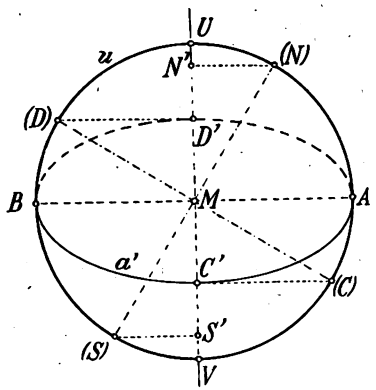


Fig. 1

Man beachte, daß $C'(C)$ gleich MN' und $M(C)$ gleich MU ist. Daher gilt die Gleichung:

$$MC'^2 + MN'^2 = MU^2.$$

Nun lösen wir die Aufgabe in beliebiger Parallelprojektion, siehe Fig. 2. Hier ist eine Ellipse u als der Kugelumriß anzunehmen. Das Bild des Äquators a ist dann irgendeine Ellipse a, die man u so einschreibt, daß beide Ellipsen einen beliebig ausge-

Digitized by Google

wählten Durchmesser $\mathfrak{AB}$ gemein haben. (Nebenbei bemerkt: für die schräge Projektion brauche ich deutsche Buchstaben.) Weil das Bild in Fig. 1 affin umzuformen ist, hat man unter $\mathfrak{UV}$ den zu $\mathfrak{AB}$ konjugierten Durchmesser von u zu verstehen. Auf ihm liegt auch der zu $\mathfrak{AB}$ konjugierte Durchmesser $\mathfrak{CD}$ von a, den man beliebig lang, aber nicht länger als $\mathfrak{UV}$ annehmen darf. Die Bilder $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}$ der Pole sind auch auf $\mathfrak{UV}$ zu suchen. Hier ist es nun praktisch, das Verfahren abzukürzen: Vermöge der Affinität werden alle auf ein und derselben Geraden gelegenen Strecken in demselben Verhältnisse vergrößert oder verkleinert. Solche Strecken sind die in der angegebenen Gleichung. Da sie dort homogen auftreten, gilt mithin auch jetzt die Gleichung:

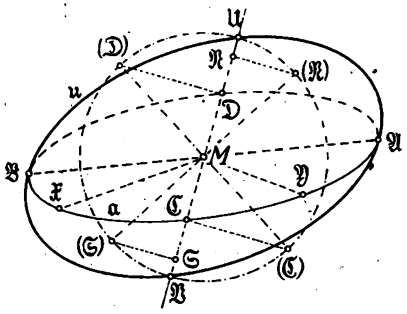


Fig. 2

$$MC^2 + MN^2 = MU^2.$$

Folglich kann man $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}$ *mittels des Hilfskreises vom Durchmesser* $\mathfrak{UV}$ *bestimmen*: Man errichtet in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{UV}$ die Lote nach verschiedenen Seiten hin bis zu ihren Schnittpunkten (C) und (D) mit dem Kreise, dreht den Durchmesser (C) (D) um M in die senkrechte Lage (N) (S) und fällt von (N) und (S) die Lote auf $\mathfrak{UV}$. Die Fußpunkte sind die gesuchten Bilder $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}$ der Pole.

Nun kann man sofort auch die umgekehrte Aufgabe lösen: *In allgemeiner Parallelprojektion sei gegeben das Bild* a *des Äquators a und das Bild* $\mathfrak{NS}$ *der Achse NS. Gesucht wird der Umriß* u *des Kugelbildes.* Wir können uns hier derselben Fig. 2 bedienen. Aber jetzt sind darin nur die Ellipse a und die Strecke $\mathfrak{NS}$ mit derselben Mitte M gegeben. Jedoch auf der Geraden $\mathfrak{NS}$ liegt der Durchmesser $\mathfrak{CD}$ von a, und daraus ergibt sich sofort $\mathfrak{AB}$ als der konjugierte Durchmesser von a. Nun errichtet man in $\mathfrak{C}$ das Lot auf $\mathfrak{CD}$, macht es gleich $M\mathfrak{N}$ und zieht durch seinen Endpunkt (C) den Hilfskreis um M. Dieser Kreis schneidet die Gerade $\mathfrak{CD}$ in $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ so, daß $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{UV}$ konjugierte Durchmesser der gesuchten Umrißellipse u sind, die dadurch bestimmt wird.

Man kann die Aufgabe auch ein wenig anders stellen: *In allgemeiner Parallelprojektion seien gegeben die Bilder* $M\mathfrak{X}$ *und* $M\mathfrak{Y}$ *von zwei rechtwinkligen Radien MX und MY des Äquators a und das Bild* $\mathfrak{N}$ *des Nordpols N. Gesucht wird der Umriß* u *des Kugelbildes.*

Digitized by Google

Wieder benutzen wir Fig. 2; darin sind jetzt nur die Strecken $M\mathfrak{X}$, $M\mathfrak{Y}$ und $M\mathfrak{N}$ gegeben. Weil aber $M\mathfrak{X}$ und $M\mathfrak{Y}$ konjugierte Halbmesser des Äquatorbildes $\mathfrak{a}$ sein müssen, ist diese Ellipse $\mathfrak{a}$ durch sie bestimmt. Also kommt die Aufgabe sofort auf die soeben gelöste zurück.

Wenn ich nun gestehe, daß damit meine Konstruktionen zu Ende sind, werden Sie sich darüber wundern, daß ich es der Mühe wert erachtet habe, diese Kleinigkeiten vorzutragen. Aber die Sache bekommt sofort ein anderes Gesicht, wenn ich abschließend bemerke: *Hiermit ist ein besonders einfacher und ungezwungener Beweis des Pohlkeschen Hauptsatzes der allgemeinen Axonometrie erbracht worden.* Denn in Wahrheit sind ja MX, MY, MN drei zueinander senkrechte gleichlange Strecken, d. h. die Achsen eines rechtwinkligen Dreibeins, und da wir ihre Bilder beliebig annehmen durften, erhellt: *Drei beliebig lange und beliebig gerichtete Strecken $M\mathfrak{X}$, $M\mathfrak{Y}$, $M\mathfrak{N}$ auf der Tafel von einem Punkte M aus bilden eine gewisse Parallelprojektion eines rechtwinkligen Dreibeins mit gleichlangen Beinen.* Das aber ist im wesentlichen der Inhalt des Pohlkeschen Satzes. In ähnlicher Weise mögen Andere vorgegangen sein, um den Pohlkeschen Satz zu beweisen, aber doch nicht so einfach wie hier mittels jener Gleichung. Aber ich will keine Ansprüche machen. Mein Wunsch war nur zu zeigen, wie man ungezwungen und sozusagen unbewußt auf einem ziemlich einfachen Wege zum Pohlkeschen Satze geführt wird.

Absichtlich habe ich vermieden, von dem Ausnahmefalle des Satzes zu sprechen. Das ist nun aber leicht nachzuholen: Wir wissen, daß die Umrißellipse nicht in eine Strecke ausarten darf. Man sieht ohne weiteres, daß diese Ausartung nur dann eintreten würde, wenn erstens das Bild $\mathfrak{a}$ des Äquators selbst in eine Strecke ausartete und zweitens das Bild $\mathfrak{N}$ des Nordpols auf der Geraden dieser Strecke läge. *Mithin ist nur der Fall auszuschließen, wo alle vier Punkte M, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{N}$ in gerader Linie liegen.* Übrigens kann man auch leicht die Projektionsrichtung und das Dreibein im Raume finden: Eine Kugel, deren Durchmesser gleich der Nebenachse der Umrißellipse $\mathfrak{u}$ ist, legt man so, daß sie die Tafel in einem Brennpunkte von $\mathfrak{u}$ berührt. Die Gerade von der Kugelmitte nach der Mitte des Umrisses hat dann die Richtung der Projektion, wie der Quetelet-Dandelinsche Satz lehrt. Durch Zurückgehen in dieser Richtung bekommt man ferner auf der Kugel die Endpunkte des Dreibeins.

Digitized by Google

Über einige Integraleigenschaften der Bessel'schen Funktionen und eine Anwendung derselben[1].

Von Arthur Korn.

Ich werde mich nur mit der einfachsten Art der sogenannten Zylinderfunktionen beschäftigen, mit den nach Bessel genannten Funktionen:

$$(1)\quad \begin{cases} I_0(z) = 1 - \left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2!}\right)^2\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \cdots \\ I_j(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^j\left(1 - \frac{1}{1!\,(j+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,(j+2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \cdots\right), \end{cases}$$

$(j = 1, 2 \ldots)$,

und ich stelle, damit auch diejenigen, welche sich nicht eingehend mit diesen Funktionen beschäftigt haben, leicht folgen können, kurz die Eigenschaften derselben voran, deren wir uns hier bedienen werden.

Wir haben es mit ganzen transzendenten Funktionen zu tun, welche im Endlichen mit allen ihren Ableitungen überall eindeutig und stetig sind — die Reihen konvergieren ähnlich rasch, wie die Reihen der Kreisfunktionen —; für reelle x, welche unendlich wachsen, hat $I_j(x)$ den asymptotischen Wert

$$(2)\qquad I_j(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) \quad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

I_0, I_2, $I_4 \ldots$ sind gerade Funktionen von x, sodaß also

$$I_0(i\sqrt{x}), \quad I_2(i\sqrt{x}), \ \ldots$$

reelle Funktionen von x sind, im besonderen ist

$$(3)\qquad I_0(i\sqrt{x}) = 1 + \left(\frac{1}{1!}\right)^2\frac{x}{4} + \left(\frac{1}{2!}\right)^2\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \cdots.$$

I_1, I_3, I_5, $\ldots$ sind ungrade Funktionen von x, sodaß also

$$\frac{i}{\sqrt{x}}\,I_1(i\sqrt{x}), \quad \frac{i}{\sqrt{x}}\,I_3(i\sqrt{x}), \ \ldots$$

1) Vorgetragen in der 262. Sitzung am 29. Januar 1930.

Digitized by Google

reelle Funktionen von x sind, im besonderen ist:

$$(4)\qquad \frac{i}{\sqrt{x}} I_1(i\sqrt{x}) \equiv -2\frac{d}{dx}\{I_0(i\sqrt{x})\} = -\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{1!\,2!}\frac{x}{4}+\frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\cdots\right\}.$$

Die Funktionen $I_j(z)$ genügen der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(5)\qquad I_j''(z)+\frac{I_j'(z)}{z}+\frac{z^2-j^2}{z^2}I_j(z) = 0, \quad (j=0,1,2,\ldots),$$

und sie haben die rekurrenten Eigenschaften:

$$(6)\qquad \begin{cases} I_j'(z)+\dfrac{j}{z}I_j(z) = I_{j-1}(z), & (j=1,2,\ldots),\\ I_j'(z)-\dfrac{j}{z}I_j(z) = -I_{j+1}(z), & (j=0,1,2,\ldots). \end{cases}$$

Das ist das Wesentliche, was ich hier über die Funktionen $I_j(z)$ als bekannt voraussetzen will.

Die Reihenentwicklungen nach Zylinderfunktionen, von denen die Bessel'schen die einfachsten sind, spielen bekanntlich nicht blos für Probleme, die mit zylindrischen Gebilden zu tun haben, eine Rolle, sondern z. B. auch für Kreis- und Kugelprobleme in Verbindung mit der partiellen Differentialgleichung

$$(7)\qquad \Delta\varphi + k^2\varphi \equiv 0,$$

ferner auch bei den Lösungen hyperbolischer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, von welchen ich eine der einfachsten

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w$$

herausgreifen will; diese Differentialgleichung hat eine besondere Bedeutung, weil sich im eindimensionalen Falle die Gleichung der gedämpften Welle auf sie zurückführen läßt, sie regelt den Verlauf von Spannung und Strom in Telegraphenleitungen, wenn z. B. am Eingang der Leitung die Spannung gegeben ist. Ein partikuläres Integral der Gleichung (8) ist, wie leicht mit Hilfe der Differentialgleichung der Bessel'schen Funktionen folgt, die Funktion

$$(9)\qquad I_0(i\sqrt{x^2-y^2}) = 1+\left(\frac{1}{1!}\right)^2\frac{x^2-y^2}{4}+\left(\frac{1}{2!}\right)^2\left(\frac{x^2-y^2}{4}\right)^2+\cdots,$$

und diese Funktion spielt daher in den Lösungen der Probleme

Digitized by Google

der Telegraphentechnik eine besonders hervorragende Rolle. Es handelt sich hier in den meisten Fällen um Berechnung von Integralen der folgenden Form

$$Z(x, y) = \int_y^x f(x) I_0(i\sqrt{x^2 - y^2})\, dx, \qquad (x > y), \tag{10}$$

in denen $f(x)$ eine, in den in betracht kommenden Intervallen gegebene, mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktion[2]) ihres Argumentes, also etwa eine ganze rationale oder eine ganze transzendente Funktion vorstellt.

Man hat natürlich den Wunsch, solche Integrale durch Reihenentwicklungen darzustellen, die möglichst rasch konvergieren und nach einfachen, bekannten Funktionen von x und y fortschreiten. Man begann, ausgehend von den Problemen der Telegraphentechnik, mit dem einfachen Falle

$$f(x) = e^{cx}, \tag{11}$$

wenn c irgend eine komplexe Konstante

$$c = \alpha + i\beta \tag{12}$$

vorstellt; solche Integrale braucht man z. B., wenn die Eingangsspannung in eine Telegraphenleitung als Wechselspannung von der Frequenz ω, proportional mit β, gegeben ist. In vielen Fällen führt dann die folgende einfache Rechnung zum Ziele:

Es ist, abgesehen von einer willkürlichen, additiven Konstanten, das unbestimmte Integral

$$\int e^{cx} I_0(i\sqrt{x^2 - y^2})\, dx$$
$$= e^{cx}\left(\frac{1}{c} I_0(i\sqrt{x^2 - y^2})\, dx - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\{I_0(i\sqrt{x^2 - y^2})\} + \cdots\right), \tag{13}$$

wie sich durch sukzessive partielle Integration ergibt, wenn man zeigen kann, daß dieses Verfahren konvergent ist. Die Konvergenz ist in der Tat unter gewissen Bedingungen vorhanden, worauf ich hier nicht eingehen will, und zwar ist die Konvergenz offenbar um so besser, je größer

$$\text{mod } c$$

ist. Wenn man eine beliebige Funktion $f(x)$ von geeigneten Stetigkeitseigenschaften zu betrachten hat, kann man sie in Fourier-

2) Man nimmt zweckmäßig die Funktion im allgemeinen als komplexe Funktion an.

Digitized by Google

schen Reihen bezw. Fourier'schen Integralen mit Hilfe von Funktionen

$$e^{cjx}$$

darstellen und so auch zu Reihenentwicklungen für solche allgemeine Funktionen $f(x)$ gelangen. Dieses Verfahren hat sich für viele Fälle praktisch bewährt, da man im allgemeinen die Reihen nach wenigen Gliedern abbrechen kann und die Funktionen

$$I_0(i\sqrt{x^2-y^2}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\} = -\frac{ix}{\sqrt{x^2-y^2}} I_1(i\sqrt{x^2-y^2}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\} = -\frac{x^2}{x^2-y^2} I_2(i\sqrt{x^2-y^2})$$

$$-i\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} I_1(i\sqrt{x^2-y^2}), \ldots,$$

wenn man sich eben nur auf die ersten, einfachen Funktionen beschränkt, durch Tabellen und graphische Hilfsmittel so darstellen kann, daß man bei Rechnungen für die gebräuchlichsten Fälle keinerlei Schwierigkeiten hat.

Diese Methode, so geeignet sie in vielen Fällen der Praxis ist, ist mathematisch wenig befriedigend, einmal weil das allgemeine $n$te Glied schon für den Fall:

$$f(x) = e^{cx}$$

keine einfache Funktion, sondern bereits eine Summe von n Gliedern mit Bessel'schen Funktionen ist, die ihrerseits mit gewissen Funktionen von x und y multipliziert erscheinen, dann aber auch, weil der Übergang zu allgemeineren Funktionen $f(x)$ eine weitere Reihenbildung bzw. eine neue Integraldarstellung erfordert.

Der für den Mathematiker sympathischere Weg wird der sein, $f(x)$ in einer geeigneten Reihendarstellung

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

auszudrücken, mit einfachen Integraleigenschaften für

$$\int_y^x f_j(x)\, I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx.$$

Man wird da selbstverständlich von vornherein an Entwickelungen nach Bessel'schen Funktionen denken; man kann

$$I_0(i\sqrt{x^2-y^2})$$

nach den Funktionen $I_j(ix)$ entwickeln, eine Entwicklung von $f(x)$

Digitized by Google

nach den Bessel'schen Funktionen projektieren und auf das Produkt Integraleigenschaften der Bessel'schen Funktionen anzuwenden suchen. Man kann auch daran denken,

$$\xi = i\sqrt{x^2-y^2}, \quad (x = i\sqrt{\xi^2-y^2}) \tag{14}$$

als neue Variable einzuführen, die Entwicklung von $f(x)$ nach den $I_j(\xi)$ zu versuchen und wieder Integraleigenschaften der Bessel'schen Funktionen zur Anwendung zu bringen.

Während der erste Weg ungewöhnliche Schwierigkeiten mit sich bringen würde, erweist sich der zweite Weg als gangbar und ergibt eigentlich größere Eleganz, wenn man gar nicht auf die neue Variable ξ transformiert, sondern $f(x)$ geradezu in einer Reihenentwicklung

$$f(x) = f_1(i\sqrt{x^2-y^2}) + f_2(i\sqrt{x^2-y^2}) + \cdots,$$

mit geeigneten Integraleigenschaften für

$$\int_y^x f_j(i\sqrt{x^2-y^2})\, I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx,$$

darzustellen sucht. Ich will sogleich die Integraleigenschaften angeben, welche hier in betracht kommen. Seien $I_j(x)$ und $I_\lambda(x)$ zwei Bessel'sche Funktionen, dann ist:

$$I_j'' + \frac{I_j'}{x} + \frac{x^2-j^2}{x^2} = 0,$$

$$I_\lambda'' + \frac{I_\lambda'}{x} + \frac{x^2-\lambda^2}{x^2} = 0,$$

und wenn wir die erste Gleichung mit I_λ die zweite mit I_j multiplizieren und subtrahieren, so ergibt sich:

$$\frac{d}{dx}(I_\lambda I_j' - I_j I_\lambda') + \frac{1}{x}(I_\lambda I_j' - I_j I_\lambda') = \frac{j^2-\lambda^2}{x^2} I_j I_\lambda,$$

was wir auch so schreiben können:

$$\frac{d}{dx}\{x(I_\lambda I_j' - I_j I_\lambda')\} = \frac{j^2-\lambda^2}{x} I_j I_\lambda.$$

Es ergibt sich somit, falls $j \neq \lambda$,

$$\int_0^x \frac{I_j(x)\, I_\lambda(x)}{x}\, dx = \frac{1}{j^2-\lambda^2}\, x\,(I_\lambda(x)\, I_j'(x) - I(x)\, I_\lambda'(x)), \tag{15}$$

und im besonderen

$$\int_0^x \frac{I_j(x)\, I_0(x)}{x}\, dx = \frac{x}{j^2}\,(I_0(x)\, I'(x) - I_0'(x)\, I_j(x)), \qquad j \neq 0. \tag{16}$$

Digitized by Google

Wir ziehen ferner noch aus (15) die Folgerung[3])

$$(17)\qquad \int_0^{+\infty} \frac{I_j(x)\, I_\lambda(x)}{x}\, dx = 0, \text{ falls } j-\lambda \text{ eine ganze gerade Zahl} \neq 0.$$

Führen wir in den Gleichungen (16) und (17) als Argumente der I_j anstelle von x der $i\sqrt{x^2-y^2}$ ein, so verwandeln sich diese Gleichungen, wenn wir uns im übrigen auf ganze, grade j und λ beschränken, in die folgenden:

$$(18)\qquad \int_y^x \frac{x}{x^2-y^2}\, I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\, I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx$$

$$= \frac{i\sqrt{x^2-y^2}}{4j^2}\left(I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\, I'_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2}) - I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\, I'_0(i\sqrt{x^2-y^2})\right),$$

$$j = 1, 2, \ldots,$$

$$(19)\qquad \int_y^{i\infty} \frac{x}{x^2-y^2}\, I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\, I_{2\lambda}(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx = 0, \qquad (j \neq \lambda).$$

Das sind die Integraleigenschaften, welche für uns in betracht kommen, wie wir dies sogleich erkennen werden. Es handelt sich für uns um das Integral:

$$\int_y^x f(x)\, I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx;$$

nehmen wir an, wir könnten die Funktion $f(x)$ in eine Reihe der folgenden Form entwickeln:

$$(20a)\qquad f(x) = \frac{x}{x^2-y^2}\left\{b_1(y)\, I_2(i\sqrt{x^2-y^2}) + b_2(y)\, I_4(i\sqrt{x^2-y^2}) + \cdots\right\},$$

dann ergibt sich mit Hilfe der Integraleigenschaften (18):

$$(20b)\qquad \int_y^x f(x)\, I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx$$

$$= \frac{i\sqrt{x^2-y^2}}{4} \sum_1^\infty{}_j \frac{b_j(y)}{j^2}\left\{I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\, I'_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2}) - I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\, I'_0(i\sqrt{x^2-y^2})\right\}.$$

Wir hätten dann die gewünschte Entwicklung für unser Integral, wenn wir die Koeffizienten $b_j(y)$ in einfacher Weise darstellen

3) Mit Rücksicht auf (2) und (6).

Digitized by Google

können. Abgesehen von gewissen Stetigkeitseigenschaften kommen für solche Entwicklungen Bedingungen über das Verhalten im Unendlichen in betracht. Für eine Entwicklung einer gegebenen Funktion $F(x)$ für reelle x nach Bessel'schen Funktionen genügt z. B. außer Stetigkeits- und Eindeutigkeitseigenschaften die Bedingung im Unendlichen

$$F(x) \sim \text{endl. Konst. } e^{-\gamma x}, \quad (\gamma \text{ endlich positive Zahl} > 1).$$

Nehmen wir hinzu, daß wegen

$$x = i\sqrt{\xi^2 - y^2}, \quad \xi = i\sqrt{x^2 - y^2}, \quad y \neq 0$$

jede eindeutige Funktion $f(x)$ und auch

$$\frac{f(x)}{x},$$

wenn man den Punkt $x = 0$ durch einen kleinen Kreis ausschließt, auf einem Blatte der Riemann'schen Fläche für $\sqrt{x^2 - y^2}$ eine eindeutige Funktion von $x^2 - y^2$, somit eine grade Funktion von

$$i\sqrt{x^2 - y^2}$$

sein muß, so ergibt sich, daß in einer Entwicklung nach Besselschen Funktionen des Argumentes

$$i\sqrt{x^2 - y^2}$$

nur die geraden I_{2j} auftreten können. Nimmt man noch hinzu, daß in der Klammer der Koeffizient von I_0 verschwinden muß, — sonst hätten wir einen Pol für $x = y$ —, daß ferner bei Giltigkeit der Entwicklung (20a) die Bedingung des Verschwindens von

$$(20\,c) \qquad f_0(y) \equiv \int_y^{i\infty} f(x)\, I_0\left(i\sqrt{x^2 - y^2}\right) dx$$

erfüllt sein müßte, so können wir im allgemeinen[4]) die Entwicklung:

$$(21) \qquad f(x) = +2\int_y^{i\infty} f(x)\, I_0\left(i\sqrt{x^2 - y^2}\right) dx \frac{I_0'\left(i\sqrt{x^2 - y^2}\right)}{i\sqrt{x^2 - y^2}}\, x$$

$$+ \frac{x}{x^2 - y^2} \sum_1^\infty j\, b_j(y)\, I_j\left(i\sqrt{x^2 - y^2}\right)$$

4) d. h. bei geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen über die zu entwickelnde Funktion; es wird im allgemeinen die Stetigkeit der zu entwickelnden Funktion und ihre abteilungsweise Monotonität in jedem endlichen Intervalle genügen.

Digitized by Google

ansetzen, wenn wir als Bedingung im Unendlichen z. B. für $f(x)$

(22) $f(x) \sim$ endl. Konst. $e^{-\gamma|x|}$, $\lim x = i\infty$, (γ positive Zahl > 1)

voraussetzen. Wollen wir für das folgende ganz allgemeine Voraussetzungen machen, so hätten wir zu sagen, wir setzen auf einem Blatte der Riemann'schen Fläche für $f(x)$ die Entwicklung (21) für einen Weg vom Punkte y bis zum Punkte $i\infty$ voraus, bei Ausschluß des Punktes $x = 0$. Ich werde bei einer anderen Gelegenheit auf allgemeine Entwicklungen von der Form (21) und hinreichende Bedingungen für dieselbe zurückkommen.

Es wird sich nunmehr um die Koeffizienten b_j handeln. Wir erhalten dieselben als bestimmte Integrale, wenn wir (21) mit

$$I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})$$

multiplizieren und zwischen den Grenzen y und $i\infty$ integrieren; dann folgt mit Rücksicht auf die Integraleigenschaften (19) und die bekannten Integraleigenschaften:[5])

$$2\int_0^\infty I_0'(z)\, I_{2j}(z)\, dz = (-1)^j, \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

aus denen sich

$$(23) \qquad 2\int_y^{i\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\, I_0'(i\sqrt{x^2-y^2})\, I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx = (-1)^j, \qquad (j = 1, 2 \ldots)$$

ergibt:

$$\int_y^{i\infty} f(x)\, I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx = (-1)^j f_0(y)$$

$$+ b_j(y) \int_y^{i\infty} \frac{x}{x^2-y^2}\, I_{2j}^2(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx, \qquad (j = 1, 2 \ldots).$$

Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{I_{2j}^2(z)}{z}\, dz, \qquad (j = 1, 2 \ldots),$$

ist bekannt[6]), es ist

$$= \frac{1}{4j};$$

5) die rekurrent aus (6) folgen, mit Rücksicht auf (17).

6) Man vgl. z. B. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen (Leipzig, B. G. Teubner 1904) S. 200, Formeln (10).

Digitized by Google

wir haben also:

$$\int_y^{i\infty} \frac{x}{x^2-y^2} I_{2j}^2(i\sqrt{x^2-y^2})\,dx = \frac{1}{4j}, \qquad (j=1,2\ldots),$$

somit:

$$b_j(y) = 4j\int_y^{i\infty} f(x) I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\,dx - 4j(-1)^j f_0(y). \tag{24}$$

Zur Vereinfachung der Resultate kann nun zunächst bemerkt werden, daß wir mit Hilfe der rekurrenten Eigenschaften (6) der I_j die b_j sukzessive auseinander berechnen können. Wir setzen:

$$\alpha_j(y) = \int_y^{i\infty} f(x) I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\,dx, \qquad (j=0,1,2\ldots), \tag{25a}$$

und

$$\beta_j(y) = i\int_y^{i\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-y^2}} I_{2j-1}(i\sqrt{x^2-y^2})\,dx, \qquad (j=1,2,\ldots), \tag{25b}$$

sodaß:

$$b_j(y) = 4j\,\alpha_j(y) - 4j(-1)^j\alpha_0(y), \tag{26}$$

und folgern aus (6):

$$\frac{i\,I_1(i\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}} = -i\,\frac{I_0'(i\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$\frac{i\,I_{2j+1}(i\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}} = i\,\frac{I_{2j-1}(i\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}} - 2i\,\frac{I_{2j}'(i\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}}, \qquad (j=1,2\ldots),$$

also:

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial y}, \\ \beta_{j+1} = \beta_j + \dfrac{2}{y}\dfrac{\partial\alpha_j}{\partial y}, \qquad (j=1,2,\ldots). \end{cases} \tag{27}$$

Wir folgern ferner aus (6):

$$I_{2j+2}(i\sqrt{x^2-y^2}) = I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2}) + 2(2j+1)\frac{i\,I_{2j+1}(i\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}}, \qquad (j=0,1,2\ldots),$$

also:

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - 2(2j+1)\,\beta_{j+1}, \qquad (j=0,1,2\ldots). \tag{28}$$

Die Gleichungen (27) und (28) gestatten uns, in einfacher Weise rekurrent alle α_j aus α_0 zu berechnen.

Digitized by Google

Wir sind daher, wenn man noch bedenkt, daß:

$$2\int_y^x x\frac{I_0'(i\sqrt{x^2-y^2})}{i\sqrt{x^2-y^2}}I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\,dx = 1-I_0^2(i\sqrt{x^2-y^2}),$$

zu dem folgenden Resultate gelangt:

$$\int_y^x f(x)\,I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\,dx = \alpha_0\left(1-I_0^2(i\sqrt{x^2-y^2})\right) \tag{29}$$
$$+i\sqrt{x^2-y^2}\sum_1^\infty{}^j\frac{\alpha_j(y)-(-1)^j\alpha_0(y)}{j}\{I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\,I_{2j}'(i\sqrt{x^2-y^2})$$
$$-I_{2j}(i\sqrt{x^2-y^2})\,I_0'(i\sqrt{x^2-y^2})\},$$

wo die α_j leicht rekurrent mit Hilfe der Formeln (27) und (28) aus α_0 zu berechnen sind, das durch die Formel

$$\alpha_0 = \int_y^{i\infty} f(x)\,I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\,dx \tag{30}$$

gegeben ist.

Der Praktiker wird nun sagen: Was haben wir von dieser Reihe, wenn ihre Koeffizienten so kompliziert sind, bereits das Integral α_0 im allgemeinen eine Transzendente und die übrigen α_j durch sie ausdrückbar? Da benützen wir lieber die für

$$f(x) = e^{cx} \tag{31}$$

so einfach ableitbare Reihe und entwickeln nach Fourier.

Es trifft sich nun aber gut, daß wir für den einfachen Fall (31) das Integral (30) in einfacher Weise auswerten können. Es ist in diesem Falle:[7])

$$\alpha_0(y) = -\frac{e^{\sqrt{c^2-1}\cdot y}}{\sqrt{c^2-1}}, \tag{32}$$

wenn in

$$c = \alpha+i\beta$$

β positiv und von null verschieden ist und unter

7) In der Tat ist

$$\frac{d^2\alpha_0}{dy^2} = (c^2-1)\alpha_0,$$

ferner

$$\alpha_0 = 0, \quad (\lim y = i\infty),$$
$$\frac{d\alpha_0}{dy} = -1, \quad (y=0),$$

woraus sich ohne weiteres das obige Resultat ergibt.

Digitized by Google

$$\sqrt{c^2-1}$$

der Wert der Wurzel verstanden wird, für welchen bei Zerlegung in einen reellen und einen rein imaginären Teil der Koeffizient von i positiv ist.

Nunmehr steht die Entwicklung (29) der früheren Entwicklung an Einfachheit nicht nach, und sie wird auch in der Praxis vielfach der früheren Entwicklung vorzuziehen sein[8]).

8) Es ist zu bemerken, daß die obere Grenze des Integrales nicht ∞, sondern $i\infty$ ist. Wenn, wie bei den Telegraphen-Problemen, x mit der Zeit, y mit der Situationskoordinate auf der Leitung proportional ist, kann also

$$\int_y^{\infty} f(x)\, I_0(i\sqrt{x^2-y^2})\, dx$$

der Wert des Integrales nach einer unendlich langen Einschwingzeit, von a_0 verschieden sein; in den meisten für die Praxis in betracht kommenden Problemen ist Übereinstimmung vorhanden, weil das Integral über einen unendlich fernen Kreisbogen bei dem entsprechenden Verhalten von $f(z)$ im Unendlichen null ist.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXIX. JAHRGANG

2. STÜCK

INHALT:

	Seite
Über neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren. Von **H. Jonas**	34—51
E. Study, Ein Nachruf. Von **E. A. Weiß**	52—77
Adolf Kneser. Von **L. Koschmieder**	78—102
Zur Begründung des Parallelismus von Levi-Civita. Von **G. Grüß**	103—115
Über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre. Von **A. Brauer** und **H. Zeitz**	116—125
Berichtigung. Von **A. Korn**	125
263. Sitzung am 26. Februar 1930	33
264. Sitzung am 26. März 1930	33
265. Sitzung am 30. April 1930	33
266. Sitzung am 28. Mai 1930	33
267. Sitzung am 25. Juni 1930	33
Mitgliederverzeichnis	126—131

1930

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

7) Alle Zuschriften, welche den Inhalt der Sitzungsberichte betreffen, sind zu richten an den derzeitigen Schriftleiter, Herrn **Prof. Dr. Ernst Jacobsthal, Berlin-Zehlendorf, Am Fischtal 2a.**

Mitteilungen:

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten entweder an den Schriftführer oder an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Obersekretär M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse und nicht an die Adresse des Schriftführers zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

NEUNUNDZWANZIGSTER JAHRGANG

1930
GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Brauer, A. und Zeitz, H., Über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre	116—125
Grüß, G., Zur Begründung des Parallelismus von Levi-Civita	103—115
Jonas, H., Über neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren	34—51
Korn, A., Über einige Integraleigenschaften der Bessel'schen Funktionen und eine Anwendung derselben	22—32
Koschmieder, L., Adolf Kneser	78—102
Scheffers, G., Projektion der Kugel	18—21
Schur, I., Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Reihen	3—13
Weiß, E. A., Neue geometrische Deutung der Apolaritätsbeziehung zwischen zwei binären kubischen Formen	14—17
Weiß, E. A., E. Study. Ein Nachruf	52—77
Korn, A., Berichtigung	125
259. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 30. Oktober 1929	1
260. „ am 27. November 1929	1
261. Sitzung und außerordentliche Mitgliederversammlung am 18. Dezember 1929	2
262. Sitzung am 29. Januar 1930	2
263. „ „ 26. Februar „	33
264. „ „ 26. März „	33
265. „ „ 30. April „	33
266. „ „ 28. Mai „	33
267. „ „ 25. Juni „	33
Mitgliederverzeichnis	126—131

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

263. Sitzung am 26. Februar 1930.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 43 Mitglieder und Gäste.

Herr Hamel: Über die Ausbildung der Lehrer der Mathematik an den Hochschulen.

264. Sitzung am 26. März 1930.

Vorsitzender: Herr E. Jacobsthal. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

Herr H. Jonas: Über neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren.

Herr R. Remak: Beziehungen zwischen Mathematik und Volkswirtschaftslehre.

265. Sitzung am 30. April 1930.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 25 Mitglieder und Gäste.

Herrn E. A. Weiß: E. Study. Ein Nachruf.

Herr K. Hoecken: Ermittlung zusammengehöriger Objekt- und Bildpunkte vermittels des Kardanproblems.

266. Sitzung am 28. Mai 1930.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 41 Mitglieder und Gäste.

Herr L. Koschmieder: Adolf Kneser. Ein Nachruf.

Herr G. Haenzel: Zur Theorie der elliptischen Integrale erster Gattung

267. Sitzung am 25. Juni 1930.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 27 Mitglieder und Gäste.

Herr G. Grüß: Zur Begründung des Parallelismus von Levi-Civita.

Herr A. Brauer und Herr H. Zeitz: Über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre.

Digitized by Google

Über neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren[1].

Von H. Jonas.

Einleitung.

Zu Systemen windschiefer Vierecke, deren Seiten Tangenten der von den Eckpunkten gebildeten Flächen sind, gelangte Bianchi durch Aufstellung eines wichtigen Theorems über die Zusammensetzung der Moutardschen Transformationen, das als ganz speziellen Fall den Vertauschbarkeitssatz für die Bäcklundschen Transformationen umfaßt. Die Seiten beschreiben dabei vier W-Kongruenzen: die vier Flächen sind unter Zuordnung ihrer Asymptotenlinien aufeinander bezogen. Außerhalb dieser sehr allgemeinen Klasse kennt man gewisse Viereckssysteme der gedachten Art, die sich, und zwar jedesmal auf ∞^2 Weisen, aus den Biegungsflächen beliebiger Rotationsflächen konstruieren lassen[2], sowie vereinzelte viergliedrige Zyklen Laplacescher Transformationen.

Im folgenden sollen nun drei weitere Beispiele gegeben werden. Bei dem ersten handelt es sich um die Verallgemeinerung einer geometrischen Eigenschaft der pseudosphärischen Kongruenzen mit konjugiert-imaginären Brennflächen, auf die mich die Untersuchung der schiefen Weingartenschen Systeme geführt hat[3]. Der zweite Fall betrifft die (nicht-geradlinigen) Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids. Hier erscheinen, ähnlich wie in dem erwähnten Satze über die Rotationsflächen, Systeme von Vierecken, die mit den Flächenelementen des Hyperboloids starr gekoppelt sind und bei den Biegungen mitgeführt werden. Die dritte Klasse von Viereckssystemen, ein neuer Fall eines viergliedrigen Laplaceschen Zyklus, knüpft sich an die Verbiegung des gleichseitigen

1) Vorgetragen in der 264. Sitzung am 26. März 1930.

2) Bianchi, Sopra una proprietà cinematica che caratterizza le superficie W. Rom, Acc. Linc. Rend. (5) 32 (1923), S. 185; doch s. bereits Jonas, Über W-Strahlensysteme, Flächendeformation usw. Diss., Halle 1908.

3) Jonas, Flächen mit Bertrandschen Kurven und pseudosphärische Flächen- und Strahlensysteme. Math. Ann. **103** (1930), S. 720.

Digitized by Google

hyperbolischen Paraboloids und bedeutet ein eigenartiges, durch die Fülle geometrischer Beziehungen ausgezeichnetes Gegenstück zu einem an früherer Stelle mitgeteilten Ergebnis[4]).

Ein allgemeiner Ansatz soll an die Spitze der Entwicklungen nicht gestellt werden. Indessen sei ein Grundgedanke hier ausgesprochen, der dazu dienen kann und gleichzeitig die Aussicht auf neue Transformationsmethoden eröffnet. Es ist bekannt, daß in jeder Strahlenkongruenz die Schmiegungsebenen der auf dem einen Brennflächenmantel von den Strahlen berührten Kurven die Tangentialebenen des anderen Mantels sind, daß also dieser zweite Mantel Enveloppe der ∞^2 Schmiegungsebenen ist. Besteht nun zwischen zwei durch Beziehung auf das Parameterpaar u, v einander punktweise zugeordneten Flächen die besondere Verwandtschaft, daß in korrespondierenden Punkten die ungleichnamigen Kurven, d. h. die u-Kurve der einen und die v-Kurve der anderen Fläche, die Schmiegungsebenen gemein haben, so beschreiben die Schnittpunkte ihrer Tangenten die Enveloppen der beiden Ebenensysteme. Die gegebenen Flächen bilden also für ein Viereckssystem der gesuchten Art zwei Gegenflächen, während die Schnittpunkte der Paare ungleichnamiger Tangenten die beiden einzuschaltenden Flächen bedecken. Die beiden ersten Beispiele entsprechen diesem allgemeinen Sachverhalt; auch das dritte gehört noch einem Sonderfall an. Es genügt nämlich für das Zustandekommen eines viergliedrigen Laplaceschen Zyklus, daß auf den beiden Ausgangsflächen die Kurven (u, v) konjugierte Netze vorstellen.

§ 1.

Ausdehnung einer Eigenschaft der pseudosphärischen Kongruenzen mit konjugiert-imaginären Brennflächen auf eine allgemeinere Klasse von Strahlenkongruenzen

1. Eine Verallgemeinerung der pseudosphärischen Strahlensysteme bilden diejenigen *W-Kongruenzen, deren Brennflächen in korrespondierenden Punkten das gleiche Krümmungsmaß besitzen.* Dieses hat dann die Form:

$$K = -\frac{1}{(U+V)^2}, \tag{1}$$

wobei U und V einzeln Funktionen der den Asymptotenlinien entsprechenden Parameter u und v sind. Charakteristisch für diese

4) Jonas, Untersuchungeu über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze usw. Math. Ann. 87 (1922), S. 157.

Digitized by Google

Kongruenzen ist der Umstand, daß auf der Bildkugel den Asymptotenlinien der Brennflächen ein Orthogonalnetz (u, v) entspricht[5]). Es sei X die Strahlrichtung[6]) und

$$\sum dX^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

das Quadrat des Linienelements der Bildkugel; $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ seien die Richtungen der u- bzw. v-Tangente des Orthogonalnetzes. Wird

$$\frac{(\sqrt{e})_v}{\sqrt{g}} = m, \qquad \frac{(\sqrt{g})_u}{\sqrt{e}} = n \tag{2}$$

gesetzt, so gilt die Gaußsche Relation

$$m_v + n_u + \sqrt{eg} = 0 \tag{3}$$

und das System der Differentialrelationen des Dreikants $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$:

$$\begin{cases} X_u = \sqrt{e}\,X^{(1)}, & X_v = \sqrt{g}\,X^{(2)}, \\ X^{(1)}_u = -m\,X^{(2)} - \sqrt{e}\,X, & X^{(1)}_v = n\,X^{(2)}, \\ X^{(2)}_u = m\,X^{(1)}, & X^{(2)}_v = -n\,X^{(1)} - \sqrt{g}\,X. \end{cases} \tag{4}$$

Für die *Mittelfläche* $(x^{(0)})$, den Ort der Strahlmittelpunkte, erhält man die folgende Darstellung:

$$x^{(0)}_u = (U+V)\,m\,X - U\sqrt{e}\,X^{(2)}, \qquad x^{(0)}_v = (U+V)\,n\,X - V\sqrt{g}\,X^{(1)}. \tag{5}$$

In der Tat sind dann durch

$$\tilde{x} = x^{(0)} \pm \sqrt{UV}\,X \tag{6}$$

die beiden vom Strahl berührten Brennflächen gegeben; sie haben das gemeinsame Krümmungsmaß (1) und die Kurven (u, v) zu Asymptotenlinien.

Die mit Benutzung von (4) aufgestellte Integrabilitätsbedingung für (5) liefert:

$$(U+V)(m_v - n_u) + V'm - U'n + (U-V)\sqrt{eg} = 0,$$

5) Bianchi, Lezioni di geom. diff. 2 (1923), S. 72—89; s. insbesondere S. 86. Eine Fläche der Klasse (1) läßt ∞^2 Transformierte der gleichen Klasse zu, die mit ihr durch W-Kongrnenzen der in Rede stehenden Art verbunden sind (das. S. 79).

6) Ich schreibe der Kürze wegen Punkt x statt x, y, z, Fläche (x), Richtung X statt X, Y, Z, auch Richtung x_u bzw. ξ, wenn die Richtungskosinus proportional mit x_u, y_u, z_u bzw. mit ξ, η, ζ sind. Das rechtwinklige Dreikant $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ hat die 9 Kosinus X, Y, Z; $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$; $X^{(2)}, Y^{(2)}, Z^{(2)}$, wobei die Determinante $(X, X^{(1)}, X^{(2)}) = +1$ vorausgesetzt ist. Gleichungen in x sind vektoriell aufzufassen, ziehen also stets die analogen Relationen in y und z nach sich. Im Netz (u, v) ist die u-Kurve diejenige, auf der u variabel und v konstant ist. Buchstabenindizes deuten partielle Ableitungen an.

Digitized by Google

also unter Hinzunahme von (3):

$$(7)\qquad \begin{cases} 2(U+V)m_v + V'm - U'n + 2U\sqrt{eg} = 0, \\ 2(U+V)n_u - V'm + U'n + 2V\sqrt{eg} = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Beziehungen müssen neben (2) erfüllt sein. Wir bemerken, daß man ihnen die in besonderen Fällen auf Zwischenintegrale führende Gestalt

$$(8)\quad [(U+V)m^2 + Ue]_v = U'mn, \qquad [(U+V)n^2 + Vg]_u = V'mn$$

geben kann.

2. Durch den Strahlmittelpunkt $x^{(0)}$ werde die zum Strahl rechtwinklige Gerade mit der Richtung $X^{(2)}$ (v-Tangente des sphärischen Bildes) gelegt, die wir *Querstrahl* nennen wollen. Wir betrachten darauf die zu beiden Seiten von $x^{(0)}$ in gleichem Abstand gelegenen Punkte

$$(9)\quad x^{(1)} = x^{(0)} + \sqrt{-(U+V)V}\,X^{(2)}, \qquad x^{(2)} = x^{(0)} - \sqrt{-(U+V)V}\,X^{(2)},$$

die für $(U+V)V < 0$ reell sind. Unter dieser Voraussetzung kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U+V > 0$, $V < 0$ angenommen werden. Die durch (6) bestimmten Brennflächen der Kongruenz werden dann konjugiert-imaginär.

Es gilt nun, was hier nicht näher ausgeführt werden soll, zunächst der Satz, daß für die beiden Hilfsflächen $(x^{(1)})$ und $(x^{(2)})$ die Tangente an die u-Kurve der einen die Tangente an die v-Kurve der anderen trifft und daß außerdem die von den beiden Tangentenpaaren bestimmten Ebenen die Schmiegungsebenen der u-Kurven beider Flächen sind. Zwischen diesen u-Kurven besteht also die als asymptotische Kurventransformation bezeichnete Verwandtschaft. Hinsichtlich der v-Kurven kommt den beiden Ebenen die gleiche Eigenschaft nur dann zu, wenn V sich auf eine Konstante reduziert. Auf diesen Fall beschränkt sich also die Verallgemeinerung der geometrischen Eigenschaft, die in § 5 der unter [3]) angeführten Arbeit bewiesen wurde. Wir bestätigen den positiven Teil der Ausssage durch die nachfolgende Rechnung, für die

$$V = -k$$

gesetzt sei.

Es wird:

$$(10)\quad x_u^{(0)} = (U-k)mX - U\sqrt{e}\,X^{(1)}, \qquad x_v^{(0)} = (U-k)nX + k\sqrt{g}\,X^{(1)},$$

$$(11)\quad x^{(1)} = x^{(0)} + \sqrt{(U-k)k}\,X^{(2)}, \qquad x^{(2)} = x - \sqrt{(U-k)k}\,X^{(2)},$$

Digitized by Google

$$(12)\quad \begin{cases} x_u^{(1,2)} = m\sqrt{U-k}\,(\sqrt{U-k}\,X \pm \sqrt{k}\,X^{(1)}) - \left(U\sqrt{e} \mp \dfrac{U'\sqrt{k}}{2\sqrt{U-k}}\right) X^{(2)}, \\ x_v^{(1,2)} = (\sqrt{U-k}\,n \mp \sqrt{k}\sqrt{g})(\sqrt{U-k}\,X \mp \sqrt{k}\,X^{(1)}). \end{cases}$$

Die Richtungen ξ und ξ' seien definiert durch

$$(13)\quad \xi = \sqrt{k}\,X - \sqrt{U-k}\,X^{(1)}, \qquad \xi' = \sqrt{k}\,X + \sqrt{U-k}\,X^{(1)}.$$

Wir finden:

$$(14)\quad \begin{cases} \xi_u = \sqrt{U-k}\,(\sqrt{e}\,X + m\,X^{(2)}) + \left(\sqrt{k}\sqrt{e} - \dfrac{U'}{2\sqrt{U-k}}\right) X^{(1)}, \\ \xi_v = -(\sqrt{U-k}\,n - \sqrt{k}\sqrt{g})\,X^{(2)}, \\ \xi_u' = -\sqrt{U-k}\,(\sqrt{e}\,X + m\,X^{(2)}) + \left(\sqrt{k}\sqrt{e} + \dfrac{U'}{2\sqrt{U-k}}\right) X^{(1)}, \\ \xi_v' = (\sqrt{U-k}\,n + \sqrt{k}\sqrt{g})\,X^{(2)}. \end{cases}$$

Mittels (12)–(14) folgt dann:

$$\sum \xi\, x_u^{(1)} = 0, \quad \sum \xi_u x_u^{(1)} = 0, \quad \sum \xi\, x_v^{(2)} = 0, \quad \sum \xi_v x_v^{(2)} = 0,$$
$$\sum \xi' x_v^{(1)} = 0, \quad \sum \xi_v' x_v^{(1)} = 0, \quad \sum \xi' x_u^{(2)} = 0, \quad \sum \xi_u' x_u^{(2)} = 0.$$

Die Richtungen ξ und ξ', beide senkrecht zum Querstrahl und zu den Paaren ungleichnamiger Tangenten von $(x^{(1)})$ und $(x^{(2)})$ bestimmen also, und zwar ξ für die u-Kurve von $(x^{(1)})$ und die v-Kurve von $(x^{(2)})$, ξ' für die v-Kurve von $(x^{(1)})$ und die u-Kurve von $(x^{(2)})$, die Binormalen. Die beiden im Querstrahl sich schneidenden, je ein Tangentenpaar enthaltenden Ebenen sind demnach die gemeinsamen Schmiegungsebenen der auf den Flächen $(x^{(1)})$ und $(x^{(2)})$ von den Tangenten berührten Kurven. Die Tangentenschnittpunkte bilden, wie aus der Bemerkung am Schluß der Einleitung hervorgeht, die Enveloppen der beiden Ebenensysteme.

Wir führen noch das begleitende Dreikant $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'')$ der v-Kurve von $(x^{(1)})$ ein (Tangente $\mathfrak{X}$, Hauptnormale $\mathfrak{X}'$, Binormale $\mathfrak{X}''$). Es wird:

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{\sqrt{U}}(\sqrt{U-k}\,X - \sqrt{k}\,X^{(1)}), \qquad \mathfrak{X}' = X^{(2)},$$

$$\mathfrak{X}'' = -\frac{1}{\sqrt{U}}(\sqrt{k}\,X + \sqrt{U-k}\,X^{(1)}) = -\frac{\xi'}{\sqrt{U}}.$$

Differentiiert man mit Hilfe von (4) nach v, so erkennt man unter Heranziehung der Frenetschen Formeln, daß die betrachteten v-Linien Bertrandsche Kurven mit der vom Parameter u abhängigen Relation

Digitized by Google

$$\frac{1}{R}+\frac{U-2k}{2\sqrt{(U-k)k}}\frac{1}{T}+\frac{1}{2\sqrt{(U-k)k}}=0 \tag{15}$$

sind, in der R und T die Radien der Flexion und der Torsion bedeuten. Man bestätigt leicht, daß der auf der Hauptnormale gelegene Punkt $x^{(2)}$ als v-Linie die konjugierte Bertrandsche Kurve beschreibt.

Das Ergebnis werde in dem folgenden Satze ausgesprochen: *Liegt eine W-Kongruenz mit konjugiert-imaginären Brennflächen von gleichem, längs der Asymptotenlinien der einen Schar konstantem Krümmungsmaß vor, so entsprechen diesen auf den durch* (11) *bestimmten Hilfsflächen* $(x^{(1)})$ *und* $(x^{(2)})$ *konjugierte Bertrandsche Kurven mit der Relation* (15). *Die Tangenten derjenigen Kurven, die den Asymptotenlinien der zweiten Schar entsprechen, treffen immer die Tangenten der Bertrandschen Kurven der anderen Hilfsfläche. Die von den Tangentenschnittpunkten gebildeten beiden Flächen werden auch ihrerseits von den Tangentenpaaren berührt.*

Es sei σ der Winkel, unter dem die Tangente der Bertrandschen v-Kurve gegen die Strahlrichtung geneigt ist, p der Abstand des Punktes $x^{(1)}$ bzw. $x^{(2)}$ vom Strahl. Wir haben dann:

$$\cos\sigma=\sum\mathfrak{X}X=\sqrt{\frac{U-k}{U}},\qquad p=\sqrt{(U-k)k}, \tag{16}$$

mithin:

$$p\operatorname{tg}\sigma=k,$$

d. h. unabhängig von u. Das bedeutet aber: *Die Tangenten gehören sämtlich der gleichen um den Strahl als Achse auszuführenden Schraubung an.*

3. Wir zeigen schließlich, daß *sich die Ermittlung der untersuchten Strahlensysteme auf eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung zurückführen läßt.* Aus der zweiten Relation (7) folgt nämlich durch Integration:

$$(U-k)n^2-kg=C,$$

wobei die Konstante C, über deren absoluten Wert noch verfügt werden darf, durch geeignete Wahl des Parameters v an die Stelle einer Funktion von v getreten ist. Unter Ausschluß der Annahme $C=0$, bei der eine der beiden Flächen $(x^{(1)})$ und $(x^{(2)})$ in eine Kurve ausartet, haben wir die Fälle $C>0$ und $C<0$ zu unterscheiden.

Für $C>0$ sei

$$\sqrt{g}=\varkappa\operatorname{sh}\theta,\quad n=\varkappa\sqrt{\frac{k}{U-k}}\operatorname{ch}\theta,\quad C=\varkappa^2k\quad(\varkappa=\text{konst.}) \tag{17}$$

Digitized by Google

gesetzt. Mittels (2) ergibt sich:

$$\sqrt{e} = \sqrt{\frac{U-k}{k}}\,\theta_u, \qquad m = \sqrt{\frac{U-k}{k}}\,\frac{\theta_{uv}}{\varkappa \operatorname{sh}\theta}. \tag{18}$$

Es empfiehlt sich, auch über die Variable u zu verfügen und

$$U = \frac{k\,u}{u-\varkappa^2} \tag{19}$$

zu setzen. Wir erhalten dann aus (3) bzw. (7) die von den Konstanten k und $\varkappa$ freie Differentialgleichung für θ:

$$\left(\frac{\theta_{uv}}{\operatorname{sh}\theta}\right)_v + u \operatorname{sh}\theta \,.\, \theta_u + \frac{1}{2}\operatorname{ch}\theta = 0. \tag{20}$$

Eine Lösung θ derselben definiert die Bildkugel (X) mit dem Quadrat des Linienelements

$$\sum dX^2 = \frac{\varkappa^2}{u-\varkappa^2}(\theta_u)^2\,du^2 + \varkappa^2 \operatorname{sh}^2\theta\,dv^2 \tag{21}$$

infolge der willkürlichen Konstanten $\varkappa$ noch auf ∞^1 Weisen, während die Konstante k jetzt nur einen Maßstabsfaktor darstellt, der durch die Wahl der Längeneinheit gleich 1 gemacht werden kann. Der Zusammenhang zwischen den zu gleichem θ, aber verschiedenem $\varkappa$ gehörigen Strahlenkongruenzen ist rein analytischer Art: er entspricht der Anwendung simultaner Liescher Transformationen auf die Brennflächen einer pseudosphärischen Kongruenz.

Für $C < 0$ sind in den Formeln (17), (18), (20), (21) die Zeichen sh und ch zu vertauschen. Geometrisch unterschieden sind die beiden Fälle durch die Tatsache, daß die Kongruenz der Querstrahlen für $C > 0$ reelle, für $C < 0$ imaginäre Brennflächen besitzt. Eine anschauliche Deutung des spezialisierten Parameters u folgt aus (16) und (19); es wird:

$$\cos\sigma = \frac{\varkappa}{\sqrt{u}}.$$

§ 2.

Kinematische Eigenschaften der Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids.

1. Es sei zunächst allgemein $(\mathfrak{x})$ eine auf die Asymptotenlinien (u, v) bezogene Fläche von negativem Krümmungsmaß und (x) eine für einen gewissen Wertebereich definierte Biegungsfläche. Das gemeinsame Quadrat des Linienelements sei:

$$\sum d\mathfrak{x}^2 = \sum dx^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2;$$

Digitized by Google

mit $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} = 0$ und mit L, M, N seien die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bezeichnet.

Die mit der Isometrie verbundenen kinematischen Vorstellungen sind zweifacher Art. Man kann einmal die Verbiegung ins Auge fassen, durch die die gegebene Fläche $(\mathfrak{x})$ (endliche Umgebung eines regulären Punktes) in die Fläche (x) übergeführt wird, wobei dann weitere geometrische Gebilde von den Flächenelementen in starrer Koppelung mitgenommen werden. Im Prinzip gleichwertig ist damit die andere Auffassung, daß die gegebene Fläche als starres Ganze auf der Biegungsfläche rollt. Wir geben dieser zweiten Auffassung fürs erste den Vorzug und nennen $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ das beim Rollen mitgeführte Koordinatendreikant der Fläche $(\mathfrak{x})$. Es gelten dann Beziehungen von der Form:

$$dx = X^{(1)} d\xi + X^{(2)} d\eta + X^{(3)} d\zeta. \tag{1}$$

Wir führen auch die Parameter α, β der Asymptotenlinien von (x) ein, wobei angenommen sei, daß u, v als Integrale der sog. Darbouxschen Differentialgleichungen des Biegungsproblems (Christoffelschen Invarianzen für die gemischten zweiten Ableitungen) durch α und β ausgedrückt sind. *In korrespondierenden Punkten möge die α-Linie von (x) mit der u-Linie von $(\mathfrak{x})$ im Windungssinne (Vorzeichen der Torsion) übereinstimmen.* Unter dieser Annahme gelten die hinsichtlich des Vorzeichens der rechten Seite eindeutigen Beziehungen:

$$\begin{cases} M\,du + N\,dv = \mathfrak{M}(u_\alpha\, d\alpha - u_\beta\, d\beta), \\ L\,du + M\,dv = \mathfrak{M}(-v_\alpha\, d\alpha + v_\beta\, d\beta). \end{cases} \tag{2}$$

Wir bedienen uns nun der sechs Rotationen des bewegten Achsendreikants $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ in bezug auf die Variablen α, β und schreiben die Differentialrelationen in der geläufigen Form:

$$\begin{cases} X^{(1)}_\alpha = r X^{(2)} - q X^{(3)}, & X^{(1)}_\beta = r' X^{(2)} - q' X^{(3)}, \\ X^{(2)}_\alpha = p X^{(3)} - r X^{(1)}, & X^{(2)}_\beta = p' X^{(3)} - r' X^{(1)}, \\ X^{(3)}_\alpha = q X^{(1)} - p X^{(2)}, & X^{(3)}_\beta = q' X^{(1)} - p' X^{(2)}. \end{cases} \tag{3}$$

Mit Berücksichtigung von (2) erhält man die Werte:

$$\begin{cases} p = \dfrac{2v_\alpha}{\varrho}\xi_v, \quad q = -\dfrac{2v_u}{\varrho}\eta_v, \quad r = \dfrac{2v_\alpha}{\varrho}\zeta_v, \\ p' = -\dfrac{2u_\beta}{\varrho}\xi_u, \quad q' = -\dfrac{2u_\beta}{\varrho}\eta_u, \quad r' = -\dfrac{2u_\beta}{\varrho}\zeta_u, \end{cases} \tag{4}$$

wobei

$$\varrho = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\mathfrak{M}}, \qquad K = -\frac{1}{\varrho^2}$$

ist.

Digitized by Google

Erinnert sei hier an einen wichtigen Begriff aus der Theorie des Rollens isometrischer Flächen. Die Fortschreitungsrichtung des Berührungspunktes und die als instantane Drehachse dienende Tangente heißen *kinematisch-konjugiert* (diese Beziehung ist wechselseitig), ebenso auch die von den betreffenden Flächentangenten berührten Kurven. Unsere Formeln (4) bestätigen einen Satz von Bianchi[7]): Kinematisch-konjugiert zu einer Asymptotenlinienschar der einen Fläche sind die Asymptotenlinien der anderen mit dem entgegengesetzten Windungssinn.

Rückt also der Berührungspunkt auf der α-Kurve weiter, so erfolgt die infinitesimale Drehung um die Tangente der v-Linie. Diese Zuordnung zwischen α- und v-Tangente einerseits, zwischen β- und u-Tangente andrerseits verwandelt sich in die umgekehrte, wenn man an Stelle der Fläche $(\mathfrak{x})$ die symmetrische Fläche auf der anderen Seite der ruhenden Biegungsfläche rollen läßt.

Wir betrachten jetzt die vom Nullpunkt M des bewegten Koordinatensystems beschriebene *Rollfläche* (M). Es wird:

$$x^{(M)} = x - \mathfrak{x} X^{(1)} - \mathfrak{y} X^{(2)} - \mathfrak{z} X^{(3)}. \tag{5}$$

Mit Benutzung von (1), (3), (4) findet man:

$$\begin{cases} x_\alpha^{(M)} = \dfrac{2v_\alpha}{\varrho}\left[(\mathfrak{y}\mathfrak{z}_v - \mathfrak{z}\mathfrak{y}_v) X^{(1)} + (\mathfrak{z}\mathfrak{x}_v - \mathfrak{x}\mathfrak{z}_v) X^{(2)} + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_v - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_v) X^{(3)}\right], \\ x_\beta^{(M)} = -\dfrac{2u_\beta}{\varrho}\left[(\mathfrak{y}\mathfrak{z}_u - \mathfrak{z}\mathfrak{y}_u) X^{(1)} + (\mathfrak{z}\mathfrak{x}_u - \mathfrak{x}\mathfrak{z}_u) X^{(2)} + (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_u) X^{(3)}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Diese Formeln liefern übrigens eine aus der Theorie der Verbiegung der Strahlenkongruenzen im Beltramischen Sinne bekannte Tatsache: Die mit den Flächenelementen der zu verbiegenden Fläche gekoppelten Strahlen, die vor der Deformation in einem Punkte zusammenstoßen, bleiben stets die Normalen der von den Endpunkten gebildeten Fläche. Man erhält in der Tat für die Flächennormale von (M) die Richtung $\mathfrak{x} X^{(1)} + \mathfrak{y} X^{(2)} + \mathfrak{z} X^{(3)}$.

2. Es liege nun das *einschalige Hyperboloid*

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} - \frac{\mathfrak{z}^2}{c^2} = 1$$

vor, das wir in der üblichen Weise auf die Parameter u, v der Erzeugenden beziehen:

7) Die Theorie des Rollens aufeinander abwickelbarer Flächen hat Bianchi auf die Betrachtung der Systeme von ∞^2 Kugeln gegründet: Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili. Rom, Acc. Linc. Mem. (5) 12 (1918), Fsc. X. Der angeführte Satz findet sich auch in der 3. Aufl. der Lezioni, Bd. 2 (1923), S. 121.

Digitized by Google

$$(7)\qquad \mathfrak{x} = a\frac{1+uv}{u+v}, \qquad \mathfrak{y} = b\frac{u-v}{u+v}, \qquad \mathfrak{z} = c\frac{1-uv}{u+v}.$$

(x) sei wiederum die Biegungsfläche, auf der das Hyperboloid rollen soll. Die Differentialgleichungen für die Funktionen u, v von α und β werden bei den folgenden Entwicklungen nicht gebraucht. Bemerkt sei aber, daß sie sich mittels der hier eingeführten Rotationen in eine neue Form bringen lassen, die, wie bei späterer Gelegenheit gezeigt werden soll, als Ausgangspunkt für eine weitgehende Verallgemeinerung der Bianchischen Transformation B_k dienen kann.

Vermöge der leicht zu bestätigenden Gleichungen

$$(8)\qquad \mathfrak{y}\mathfrak{z}_u - \mathfrak{z}\mathfrak{y}_u = abc\frac{\mathfrak{x}_u}{a^2}, \qquad \mathfrak{y}\mathfrak{z}_v - \mathfrak{z}\mathfrak{y}_v = -abc\frac{\mathfrak{x}_v}{a^2} \quad \text{usw.}$$

geben wir den Ableitungen der durch (5) dargestellten laufenden Koordinaten der Rollfläche (M) des Mittelpunkts die folgende Gestalt:

$$(9)\qquad \begin{cases} x_\alpha^{(M)} = -\dfrac{2abcv_\alpha}{\varrho}\left[\dfrac{\mathfrak{x}_v}{a^2}X^{(1)} + \dfrac{\mathfrak{y}_v}{b^2}X^{(2)} - \dfrac{\mathfrak{z}_v}{c^2}X^{(3)}\right], \\ x_\beta^{(M)} = -\dfrac{2abcu_\beta}{\varrho}\left[\dfrac{\mathfrak{x}_u}{a^2}X^{(1)} + \dfrac{\mathfrak{y}_u}{b^2}X^{(2)} - \dfrac{\mathfrak{z}_u}{c^2}X^{(3)}\right]. \end{cases}$$

Um die Richtungen der Erzeugenden des rollenden Hyperboloids bzw. die Tangentenrichtungen ihrer Biegungslinien auf (x) in Rechnung zu setzen, schreiben wir:

$$\xi = x_v = \mathfrak{x}_v X^{(1)} + \mathfrak{y}_v X^{(2)} + \mathfrak{z}_v X^{(3)}, \quad \xi' = x_u = \mathfrak{x}_u X^{(1)} + \mathfrak{y}_u X^{(2)} + \mathfrak{z}_u X^{(3)}.$$

Mit Benutzung von (3), (4) folgt:

$$\xi_\alpha = (\mathfrak{x}_{uv}u_\alpha + \mathfrak{x}_{vv}v_\alpha)X^{(1)} + (\mathfrak{y}_{uv}u_\alpha + \mathfrak{y}_{vv}v_\alpha)X^{(2)} + (\mathfrak{z}_{uv}u_\alpha + \mathfrak{z}_{vv}v_\alpha)X^{(3)}$$

und mit Hilfe von (9) sowie mittels der Beziehung

$$\frac{(\mathfrak{x}_v)^2}{a^2} + \frac{(\mathfrak{y}_v)^2}{b^2} - \frac{(\mathfrak{z}_v)^2}{c^2} = 0$$

und zweier weiterer, die sich daraus durch Differentiation nach u und v ergeben:

$$\sum \xi x_\alpha^{(M)} = 0, \qquad \sum \xi_\alpha x_\alpha^{(M)} = 0.$$

Ebenso erhält man:

$$\sum \xi' x_\beta^{(M)} = 0, \qquad \sum \xi'_\beta x_\beta^{(M)} = 0.$$

ξ und ξ' sind hiernach die Richtungen der Binormalen der von M beschriebenen α- bzw. β-Kurve.

Digitized by Google

M' sei das *Spiegelbild* von M in bezug auf die Tangentialebene von (x). Die Fläche (M') ist Ort des Mittelpunkts eines zu $(\mathfrak{x})$ symmetrischen Hyperboloids, das auf der anderen Seite der Biegungsfläche (x) rollt. Dabei ändert sich aber der voraufgeschickten allgemeinen Bemerkung zufolge die Zuordnung zwischen den asymptotischen Tangenten der festen und der rollenden Fläche. Man schließt daraus, daß die α-Kurve von (M) mit der β-Kurve von (M') die Schmiegungsebene, nämlich die durch MM' gelegte Normalebene zur Richtung ξ, gemein hat. Analoges gilt für die β-Kurve von (M) und die α-Kurve von (M'). Der am Ende der Einleitung ausgesprochene Satz läßt erkennen, daß die Punkte P und P', in denen sich einerseits die α-Tangente von (M) und die β-Tangente von (M'), andrerseits die β-Tangente von (M) und die α-Tangente von (M') treffen, zwei Flächen (P) und (P') beschreiben, die von den Tangentenpaaren ebenfalls berührt werden. Die Punkte P und P' liegen aus Gründen der Symmetrie in der Tangentialebene von (x). Die α-Tangente MP von (M) ist senkrecht zur Binormalen und zur Flächennormalen, stellt also das Lot zu der Ebene dar, die durch M und die v-Gerade gelegt ist.

Das Ergebnis gewinnt an Anschaulichkeit, wenn wir jetzt statt des Rollens den Biegungsvorgang in den Vordergrund rücken. Wir können sagen: *Werden mit den einzelnen Flächenelementen des Hyperboloids sein Mittelpunkt M, dessen Gegenpunkt bezüglich der Tangentialebene M', sowie die oben definierten Punkte der Tangentialebene P und P' starr gekoppelt, so bilden nach beliebiger Verbiegung eines geeigneten Teils des Hyperboloids die Punkte M, P, M', P' stets vier Flächen, die von den Seitenpaaren der windschiefen Vierecke MPM'P' berührt werden. Dabei sind MP und MP' für die Fläche (M), M'P' und M'P für (M') immer die Tangenten der α- und der β-Kurven, die den Asymptotenlinien der Biegungsfläche (x) entsprechen.*

3. Es läßt sich ein zweiter Satz ähnlichen Inhalts aufstellen. Wir fassen die beiden Punkte N und N' ins Auge, in denen die Kehlellipse des rollenden Hyperboloids jeweils von der Tangentialebene geschnitten wird. N liegt auf der v-Geraden, N' auf der u-Geraden. Die Beschränkung auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene des Hyperboloids ist unwesentlich; die zu beweisende Eigenschaft überträgt sich unmittelbar auf die analogen Punktepaare in den beiden anderen Hauptebenen.

Es wird:

$$x^{(N)} = x - \frac{\delta}{\mathfrak{z}_v} x_v = x^{(M)} - \frac{1}{\mathfrak{z}_v}\left[(\mathfrak{z}\,\mathfrak{x}_v - \mathfrak{x}\,\mathfrak{z}_v)\,X^{(1)} - (\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}_v - \mathfrak{z}\,\mathfrak{y}_v)\,X^{(2)}\right]$$

Digitized by Google

und mit Berücksichtigung von (8):

$$x^{(N)} = x^{(M)} + \frac{abc}{\mathfrak{z}_v}\left(\frac{\mathfrak{y}_v}{b^2} X^{(1)} - \frac{\mathfrak{x}_v}{a^2} X^{(2)}\right).$$

Wir differentiieren nach α und erhalten nach einigen Umformungen:

$$x_\alpha^{(N)} = -\frac{2c^2 u_\alpha}{(u+v)^2(\mathfrak{z}_v)^2}(\mathfrak{x}_v X^{(1)} + \mathfrak{y}_v X^{(2)}), \tag{10}$$

sodaß sich

$$\sum x_\alpha^{(N)} X^{(3)} = 0$$

und weiter mit Benutzung von (3) und (4)

$$\sum x_\alpha^{(N)} X_\alpha^{(3)} = 0$$

ergibt. Danach stellt $X^{(3)}$, d. h. die $\mathfrak{z}$-Achse des rollenden Hyperboloids, die Richtung der Binormalen für die α-Kurve auf der Ortsfläche des Punktes N dar. Indem wir gleichzeitig die Formel (10) deuten, sprechen wir das vorläufige Ergebnis aus: *Die von N und N', den Schnittpunkten der Erzeugenden mit der Kehllellipse beschriebene α- bzw. β-Kurve hat die Tangente der Kehllellipse zur eigenen Tangente und ihre Ebene zur Schmiegungsebene*[8]).

Man erkennt ohne weitere Rechnung, daß die ebenfalls durch N und N' gehende Kehllellipse des an der Tangentialebene gespiegelten Hyperboloids die gleiche Eigenschaft, aber unter Vertauschung der α-und β-Kurven besitzt. Ungleichnamige Kurven der die Flächen (N) und (N') bedeckenden Netze (α, β) haben demnach die Schmiegungsebene, die Ebene einer der beiden Kehllellipsen, gemein. Wir schließen wieder auf Grund der in der Einleitung gemachten Bemerkung, daß die von den Schnittpunkten ungleichnamiger Tangenten gebildeten beiden Flächen gleichfalls von den Tangenten paarweise berührt werden. Die Tangentenschnittpunkte, die mit Q und Q' bezeichnet sein mögen, erhält man leicht aus der bekannten Tatsache, daß die senkrechten Projektionen der Erzeugenden auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene mit den Tangenten der Kehllellipse zusammenfallen.

Wir können dem hiermit gewonnenen zweiten Satze die folgende Form geben: *Für einen jeden Punkt des Hyperboloids denken wir uns mit dem Flächenelement die beiden Schnittpunkte N, N' der Erzeugenden und der Kehllellipse starr gekoppelt, ebenso den Fußpunkt*

8) Rollt das Hyperboloid längs einer α-Asymptotenlinie von (x), so rollt es gleichzeitig auf einer von den v-Geraden gebildeten Biegungsregelfläche (Satz von Chieffi). Die Kehllellipse rollt dabei also derart, daß sie stets in die Schmiegungsebene ihrer Rollbahn, der α-Kurve des Punktes N, fällt.

Digitized by Google

Q des auf die Ebene der Kehlellipse gefällten Lotes sowie dessen Gegenpunkt Q' bezüglich der Tangentialebene. Wird nun das Hyperboloid beliebigen Biegungen unterworfen, so sind in den gekoppelten windschiefen Vierecken NQN'Q' die Seiten ständig Tangenten an die Ortsflächen der Ecken; NQ, NQ' einerseits, N'Q', N'Q andrerseits sind jeweils Tangenten der α- bzw. β-Kurven, die auf den Flächen (N) und (N') den Asymptotenlinien der Biegungsfläche entsprechen[9]).

Zwei Viereckssysteme der gleichen Art knüpfen sich an die Schnittpunkte der Erzeugenden mit den beiden anderen Hauptebenen des Hyperboloids.

§ 3.

Ein neuer mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängender viergliedriger Laplacescher Zyklus.

1. Stellen ϑ, ϑ' als Funktionen von α und β ein Lösungspaar der Differentialgleichungen[10])

$$2\vartheta_\alpha\vartheta'_\alpha = 2\vartheta_\beta\vartheta'_\beta = \vartheta^2+\vartheta'^2+1 \tag{1}$$

dar, so definieren sie intrinsek ein spezielles, vom Punkte X beschriebenes *Orthogonalnetz* (α, β) *auf der Einheitskugel* (Γ-*Netz*). Das zugehörige Quadrat des Linienelements wird:

$$\sum dX^2 = \frac{d\alpha^2}{(\vartheta_\alpha)^2} + \frac{d\beta^2}{(\vartheta'_\beta)^2}, \tag{2}$$

$X^{(1)}$, $X^{(2)}$ seien die Tangentenrichtungen; es ist also:

$$X_\alpha = \frac{1}{\vartheta_\alpha} X^{(1)}, \qquad X_\beta = \frac{1}{\vartheta'_\beta} X^{(2)}. \tag{3}$$

Zu einem zweiten, vom Punkte $\overline{X}$ beschriebenen Orthogonalnetz (α, β) der Kugel gehen wir mittels der Formeln

$$\overline{X} = \frac{1}{\vartheta^2+\vartheta'^2+1}\left[(\vartheta^2+\vartheta'^2-1)\,X + 2\vartheta'\,X^{(1)} + 2\vartheta\,X^{(2)}\right],$$

9) Hinsichtlich der besonderen Verhältnisse, die der Fall des Rotationshyperboloids bietet, sei auf § 6 der unter 3) genannten Arbeit verwiesen.

10) Als Ausgangspunkt kann ein Integral der Differentialgleichung $\varphi_{\alpha\beta} = e^{\varphi} - e^{-\varphi}$ dienen. — Neben der unter 4) angeführten Arbeit ist heranzuziehen: Jonas, Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloide iperbolico equilatero. Annali di Mat. (4) 2 (1924—25), S. 161.

Digitized by Google

$$\overline{X}^{(1)} = \frac{1}{\vartheta^2+\vartheta'^2+1}[2\vartheta X - 2\vartheta\vartheta' X^{(1)} + (\vartheta'^2+1-\vartheta^2) X^{(2)}],$$

$$\overline{X}^{(2)} = \frac{1}{\vartheta^2+\vartheta'^2+1}[2\vartheta' X + (\vartheta^2+1-\vartheta'^2) X^{(1)} - 2\vartheta\vartheta' X^{(2)}]$$

über. Es wird dann analog zu (2) und (3) unter Vertauschung von ϑ und ϑ':

$$\sum d\overline{X}^2 = \frac{d\alpha^2}{(\vartheta'_\alpha)^2} + \frac{d\beta^2}{(\vartheta_\beta)^2}, \qquad \overline{X}_\alpha = \frac{1}{\vartheta'_\alpha}\overline{X}^{(1)}, \qquad X_\beta = \frac{1}{\vartheta_\beta}\overline{X}^{(2)}.$$

Die beiden Krümmungskreise der durch X gehenden α- und β-Kurve schneiden sich zum zweiten Male im Punkte $\overline{X}$ und bilden auch dort, aber in umgekehrter Zuordnung zu den Kurven des Netzes, die Krümmungskreise. Daraus folgt (s. wieder den Schluß der Einleitung), daß die ungleichnamigen Tangenten der von X und $\overline{X}$ beschriebenen Orthogonalnetze (α, β) — es sind gleichzeitig die Tangentenpaare der beiden Kreise — sich in den Punkten x_0, x'_0 zweier Flächen treffen, die von ihnen ebenfalls paarweise berührt werden. Für diese erhält man, wenn $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ durch die Formeln

$$(4) \quad \xi = \vartheta X + X^{(2)} = \vartheta\overline{X} + \overline{X}^{(1)}, \qquad \xi' = \vartheta' X + X^{(1)} = \vartheta'\overline{X} + \overline{X}^{(2)}$$

definiert werden, die folgende Darstellung:

$$x_0 = \frac{\xi}{\vartheta}, \qquad x'_0 = \frac{\xi'}{\vartheta'}.$$

Da auf der Kugel die Orthogonalnetze mit den konjugierten Systemen zusammenfallen, sind die von den Punkten $X, x_0, \overline{X}, x'_0$ beschriebenen Netze (α, β) durch einen *viergliedrigen Zyklus Laplace-scher Transformationen* verbunden. Angemerkt seien dazu noch die Beziehungen:

$$(5) \qquad X = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \qquad \overline{X} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha}.$$

Wir erwähnen, ohne auf Einzelheiten einzugehen, daß durch

$$(6) \qquad x = \int(\xi' d\vartheta + \xi d\vartheta') = \int[X^{(1)} d\vartheta + X^{(2)} d\vartheta' + X d(\vartheta\vartheta')]$$

eine auf die Asymptotenlinien (α, β) bezogene *Biegungsfläche* (x) *des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids* $z = xy$ bestimmt ist. In der Tat folgt aus (4):

$$\sum \xi^2 = \vartheta^2+1, \qquad \sum \xi'^2 = \vartheta'^2+1, \qquad \sum \xi\xi' = \vartheta\vartheta'$$

und damit aus (6):

$$\sum dx^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + [d(\vartheta\vartheta')]^2.$$

Digitized by Google

Es ist also: $\mathfrak{x} = \vartheta$, $\mathfrak{y} = \vartheta'$, $\mathfrak{z} = \vartheta\vartheta'$; ξ und ξ' bedeuten die Tangentenrichtungen der verbogenen Erzeugenden.

2. Der Nachtrag zu den hier nur skizzierten Ergebnissen der früheren Untersuchung besteht nun in der Auffindung eines zweiten viergliedrigen Laplaceschen Zyklus, der mit dem eben betrachteten in eigenartiger Weise zusammenhängt. Die vom Koordinatenanfang zu den korrespondierenden Punkten der vier Netze gezogenen Radien hatten die Richtungen X, ξ, $\overline{X}$, ξ'. Dieselben vier Richtungen kommen in dem neuen Zyklus den Seiten des veränderlichen windschiefen Vierecks zu, dessen Ecken wieder konjugierte Netze (α, β) beschreiben:

Mit A, B, C, D wollen wir die Eckpunkte bezeichnen; M und M' seien die Mitten der Gegenseiten AB und CD. Wir definieren zunächst die Ortsflächen der Punkte M und M' durch:

$$(7) \qquad x^{(M)} = \int(\zeta' d\eta - \eta' d\zeta), \qquad x^{(M')} = \int(\zeta d\eta' - \eta d\zeta'),$$

wobei ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' zyklisch zu permutieren und die den Quadraturen anhaftenden additiven Konstanten so zu wählen sind, daß die endlichen Relationen

$$(8) \qquad x^{(M)} - x^{(M')} = \eta\zeta' - \zeta\eta' \quad \text{usw.}$$

gelten. Die Flächen (M) und (M'), deren Normalen bezüglich die Richtungen ξ' und ξ haben, bilden die Brennflächen einer W-Kongruenz[11]). Wir benötigen noch eine wichtige Umformung der Gleichungen (7):

$$(9) \qquad \begin{cases} x_\alpha^{(M)} = \xi\,\vartheta_\alpha - \xi_\alpha\,\vartheta, & x_\beta^{(M)} = -(\xi\,\vartheta_\beta - \xi_\beta\,\vartheta), \\ x_\alpha^{(M')} = \xi'\,\vartheta'_\alpha - \xi'_\alpha\,\vartheta', & x_\beta^{(M')} = -(\xi'\,\vartheta'_\beta - \xi'_\beta\,\vartheta'). \end{cases}$$

Die Ecken A, B, C, D des Vierecks stellen sich jetzt in der folgenden Weise dar:

$$(10) \qquad \begin{cases} x^{(A)} = x^{(M)} + \xi\,\vartheta, & x^{(B)} = x^{(M)} - \xi\,\vartheta, \\ x^{(C)} = x^{(M')} + \xi'\,\vartheta', & x^{(D)} = x^{(M')} - \xi'\,\vartheta'. \end{cases}$$

Mit Hilfe von (9) ergeben sich die einfachen Beziehungen:

$$(11) \begin{cases} dx^{(A)} = 2(\xi\,\vartheta_\alpha\,d\alpha + \xi_\beta\,\vartheta\,d\beta), & dx^{(B)} = -2(\xi_\alpha\,\vartheta\,d\alpha + \xi\,\vartheta_\beta\,d\beta), \\ dx^{(C)} = 2(\xi'\,\vartheta'_\alpha\,d\alpha + \xi'_\beta\,\vartheta'\,d\beta), & dx^{(D)} = -2(\xi'_\alpha\,\vartheta'\,d\alpha + \xi'\,\vartheta'_\beta\,d\beta). \end{cases}$$

11) Es besteht nämlich Korrespondenz der nicht gleichzeitig den Developpablen entsprechenden konjugierten Systeme (α, β). — Die Flächen (M') und (M) treten in der unter 10) zitierten Abhandlung als die zweiten Assoziierten der beiden Hauptevolventenflächen auf.

Digitized by Google

Diesen Formeln entnimmt man leicht, daß auf den vier Flächen (A), (B), (C), (D) die Kurvennetze (α, β) konjugiert sind und daß die beiden Gegenseiten AB und CD (mit den Richtungen ξ und ξ') α-Tangenten der Flächen (A) und (C) und β-Tangenten der Flächen (B) und (D) darstellen.

Um für das andere Paar Gegenseiten AD und BC die entsprechende Eigenschaft nachzuweisen, ziehen wir aus § 1, 6 der unter [10]) angeführten Arbeit die folgenden Hilfsformeln heran:

$$\eta\zeta' - \zeta\eta' = \xi_\beta \vartheta'_\beta - \xi'_\beta \vartheta_\beta, \qquad \xi\vartheta + \xi'\vartheta' = \xi_\beta \vartheta'_\beta + \xi'_\beta \vartheta_\beta.$$

Wir finden so:

$$x^{(A)} - x^{(D)} = x^{(M)} - x^{(M')} + \xi\vartheta + \xi'\vartheta' = \eta\zeta' - \zeta\eta' + \xi\vartheta + \xi'\vartheta'$$
$$= 2\xi_\beta \vartheta_\beta = 2\xi'_\alpha \vartheta'_\alpha.$$

Unter Berücksichtigung von (5) und (11) ersieht man, daß die Seite AD (mit der Richtung $\overline{X}$) auf (A) die β-Kurve und auf (D) die α-Kurve berührt; ebenso überzeugt man sich davon, daß BC (Richtung X) Tangente der α-Kurve von (B) und Tangente der β-Kurve von (C) ist.

Demnach gilt der folgende Satz: *Die von den Punkten A, B, C, D beschriebenen konjugierten Netze (α, β) hängen durch einen viergliedrigen Zyklus Laplacescher Transformationen zusammen. Die Mittelpunkte M, M' der beiden Gegenseiten AB und CD beschreiben gleichfalls konjugierte Systeme (α, β); ihre Verbindungslinie, gleichzeitig das gemeinsame Lot zu AB und CD, berührt die Flächen (M) und (M').*

3. Das erhaltene geometrische Gebilde weist eine Reihe weiterer Eigenschaften auf. Die Gegenseiten AB und CD bilden *Ribaucoursche Kongruenzen*, da die Developpablen aus den Mittelflächen (M) und (M') konjugierte Systeme ausschneiden. Die letzteren sind, worauf ich bereits früher hingewiesen habe, spezielle *Guichardsche G-Systeme: ihre beiderseitigen Laplaceschen Transformierten stellen Orthogonalsysteme, also Krümmungsliniennetze dar.* Neu und beachtenswert erscheint nun die Tatsache, daß die Punkte P, Q bzw. P', Q', die diese Laplaceschen Transformierten von (M) und (M') beschreiben, auf den anderen Gegenseiten des windschiefen Vierecks liegen.

Fällt man nämlich von M aus das Lot auf BC, so findet man für dessen Fußpunkt P:

$$x^{(P)} = x^{(M)} - \vartheta X^{(2)} = x^{(M)} - \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} x_\alpha^{(M)}. \tag{12}$$

An Hand des zweiten Ausdrucks erkennt man in (P) die Laplacesche Transformierte von (M) bezüglich der α-Kurven. Mittels (4), (9), (11) ergibt sich weiter:

Digitized by Google

(13) $x^{(P)} = x^{(M)} - \vartheta\xi + \vartheta^2 X = x^{(B)} + \vartheta^2 X = x^{(C)} - (\vartheta'^2 + 1) X,$

$$dx^{(P)} = \frac{\vartheta^2}{\vartheta_\alpha} X^{(1)} d\alpha - \frac{\vartheta'^2 + 1}{\vartheta'_\beta} X^{(2)} d\beta.$$

Danach sind in der Tat auf der Fläche (P) die Kurven (α, β) die Krümmungslinien; $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ ist das Hauptdreikant, die Gerade BC die Flächennormale. Die Punkte B und C sind die Krümmungsmittelpunkte; die Hauptkrümmungsradien haben die Werte $BP = \vartheta^2$, $-PC = -(\vartheta'^2 + 1)$. Analog zu (12), (13) stellt sich die Laplacesche Transformierte (Q) von (M) bezüglich der β-Kurven dar:

$$x^{(Q)} = x^{(M)} - \frac{\vartheta}{\vartheta_\beta} x_\beta^{(M)} = x^{(A)} - \vartheta^2 \overline{X} = x^{(D)} + (\vartheta'^2 + 1) \overline{X}.$$

Q liegt auf AD. Die Fläche (Q) hat AD zur Normalen, A und D zu Krümmungsmittelpunkten und besitzt dieselben Hauptkrümmungsradien wie (P), ϑ^2 und $-(\vartheta'^2 + 1)$, aber in umgekehrter Zuordnung zu den Krümmungslinien.

Die beiden Laplaceschen Transformierten (P') und (Q') von (M') sind gegeben durch:

$$x^{(P')} = x^{(M')} - \frac{\vartheta'}{\vartheta'_\alpha} x_\alpha^{(M')} = x^{(A)} - (\vartheta^2 + 1) \overline{X} = x^{(D)} + \vartheta'^2 \overline{X},$$

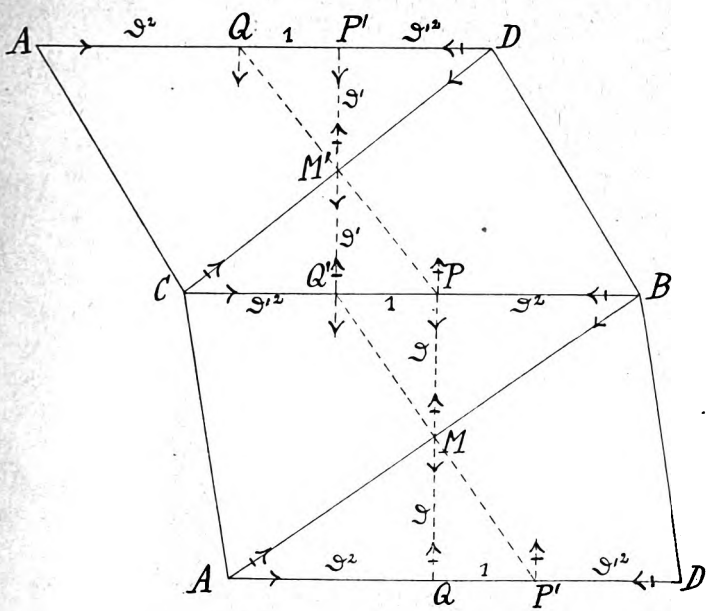
$$x^{(Q')} = x^{(M')} - \frac{\vartheta'}{\vartheta'_\beta} x_\beta^{(M')} = x^{(B)} + (\vartheta^2 + 1) X = x^{(C)} - \vartheta'^2 X.$$

P' liegt auf AD, Q' auf BC. Die Flächen (P) und (Q') einerseits, (Q) und (P') andrerseits bilden je ein Paar *paralleler Flächen mit dem Normalabstande 1.*

Das am Schluß des voraufgehenden Artikels ausgesprochene Ergebnis ist hiernach durch den folgenden Zusatz zu ergänzen: *Der aus den windschiefen Vierecken $ABCD$ bestehende viergliedrige Laplacesche Zyklus enthält zwei Normalenkongruenzen, die von den Gegenseiten BC und AD gebildet werden. Zu den Orthogonalflächen derselben gehören die beiden Paare Laplacescher Transformierter der von den Mitten M und M' der anderen Gegenseiten AB und CD beschriebenen Netze.*

4. Die Figur gibt das in leicht zu übersehender Weise ($\angle AMP' = \angle CM'P = 90^0$) aus den angenommenen Strecken $1, \vartheta, \vartheta'$ konstruierte *Netz des Vierflachs $ABCD$.* Es zerfällt in zwei Paare kongruenter Dreiecke. Die Flächenwinkel längs der Kanten BC und AD (Winkel der Brennebenen der beiden Normalenkongruenzen) werden Rechte. Die Linienzüge $QMPM'Q$ und $P'M'Q'MP'$ bilden die Schnitte des Vierflachs mit den Tangentialebenen von (M) und

Digitized by Google



(M'), die sich ihrerseits in MM', dem gemeinsamen Lot zu AB und CD, schneiden. Durch Pfeilspitzen werden die Geraden als Tangenten der verschiedenen Kurvennetze (α, β) gekennzeichnet; die α-Tangenten haben einen kleinen Querstrich erhalten.

Man wird schließlich im Hinblick auf die Sätze von § 2 noch die Frage aufwerfen, ob die Vierecke des hier betrachteten Systems bei den Verbiegungen des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids von den Flächenelementen desselben in starrer Koppelung mitgeführt werden. Bemerkt sei zunächst, daß ϑ und ϑ' die Parameter der Erzeugenden sind und daß X die Richtung der gekoppelten ξ-Achse, $\overline{X}$ ihr Spiegelbild in bezug auf die Tangentialebene darstellt. Der Sachverhalt ist nun folgender: *Allerdings kann jedes der ∞^2 Vierecke $ABCD$, soweit es sich um seine durch die Verbiegung des Paraboloids bedingte Drehung im Raume handelt, als mit dem betreffenden Flächenelement starr gekoppelt aufgefaßt werden. Nach dieser Operation muß es aber noch diejenige Translation erfahren, durch die der Mittelpunkt der Seite AB in den Punkt M, gegeben durch die nicht zu umgehenden Quadraturen* (7), *hineinrückt.* Der prinzipielle Unterschied zwischen den letzten Ergebnissen und denen des voraufgehenden Paragraphen ist damit klargestellt.

Digitized by Google

E. Study.

Ein Nachruf von E. A. Weiss (Bonn[1]).

Eduard Study wurde am 23. 3. 1862 in Koburg geboren, verlor früh seine Mutter und wurde von seinem Vater streng erzogen. Er studierte in Straßburg, Jena, Leipzig und München. Doch hat er Vorlesungen selten besucht und sich seine Kenntnisse durch Gespräche mit Kommilitonen und Abschreiben von Vorlesungsausarbeitungen erworben. 1884 promovierte er in München mit einer Dissertation über ein selbstgewähltes Thema und habilitiere sich ein Jahr darauf in Leipzig unter Felix Klein. Als Privatdozent siedelte er nach Marburg über, wo er 1893 a. o. Professor wurde. Nach kurzem Aufenthalt in Amerika wurde er 1894 als a. o. Professor nach Bonn, 1897 als o. Professor nach Greifswald berufen und kehrte 1904 als Ordinarius nach Bonn zurück. Dort hat er zuletzt abwechselnd vierstündig, meist durch zwei Semester hindurch über Differentialgeometrie, Invariantentheorie, Analytische Mechanik, Höhere Algebra, Funktionentheorie und Ausgewählte Kapitel der Höheren Geometrie gelesen. Umfangreichen Vorlesungsbetrieb liebte er nicht; doch ist sein Ruf als schlechter Lehrer mehr von Study selbst als von seinen Schülern verbreitet worden. Am 31. 3. 1927 wurde Study von den amtlichen Pflichten entbunden. Aber nur wenige Jahre durfte er sich einer von Vorlesungen ungestörten wissenschaftlichen Arbeit und seinen Lieblingsbeschäftigungen: Philosophischer

1) Vorgetragen in der 265. Sitzung am 30. 4. 1930.

Digitized by Google

Kritik und Biologisch-Entomologischen Studien widmen. Am 6. 1. 1930 erlag er einem Krebsleiden, dem sein gesundes Herz umsonst längere Zeit Widerstand geleistet hatte. Studys Freunde Engel und Hausdorff sprachen die Abschiedsworte an seiner Bahre.

Studys erste wissenschaftliche Arbeit ist eine biologische: Noch Student veröffentlicht er eine Abhandlung über die Schneckenfauna seiner näheren Heimat. Bald darauf, und auch noch vor seiner Promotion erscheinen drei kleinere mathematische Arbeiten: Die zweite 1883 im Crelleschen Journal[2]) bringt geometrische Konstruktionen aus dem Gedankenkreise Th. Reyes, bei dem Study in Straßburg gehört hatte. Study erzählte später gern, daß er damals, in seinem ersten Semester, alle Aufgaben aus dem ersten Bande von Reyes Geometrie der Lage gelöst habe, und es seien mehr gewesen, als man in der heutigen Auflage findet. Studys damalige Liebe zur synthetischen Geometrie kommt auch in einer der Thesen zum Ausdruck, die er bei seiner Promotion verteidigen wollte:

9. „Die synthetische Geometrie *im Sinne v. Staudt's* sollte einen obligatorischen Studiengegenstand für künftige Lehrer der Mathematik bilden."

Noch drei andere von den 13 Thesen, die Study zusammen mit der an Graßmannsche Ideen anknüpfenden Dissertation *„Über die Maßbestimmung extensiver Größen"* im Jahre 1884 der Philosophischen Fakultät der Universität München einreicht, sind bemerkenswert, weil sie als richtungsgebend für seine spätere wissenschaftliche Produktion gelten können:

6. „Man sollte weniger danach streben, die Grenzen der mathematischen Wissenschaften zu erweitern, als vielmehr danach, den bereits vorhandenen Stoff aus umfassenderen Gesichtspunkten zu betrachten."

2. „Eine Bezeichnung (Algorithmus, Calcul) ist nur dann ganz zweckmäßig, wenn sie alle in Betracht kommenden Verhältnisse und *nur* diese zum Ausdruck bringt."

3. „Bei Entwickelungen der *reinen* Mathematik ist der Gebrauch der sog. canonischen Formen möglichst zu vermeiden."

In der Tat: Auf ein naheliegendes, kerngesundes, wenn auch schon vorher von anderen behandeltes Problem (Sphärische Trigonometrie, Apollonisches Problem, Geraden-Kugeltransformation, Elliptische Funktionen) liebevoll einzugehen, auch die elementarste Aufgabe mit sachgemäßen Mitteln anzugreifen und wirklich zu erledigen, eine abgeschlossene Gesamtübersicht über einen zusammenhängenden Fragenkomplex zu geben: Darin sah Study eine seiner Hauptaufgaben. Dabei ist, mit wenigen Ausnahmen, der charakteristische Zug einer Studyschen Abhandlung die Verwendung einer natürlichen, dem Gegenstande angepaßten, willkürfreien und bis aufs kleinste ausgefeilten Formelsprache: Bald sind es höhere komplexe Zahlen, meist

2) *Elementare Beweise einiger geometrischer Sätze.* Crelle J. 94. (1883).

Digitized by Google

Quaternionen — aber nur dort, wo sie wirklich am Platze sind — die eine ausschlaggebende Rolle spielen, bald herrscht die Clebsch-Aronholdsche Symbolik, die Study, gleich nach seiner Dissertation dem Graßmannschen Kalkül bevorzugt [3]).

Damit zieht er eine Konsequenz, die sich folgerecht aus Kleins Erlanger Programm ergibt und sich dort als Schlußbemerkung ausgesprochen findet:

„Die analytischen Ausdrücke, welche bei der Untersuchung einer Mannigfaltigkeit im Sinne einer Gruppe entstehen können, müssen, ihrer Bedeutung nach, von dem Koordinatensystem, insofern es zufällig gewählt ist, unabhängig sein, und es gilt nun, diese Unabhängigkeit auch formal in Evidenz zu setzen. Daß dies möglich ist und wie es zu geschehen hat, zeigt die moderne Algebra, in der der formale Invariantenbegriff, um den es sich hier handelt, am deutlichsten ausgeprägt ist. Sie besitzt ein allgemeines und erschöpfendes Bildungsgesetz für invariante Ausdrücke und operiert prinzipiell nur mit solchen. Die gleiche Forderung soll man an die formale Behandlung stellen, auch wenn andere Gruppen, als die projektivische, zugrunde gelegt sind. Denn der Formalismus soll sich doch mit der Begriffsbildung decken, mag man nun den Formalismus nur als präzisen und durchsichtigen Ausdruck der Begriffsbildung verwerten, oder will man ihn benutzen, um an seiner Hand in noch unerforschte Gebiete einzudringen."

Das schrieb Klein im Jahre 1872. Aber bei der Herausgabe seiner Gesammelten Werke fügt er hinzu: „Ich habe späterhin die Forderung des Textes meinerseits nur wenig befolgt [4])."

So ist Study zwar äußerlich ein Schüler F. Kleins gewesen. Aber als seinen wissenschaftlichen Vater bezeichnete er gern Alfred Clebsch, der — vielleicht die Grundgedanken Kleins vorausahnend, sicherlich einem ausgesprochen künstlerischen Instinkte folgend — die Forderungen des Erlanger Programms schon früher erfüllt und die invariantentheoretische Methode in die Geometrie eingeführt hatte. Einmal mit Clebsch zusammen ein Weierstraß der Geometrie genannt zu werden: Das war das Ziel, das Study erstrebte. Was er uns jetzt — nach seinem Tode — hinterläßt, ist vor allem das *Ideal einer nach logischen und aesthetischen Gesichtspunkten sachgemäß und reinlich auf exacten Begriffsbildungen aufgebauten geometrischen Wissenschaft.*

3) „H. Graßmann's großartige Schöpfung ist zwar auch frei von Coordinaten, ist dafür aber von dem Begriffe des Maßes wesentlich abhängig, und daher für die Zwecke der projektiven Geometrie, wie wohl allen anderen Methoden, außer der symbolischen, überlegen, dennoch nicht die geeignete Methode. Das eigentliche Gebiet für die Anwendungen der Ausdehnungslehre ist die Mechanik, in der sie ja auch ihren Ursprung genommen hat." (Math. Ann. 27. (1886) S. 69.)

4) F. Klein, Gesammelte Mathematische Abhandlungen I. (1921) S. 488.

Digitized by Google

Von der Anschauung unabhängig, der eine zwar wichtige, aber nur heuristische Bedeutung zukommt, ist die Geometrie konsequent als ein besonderer Abschnitt der Zahlenlehre zu behandeln. Punkte, Ebenen und alle anderen geometrischen Gebilde werden ohne Umweg über eine unnötige und deshalb schädliche axiomatische Fundierung durch Zahlenkomplexe definiert, die nur zu invarianten, ihrem Typus nach a priori bekannten Ausdrücken zusammengefaßt in die geometrischen Untersuchungen eingehen. An Stelle unübersichtlicher und deshalb schwer kontrollierbarer Rechnungen zwischen einzelnen Koordinaten, einem schon durch das unruhige typographische Bild entmutigenden Chaos von Umformungen ohne geometrischen Sinn, tritt die Anwendung einiger weniger, in ihrer Struktur und gegenseitiger Abhängigkeit bekannter Fundamentalidentitäten zwischen Invarianten. Klar und meist eindeutig in ihrer Reihenfolge bestimmt fügen sich, — schon äußerlich den Gesetzen symmetrischer Anordnung folgend — die Gleichungen zusammen, die zum Beweise eines geometrischen Satzes führen. Ein solcher Satz erscheint dann als eine Gleichung (von bekanntem Typus) zwischen Invarianten (von bekanntem Typus), als eine Gleichung, die zugleich mit dem Satze seine mögliche Umkehrung enthält [5]). Die Anzahl der Identitäten, die zu seinem Beweise gebraucht wurden, bestimmen den Grad seiner Schwierigkeit und dadurch seine systematische Stellung im Lehrgebäude der Geometrie. In der Anzahl der innerhalb einer bestimmten Invariantentheorie vorhandenen Fundamentalidentitäten haben wir ein Maß für die Schwierigkeit dieser Geometrie zu erblicken.

Neben dieses Idealbild, das Study seinen Schülern weniger durch theoretische Erörterungen als durch sein unermüdliches Beispiel in Wort und Schrift einprägte, stellte er eine Menge praktischer, oft auf Einzelheiten gerichteter Forderungen: Begriffe, Worte und Zeichen sorgfältig zu wählen, Willkürlichkeiten auf das Mindestmaß zu beschränken, eine vorhandene Symmetrie auch nicht zeitweilig durch unnötige Bevorzugung einzelner Elemente oder Hinzunahme fremder Hilfsgrößen zu beeinträchtigen. Die natürliche Ordnung von Ausdrücken, wie sie sich im Verlaufe einer Rechnung ergeben, nicht mutwillig zu zerstören. Jeden auftretenden Zahlenkoeffizienten seiner Entstehung nach zu kennen und diese womöglich durch die Schreibweise in Evidenz zu setzen. Die gegenseitige Abhängigkeit und geometrische Bedeutung etwa vorkommender Irrationalitäten von vorneherein klarzustellen. Einfaches vor Schwierigerem zu erledigen: Vor Inangriffnahme des Infinitesimalen den algebraischen Apparat in Ordnung zu bringen. Den Geltungsbereich eines Satzes in allen Fällen sachgemäß zu begrenzen. Ins-

5) Eine solche Gleichung pflegte Study, um die Abgeschlossenheit ihres Gedankeninhaltes zu betonen, in ein Rähmchen einzuschließen, eine Gewohnheit, die er wohl von Sophus Lie übernommen hat und der seitdem viele Schüler Studys gefolgt sind.

Digitized by Google

besondere Sätze aus der komplexen Geometrie nicht mit Beschränkung auf das Reelle und mit Hilfsmitteln zu beweisen, die nur auf das Reelle zugeschnitten sind. Überhaupt die Bevorzugung des Reellen in der Geometrie ebenso wie die der Dimensionenzahl 3 als einen Anthropomorphismus zu empfinden. Den einzelnen Fehler gegenüber methodischer Unsauberkeit als harmlos und unerheblich zu beurteilen. Allgemeine Methoden von größerer Tragweite ausgeklügeltem Scharfsinn und heimlich vorbereitetem Kunstgriffe vorzuziehen. In der mathematischen Produktion eine philosophische Diät und künstlerische Betätigung, nicht ein weltanschaulich-unorientiertes Bohren nach verborgenen Einzelwahrheiten zu sehen. Werturteile nicht geschäftsmäßig und unter der Hand weiterzugeben, sondern sachverständige Kritik offen zu üben. —

Den ersten zusammenfassenden Niederschlag finden Studys geometrische Gedanken in dem 1889 erschienenen, seinem Freunde F. Engel gewidmeten Buche *„Methoden zur Theorie der Ternären Formen"*. Das Buch beginnt mit einer ausführlichen und präzisen Definition des Invariantenbegriffes. Daran schließen sich die Beweise der Fundamentalsätze an. Für die beiden ersten, von Clebsch und Gordan herrührenden Sätze gibt Study neue Beweise. Der dritte Fundamentalsatz rührt von Study selbst her. Schon früher hatte Gordan gezeigt, daß in der Theorie der Binären Formen eine einzige Relation, die Hauptidentität (das Multiplikationstheorem der zweireihigen Determinanten) zur Ableitung aller Identitäten zwischen Invarianten genügt. Study sucht das Analogen dazu im Ternären Gebiete und findet im Wesentlichen zwei Typen von Fundamentalidentitäten, welche die Rolle der Hauptidentität übernehmen: Das Multiplikationstheorem der dreireihigen Determinanten und die Relation, nach der man aus drei linearunabhängigen Punkten (Geraden) der Ebene jeden vierten (jede vierte) linear ableiten kann.

Auf die Wichtigkeit dieses Resultates [6]), nämlich der *Bestimmung eines irreduziblen Systems von Identitäten zwischen Fundamentalinvarianten* haben wir schon oben hingewiesen: Auf ihr beruht Studys Systematisierung der Geometrie.

Ausdrücklich muß nun hier hervorgehoben werden, daß Geometrie und Invariantentheorie keineswegs schlechthin, und daher auch für Study nicht identisch sind. Insofern die projektive Geometrie nur die Verhältnisse der Koordinaten geometrisch deutet, ist sie nur ein Teil der Invariantentheorie. Die projektive Geometrie gibt aber auch von sich aus andererseits zunächst mehr als die Invariantentheorie. Es besteht nämlich keine genaue Analogie zwischen symbolischen Rechnungen und geometrischen Konstruktionen, die

6) Dies Resultat hatte Study schon vorher in der Arbeit: *„Über ternäre lineare Formen."* Math. Ann. 30 (1887) angegeben.

Digitized by Google

zum Beweise eines und desselben Satzes führen. Auch gestaltet sich mitunter konstruktiv schwierig, was rechnerisch fast selbstverständlich erscheint und umgekehrt. Diese Erscheinung findet ihren Grund darin, daß den Operationen, die bei symbolischen Rechnungen eine Gleichung in die nächste überführen, also der Anwendung der Fundamentalidentitäten keine geometrische Konstruktion entspricht und zwar trivialerweise; denn, wenn man etwa in der Binären Hauptidentität einen Punkt variabel läßt, so erhält man — eben weil es sich um eine Identität handelt — nicht die Gleichung eines Punktes, der mit den übrigen drei invariant verbunden ist und dessen Konstruktion, als ausführbar postuliert, zur Fundamentalkonstruktion werden könnte. Die Stelle dieser Fundamentalkonstruktion im Binären Gebiete nimmt vielmehr die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes ein, deren analytischer Ausdruck von dem der Hauptidentität verschieden ist. Geometrische Konstruktion und invariante Rechnung decken sich also nicht und können sich nicht decken [7]).

„Zum Teil", so sagt Study, ist die Schwierigkeit nur scheinbar „Zum Teil ist die genannte Schwierigkeit aber auch prinzipieller Natur, und es weist an dieser Stelle die Wissenschaft wirklich noch eine bedeutende Lücke auf." (T. F. S. 28.) [8]).

Aber nicht mit solchen, im engeren Sinne geometrischen Fragen beschäftigt sich Study weiterhin in seinem Buche, welches ja nur die *Methoden* zur Theorie der Ternären Formen auseinandersetzen sollte und Leser voraussetzt, denen die projektive Geometrie geläufig ist. Heben wir aus dem Inhalte einige *Reihenentwicklungen* hervor, die Studys Eigentum sind und einige fruchtbare formale Verbesserungen: Study schreibt hier zuerst (ux) an Stelle von u_x und bemerkt, daß man in der binären Invariantentheorie (welche eine Sonderstellung einnimmt) mit einer Art von Fundamentalinvarianten an Stelle der beiden, bis dahin üblichen $(\alpha\beta)$ und α_ξ auskommen kann und daher muß. Endlich findet sich in den Ternären Formen zum ersten Male eine saubere und vollständige Darstellung des Übertragungsprinzips von Clebsch, welche den Zusammenhang etwa zwischen binären

7) Es ist aber natürlich in jedem Falle möglich, eine Konstruktion durch invariante Rechnung zu verfolgen.

8) Aus diesem Grunde spielt z. B. das Formenproblem in *geometrisch*-invariantentheoretischen Überlegungen (im Gegensatz zu *algebraisch*-invariantentheoretischen Untersuchungen etwa von Gordan,) keine ausschlaggebene Rolle. Schon in den einfachsten Fällen wird es nämlich zum Teil trivial und daher langweilig, zum Teil unmöglich, die Formen eines Systems geometrisch zu deuten, und die Reduktionsformeln sind wegen der darin vorkommenden +-Zeichen in den seltensten Fällen einer geometrischen Deutung fähig. Die Aufstellung eines Formensystems und aller Reduktionsformeln bildet allerdings ein brauchbares Rechenhilfsmittel für den Geometer.

Digitized by Google

und ternären Invarianten unter Verwendung einer Form vermittelt, welche gleichzeitig binäre und ternäre Veränderliche enthält.

Die abstrakte Darstellung und das Fehlen aller Beispiele waren die Gründe für den Mißerfolg der Ternären Formen: Der Verfasser hat es erleben müssen, die Restauflage eingestampft zu sehen. Ein zweiter Teil, dessen erste Kapitel schon vorbereitet waren, hat nicht erscheinen können. Er sollte die Theorie des Hesseschen Übertragungsprinzips unter Verwendung einer Form $(um)\,(\mu\tau)^2$ und wohl überhaupt die Theorie von Formen in mehreren Veränderlichen auch verschiedener Stufenzahlen enthalten. Dieser Stoff hat zum Teil in anderer Form Verwendung gefunden: Study selbst hatte schon vorher in einigen Abhandlungen die Raumkurve 4. Ordn. 2. Art (in einer dem Münchener Polytechnikum eingereichten Preisarbeit [9]) und die Veronesesche Fläche [10]) mittels solcher Formen untersucht und ein großer Teil seiner Schüler hat Formen dieser Art in Dissertationen behandelt. Die Beschäftigung mit biternären Formen ist schließlich auch ein Ausgangspunkt für die Entstehung der *Geometrie der Dynamen* [11]) geworden.

Zunächst allerdings ist die Zeit nach dem Erscheinen der Ternären Formen gruppentheoretischen Untersuchungen gewidmet. Das gruppentheoretische Rüstzeug dazu hatte sich Study durch Gespräche mit seinem Freunde Engel angeeignet. Von diesen Untersuchungen ist nur ein Teil, der sich auf den Zusammenhang zwischen Transformationsgruppen und komplexen Zahlen bezieht, von Study selbst publiziert worden [12]). Über andere Arbeiten, Gruppen betreffend, welche mit den projektiven Gruppen der Ebene oder des Raumes gleichzusammengesetzt sind, findet sich ein ausführliches Referat in Lie-Engel „Theorie der Transformationsgruppen" III (1893) S. 785—788. Schließlich sind noch die von F. Engel veröffentlichten [13]) Study schen Sätze über „*Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe*" zu nennen.

Nach der gruppentheoretischen Arbeitsperiode sehen wir Study auf den verschiedensten Gebieten nebeneinander publizieren: Algebraische und Differentialgeometrie, Nicht-Euklidische und Liniengeometrie, Geometrie im

9) Im Auszuge erschienen in der Abhandlung: *Über die Raumkurven vierter Ordnung, zweiter Art.* Leipz. Ber. 1886.

10) *Über die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem.* Math. Ann. 27 (1886).

11) Leipzig (1903). Wegen der Entstehungsgeschichte siehe dort: S. 439—443.

12) *Komplexe Zahlen und Transformationsgruppen.* Leipz. Ber. 41 (1889). *Über Systeme komplexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen.* Monatsh. f. Math. I. (1890). Vgl. die Darstellung in Lie-Scheffers, Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Leipzig (1893) Kap. 21.

13) F. Engel, Leipz. Ber. 1893.

Digitized by Google

komplexen Gebiete und Kinematik, Funktionentheorie, konforme Abbildung und Theorie der Differentialgleichungen verdanken ihm Beiträge. Im Rahmen dieses Vortrages soll aber keine vollständige Übersicht[14]) über alle Study-schen Arbeiten gegeben werden. Wir ziehen es vor, die Study sche Arbeitsweise an einer zusammenhängenden Folge besonders charakteristischer Arbeiten vorzuführen.

In den Arbeiten über höhere komplexe Zahlen treten die Hamilton-schen Quaternionen zum ersten Male in den Study schen Gesichtskreis. Es war bekannt, daß sich die Eulerschen Formeln für die Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt unter Benutzung dieser Quaternionen in der einfachen Gestalt:

$$x' = \alpha^{-1} x \alpha \qquad (N\alpha \neq 0)$$

schreiben lassen. Daraus ergeben sich die Koeffizienten a_{ik} einer ternären eigtl.-orthogonalen Transformation:

$$a_{00} x_i' = \sum_{k=1}^{k=3} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3)$$

als Funktionen der Eulerschen Parameter in der Gestalt:

$$a_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$
$$a_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{23} = 2\{\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1\}, \quad a_{32} = 2\{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Diese Formeln, Quaternionen und Orthogonale Transformationen, haben Study die Anregung zu einer großen Anzahl von Arbeiten gegeben, die wir jetzt verfolgen wollen.

Wir denken zunächst an Studys große Abhandlung über *„Sphärische Trigonometrie, Orthogonale Substitutionen und Elliptische Funktionen."*[15]) Ebenso wie durch Einführung der Eulerschen Parameter die zwischen den Koeffizienten einer orthogonalen Transformation bestehenden Relationen auf Identitäten zurückgeführt werden, so werden hier die zwischen den goniometrischen Funktionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks bestehenden Relationen zu Identitäten zwischen geeigneten Parametern reduziert. Der Gedankengang, der dazu führt, ist kurz der folgende:

---

14) Ein vollständiges Verzeichnis der Study schen Arbeiten erscheint in den Jahresberichten der D.M.V.

15) Abhandl. d. Math. Phys. Classe d. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig (1893). Vgl. auch *„Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung"*. Braunschweig (1923) § 4.

Digitized by Google

Drei Radii vectores, die weder selbst Minimalvektoren sind, noch zu je zweien einer Minimalebene angehören, bestimmen ein Dreikant und ein damit verbundenes Polardreikant. Die Orientierung der beiden Dreikante kann auf 2^6 verschiedene Weisen geschehen und jeder Orientierung entspricht ein sphärisches Dreieck auf der Einheitskugel. So werden zunächst 2^6 Dreiecke durch das Ausgangsdreikant bestimmt, von denen aber je vier, die sich nur in den Vorzeichen sämtlicher Seiten oder Winkel unterscheiden, nicht auseinandergehalten werden. Demnach gehören zu einen Dreikant 16 sphärische Dreiecke, die Study *Nachbardreiecke* nennt.

Die Kosinus und Sinus der Seiten und Winkel eines Dreiecks werden einfache irrationale orthogonale Invarianten der vorgegebenen Vektoren. Aus ihnen ergeben sich durch mühelose Rechnung unter Benutzung der zwischen den orthogonalen Fundamentalinvarianten bestehenden Identitäten Kosinus- und Sinussatz der Sphärischen Trigonometrie sowie die Gleichungen von Delambre. Diese Gleichungen, welche die goniometrischen Funktionen der halben Seiten und Winkel verbinden, enthalten einen Koeffizienten ε, der den Wert $+1$ oder -1 besitzen kann. Vermehrt man eine der Seiten oder einen der Winkel um 2π, so vertauschen sich diese beiden Werte. Daher ist es zweckmäßig, Seiten und Winkel nicht auf das Intervall $[0, 2\pi]$ zu beschränken, sondern frei variieren zu lassen. Auf dieser Festsetzung beruht *Studys Verallgemeinerung des Möbiusschen Dreiecksbegriffs.*

Study zeigt nun, eine Bemerkung von Gauß präzisierend, daß den beiden möglichen Werten von ε entsprechend *„Dreiecke erster und zweiter Art“* („eigentliche und uneigentliche Dreiecke“) *zu unterscheiden sind und daß jede der beiden Mannigfaltigkeiten sphärischer Dreiecke ein Kontinuum bildet.* Es sind danach in der sphärischen Trigonometrie zwei Arten von Formeln zu unterscheiden: solche, die sich auf beide Arten von Dreiecken zugleich beziehen und solche, paarweise auftretende Formeln, die nur für eine Art von Dreiecken gelten. („Formeln 1. und 2. Ordnung“ nach einer von W. Jacobsthal eingeführten Terminologie[16].)

Im Zusammenhange mit den Delambreschen Formeln ergibt sich nun für Study ferner eine *Parameterdarstellung der sphärischen Dreiecke:* Vier homogene Größen Ξ_i, irrationale Invarianten der Ausgangsvektoren, die sich auf natürliche Weise ergeben, wenn man die goniometrischen Funktionen der halben Seiten und Winkel durch orthogonale Invarianten ausdrückt, werden zu Parametern eines sphärischen Dreiecks gewählt. Die Einführung dieser Paramenter reduziert die Delambreschen Formeln zu Identitäten.

16) Vgl. dessen ausführliche Darstellung der Sphärischen Trigonometrie in Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementarmathematik. 2. Aufl. (1907). 6. Abschnitt.

Digitized by Google

Um aus dem Parametersystem Ξ_i die Kosinus der Seiten und Winkel des zugehörigen Dreiecks zu berechnen, sieht Study die Ξ_i als Eulersche Parameter einer orthogonalen Transformation mit den Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ an. Die Kosinus der Seiten und Winkel werden dann:

$$\cos a_\lambda = \frac{a_{\mu\nu}}{a_{\lambda\lambda}}; \quad \cos \alpha_\lambda = \frac{a_{\nu\mu}}{a_{\lambda\lambda}}.$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen sphärischer Trigonometrie und orthogonalen Transformationen hergestellt, zugleich aber auch die Grundlage für die Verwendung elliptischer Funktionen geschaffen; denn gewisse Quotienten von σ-Funktionen erweisen sich als proportional zu den Koeffizienten einer orthogonalen Transformation.

Will man auch die Sinus der Bestimmungsstücke eines Dreiecks mit den Parametern Ξ_i bestimmen, so muß man Hilfsgrößen H_i und Z_i durch Formeln vom Typus:

$$2H_0 = \Xi_0 + \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3$$
$$2Z_0 = \Xi_0 - \Xi_1 - \Xi_2 - \Xi_3$$

einführen und erhält dann:

$$\sin a_\lambda = \frac{4\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{a_{\lambda\lambda}}, \quad \sin \alpha_\lambda = \frac{4\sqrt{H_0 H_1 H_2 H_3}}{a_{\lambda\lambda}}.$$

Von diesen Formeln aus kommt man nun zu einer *Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke*, wenn man die Parameter Ξ_i als homogene Punktkoordinaten im Raume deutet. Dabei spielt das durch Nullsetzen der Größen Ξ_i, H_i, Z_i entstehende Tripel *desmischer Tetraeder* eine bevorzugte Rolle. Führt man kartesische Koordinaten $\Xi_i : \Xi_0$ ein, so erhält man die beiden einem Würfel einbeschriebenen (regulären) Tetraeder zusammen mit dem durch die Würfelaxen bestimmten Tetraeder (dem Koordinatentetraeder). An diese Figur knüpft sich die Raumeinteilung, welche einer Klassifikation der eigentlichen Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln in 16 verschiedene Familien entspricht. Als Schnittfigur:

$$H_0 H_1 H_2 H_3 > 0, \qquad Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 > 0$$

der beiden regulären Tetraeder entstehen nämlich zunächst vier Oktaeder, von denen eines regulär ist und ganz im Endlichen liegt, während die drei anderen aus je zwei Pyramiden bestehen, die gegenüberliegenden Ecken des ersten Oktaeders aufgesetzt im Unendlichen zusammenhängen.

Da die Figur eines Tripels desmischer Tetraeder durch eines der Tetraeder und einen fünften Punkt bestimmt ist, läßt sie eine Gruppe von 576 Kollineationen zu. Eine invariante Untergruppe dieser G_{576} ist die G_{16} der zweiseitigen (d. h. involutorischen oder identischen) Kollineationen, welche

Digitized by Google

jedes der drei Tetraeder in sich transformieren und durch die 9, von Paaren gegenüberliegender Kanten der drei Tetraeder bestimmten windschiefen Involutionen erzeugt wird. Die 16 Punkte, die durch Anwendung der Transformationen von G_{16} aus einem vorgegebenen Punkte hervorgehen, bilden eine Kummersche Konfiguration. Da nun die Transformationen von G_{16} — analytisch: Doppelvertauschungen und gewisse Vorzeichenwechsel der Koordinaten Ξ_i — alle möglichen Vorzeichenwechsel der Seiten- und Winkelkosinus eines sphärischen Dreiecks nach sich ziehen, findet Study den Satz: *„Sieht man ein sphärisches Dreieck als bestimmt an, wenn die Kosinus seiner Seiten und Winkel gegeben sind, so kann man die Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke durch eine im Allgemeinen eindeutig-umkehrbare Zuordnung derart auf die Punkte eines ebenen, dreifach ausgedehnten Raumes abbilden, daß den sechzehn zu demselben Dreikant oder Dreiflach gehörigen Nachbardreiecken die Punkte einer Kummerschen Konfiguration entsprechen“* [17]) und zwar verteilen sich die 16 Punkte der Konfiguration zu je vieren auf die vier genannten Oktaeder.

Will man bei der Abbildung auch die Sinus der Seiten und Winkel berücksichtigen, so muß man den möglichen Vorzeichen von:

$$\sqrt{H_0 H_1 H_2 H_3} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$$

entsprechend jedes der vier Oktaeder (nach Art einer Riemannschen Fläche) mit vier Raumblättern überdecken, die in den 12 Punkten zusammenhängen, welche je zweien der vier Oktaeder gemeinsam sind. Jedes der 16 Raumteile entspricht einer von 16 möglichen Gestalten eines reellen eigentlichen sphärischen Dreiecks.

Sollen endlich zugleich eigentliche und uneigentliche Dreiecke abgebildet werden, so muß man unter Einführung einer weiteren Irrationalität den ganzen Raum nochmals doppelt überdecken.

In der gleichen Beziehung wie die Kummersche Konfiguration zur G_{16}, steht eine umfassendere Konfiguration zur invarianten Untergruppe G_{96} von G_{576}. Diese Konfiguration ist von Brües [18]) als *Studysche Konfiguration* bezeichnet und im Zusammenhang mit der Desmischen Fläche untersucht worden.

Aber kehren wir zur Kummerschen Konfiguration zurück! Außer den 16 genannten, mit einer Kummerschen Konfiguration verbundenen Kollineationen, deren analytische Ausdrücke man durch Nullsetzen von Bilinearformen in kontragredienten Veränderlichen erhält, gestattet die Konfiguration bekanntlich noch 16 involutorische Korrelationen: Die Null-

17) Study, Sphärische Trigonometrie ..., S. 168.

18) M. Brües, *Zur Theorie der Desmischen Flächen vierter Ordnung.* Diss. Bonn 1910, § 22.

Digitized by Google

systeme von 6 paarweise konjugierten linearen Komplexen und die durch Zusammensetzung von je dreien dieser Nullsysteme entstehenden, paarweise identischen Polaritäten an Flächen 2. Ordn. und Klasse. Den Nullsystemen entsprechen 6 alternierende Bilinearformen in kogredienten Veränderlichen, den Flächen 2. Ordn. und Klasse je 10 in Punkt- oder Ebenenkoordinaten quadratische Formen. *Von diesen 42 Formen hat Study gezeigt*[19]), *daß sie ein vollständiges Formensystem der Gruppe* G_{16} *bilden* und zwar ist seine Untersuchung als ein Beispiel gedacht für eine, auf einer Reihenentwickelung beruhende Methode, die ganz allgemein für die Aufstellung vollständiger Formensysteme endlicher Gruppen entwickelt wird[20]).

Daß man die Gleichungen der 10 mit einer Kummerschen Konfiguration verbundenen Fundamentalflächen 2. Ordn. erhält, wenn man die Koeffizienten a_{ik} einer ternären orthogonalen Transformation als Funktionen der Eulerschen Parameter gleich Null setzt, war schon Darboux bekannt. Dieser Zusammenhang legt es nahe, auf die Koeffizienten a_{ik} die von Weber herrührende Charakteristikenbezeichnung zu übertragen, durch die jedem der beiden Reguli einer Fundamentalfläche die Indices der drei Fundamentalkomplexe zugeordnet werden, die sich in ihm schneiden. Study führt nun diese Bezeichnung ein[21]), indem er gleichzeitig eine neue, für das Folgende wichtige Festsetzung trifft: Eine Charakteristik soll nicht schlechthin einen Koeffizienten, sondern, je nach der Reihenfolge der Indices in der Charakteristik einen Koeffizienten mit bestimmtem Vorzeichen vertreten. Study setzt beispielsweise:

$$a_{00}^2 = [135] \cdot [246].$$

Zwischen den Quadraten der Koeffizienten a_{ik} bestehen nun bekanntlich 15 lineare Gleichungen, von denen aber nur 5 linearunabhängig sind. Sieht man also die a_{ik} als unabhängige Veränderliche an, die diesen 15 Relationen, zunächst aber noch nicht den zwischen Koeffizienten einer orthogonalen Transformation bestehenden bilinearen Beziehungen genügen, und deutet man sie als homogene Punktkoordinaten im R_9, so erhält man eine in diesem Raume verlaufende vierdimensionale Mannigfaltigkeit, die als vollständiger und irreduzibler Schnitt von 5 quadratischen Mannigfaltigkeiten die Ordnung 32 besitzt.

Erstens findet nun Study, daß die 15 quadratischen Relationen zwischen den a_{ik} *identisch werden mit den 15 Relationen, welche die aus den Koordinaten*

19) *Zur Theorie der Kummerschen Konfiguration und der orthogonalen Substitutionen.* Leipz. Ber. 44. (1892).

20) An diese Arbeit knüpft die Dissertation von J. Meyer an: *„Zur Theorie der Hesseschen Konfiguration und der zugehörigen Kollineationsgruppe."* Bonn. (1924).

21) *Mathematische Mitteilungen I: Über das Pascalsche Sechseck.* Leipz. Ber. 47. (1895).

Digitized by Google

von je drei Punkten eines Punktsextupels in der Ebene gebildeten dreireihigen Determinanten verbinden und daß sie sich in einer einzigen Formel:

$$[\lambda\mu\nu]\,[\varkappa ij] - [\mu\nu\varkappa]\,[\lambda ij] + [\nu\varkappa\lambda]\,[\mu ij] - [\varkappa\lambda\mu]\,[\nu ij] = 0$$

zusammenfassen lassen.

Sollen nnn die durch diese Gleichungen verbundenen Größen a_{ik} zum Koeffizientensystem einer orthogonalen Transformation werden, so müssen sie noch einer einzigen bilinearen Zusatzbedingung genügen, etwa:

$$a_{11}\,a_{12} + a_{21}\,a_{22} + a_{31}\,a_{32} = 0.$$

Schreibt man in dieser Gleichung $\sqrt{a_{ik}^2}$ an Stelle von a_{ik}, und schafft man nachträglich durch zweimaliges Quadrieren die Wurzelzeichen wieder fort, so ergibt sich eine, unter Berücksichtigung der linearen Relationen zwischen den Quadraten der a_{ik} in allen Indices symmetrische Bedingungsgleichung $B = 0$ welche in den a_{ik} vom achten Grade ist und also bei der Abbildung auf den R_9 eine M_8^8 liefert.

Der vollständige Schnitt von M_8^8 und M_4^{32} wird eine M_8^{256}. Diese zerfällt in 32 verschiedene M_8^8, von denen eine die Bildmannigfaltigkeit der orthogonalen Transformationen wird. Die Eulerschen Parameter liefern eine rationale Parameterdarstellung dieser Mannigfaltigkeit.

Deutet man jetzt wieder die Charakteristiken als Determinanten von je drei Punkten eines Punktsextupels in der Ebene, so liefert die Zusatzbedingung $B = 0$, ternär interpretiert, die Bedingung dafür, daß das Punktsextupel einem Kegelschnitt angehört. Die linke Seite der Bedingungsgleichung wird das Quadrat des Pascalschen Ausdruckes:

$$(123)\,(156)\,(264)\,(345) - (456)\,(423)\,(531)\,(612).$$

So zeigt Study zweitens, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die mit geeigneten Vorzeichen versehenen, aus den Determinanten von je drei Punkten eines Punktsextupels in der Ebene gebildeten Ausdrücke $\sqrt{(ikl)\,(mno)}$ *das Koeffizientensystem einer ternären orthogonalen Transfomation bilden, darin besteht, daß das Punktsextupel einem Kegelschnitt angehört*[22]).

Steht in der zuletzt besprochenen Arbeit die Deutung der Koeffizienten a_{ik} als homogener Punktkoordinaten im R_9 im Vordergrund, so gibt eine neue Interpretation den Ausgangspunkt für die Arbeit: „*Vereinfachte Begründung von Lies 'Kugelgeometrie I*“[23]). Study deutet die Koeffizienten als Graßmannsche Koordinaten von erzeugenden Ebenen einer M_4^2 im R_5.

Bekannt ist die von F. Klein herrührende Abbildung der Geraden

22) Soweit es sich um eine *hinreichende* Bedingung handelt, hatte dies schon Hesse auf binärem Wege gezeigt. Crelle J. 63 (1863). S. 250.

23) Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1926. Vgl. „Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln“. Math. Ann. 86—91. (1922—1924.)

Digitized by Google

des projektiven R_8 auf Punkte einer M_4^2 im R_5. Sie entsteht einfach dadurch, daß man die Plückerschen Koordinaten x_{ik} einer geraden Linie im R_8 oder die mit ihnen durch eine bestimmte lineare Substitution zusammenhängenden Größen: $\delta_0 : \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 : \delta_5$ als homogene Punktkoordinaten im R_5 deutet. Die zwischen den Linienkoordinaten bestehende Relation:

$$\delta_0^2 - \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2 - \delta_5^2 = 0$$

wird die Gleichung der M_4^2. Den linearen Mannigfaltigkeiten von Geraden im R_8 entsprechen lineare Punktmannigfaltigkeiten auf M_4^2 und zwar sind die linearen Mannigfaltigkeiten höchster Dimension je $\infty^{2 \cdot 3}$ „linksseitige“ und „rechtsseitige“ erzeugende Ebenen E_ξ und E_φ, die den Geradenbündeln mit den Scheiteln ξ und den Geradenfeldern in den Ebenen φ des R_3 entsprechen. Wie zwei Bündel oder zwei Felder stets eine Gerade gemeinsam haben, so schneiden sich zwei Ebenen der gleichen Art stets in einem Punkt. Wie ein Bündel und ein Feld im Allgemeinen keine Gerade gemeinsam haben, in dem Falle aber, daß sie eine Gerade gemeinsam haben, gleich ein Geradenbüschel, so sind zwei erzeugende Ebenen verschiedener Art entweder windschief oder schneiden sich, wenn sie einen Punkt gemein haben, gleich längs einer Geraden.

Eine Gerade β_{ik} auf M_4^2 ist damit das Bild eines Geradenbüschels oder auch der durch dieses Büschel bestimmten Figur: „Punkt ξ und Ebene φ in vereinigter Lage“, die S. Lie Flächenelement genannt hat und die Study mit Bianchi als *Facette* bezeichnet.

Wird nun die M_4^2 im R_5 mit einem nicht-tangierenden R_4 zum Schnitt gebracht, so entsprechen den Punkten der Schnitt-M_3^2 im R_4 die Geraden eines linearen Komplexes im R_3 und den Geraden der M_3^2 die Büschel von Komplexgeraden. Jedes derartige Büschel kann als Repräsentant seines Punktes oder auch seiner Ebene aufgefaßt werden. Durch die entsprechende Gerade β_{ik} auf M_3^2 läuft also eine Ebene E_ξ und eine Ebene E_φ. Man kann sagen, daß die Gerade β_{ik} die *Spur* der Ebenen E_ξ und E_φ auf der M_3^2 ist und daß das entsprechende Nullgeradenbüschel im R_3 die *Spur* seines Scheitels und seiner Ebene im linearen Komplexe ist. Um im R_5 die Zuordnung zwischen Ebenen E_ξ und E_φ einerseits und ihren Spuren andererseits eindeutig-umkehrbar zu machen, überdeckt jetzt Study das Geradenkontinuum der M_3^2 mit zwei Schichten von Geraden X und Geraden Y, die den Punkten und Ebenen des R_3 entsprechen sollen.

Bildet nun im R_8 ein Punkt ξ mit einer Ebene φ eine Facette, so schneiden sich die entsprechenden Ebenen E_ξ und E_φ auf M_4^2 in einer Geraden. Ihre Spuren X und Y auf M_3^2 „schneiden“ sich dann auch, wenn der Sonderfall, daß sich die Geraden „überdecken“, mit einbegriffen wird. Die Figur zweier inzidenter Geraden X und Y nennt Study ein „*Blatt*“. Eine Tangentialebene der M_3^2 schneidet M_3^2 in zwei Geraden. Sie enthält

Digitized by Google

also zwei Blätter, die durch Vertauschung der beiden Geradenschichten (Im R_3: Anwendung des Nullsystems) ausgewechselt werden.

Die Zuordnung zwischen den so erklärten Blättern der M_3^2 und den Facetten des R_3 ist eineindeutig und singularitätenfrei. Sie macht Study zur Grundlage der Geradenkugeltransformation: Ein nicht-tangierender R_3 des R_4 schneidet aus M_3^2 eine M_2^2 aus, die man unter gewissen Realitätsvoraussetzungen als Kugel bezeichnen darf. Diese Kugel trägt zwei *orientierte Kugeln,* die sich dadurch unterscheiden, daß ihre beiden Erzeugendenschaaren in verschiedener Weise als X- oder Y-Geraden aufgefaßt werden. Eine orientierte Kugel ist Ort von $\infty^{2\cdot 2}$ Blättern und kann als Mannigfaltigkeit (Verein) von $\infty^{2\cdot 2}$ Blättern von der charakteristischen Eigenschaft definiert werden, daß die X-Gerade jedes Blattes die Y-Gerade jedes anderen Blattes schneidet und umgekehrt. Dem entspricht im R_3 eine Mannigfaltigkeit von $\infty^{2\cdot 2}$ Facetten derart, daß der Punkt jeder Facette in der Ebene jeder anderen liegt (und umgekehrt). Die einzigen Mannigfaltigkeiten dieser Art sind die durch eine Gerade bestimmten Facettenmannigfaltigkeiten. So entspricht also jeder orientierten Kugel als Ort von Blättern eindeutig-umkehrbar eine Gerade des R_3 als Ort von Facetten. Zwei zusammengehörigen orientierten Kugeln entsprechen zwei Geraden, die in Bezug auf das ausgezeichnete Nullsystem polar sind. Den Nullgeraden selbst entsprechen (nicht-orientierbare) Punktkugeln.

Als einander berührende orientierte Kugeln werden jetzt solche erklärt, die ein Blatt gemeinsam haben. Berührenden orientierten Kugeln entsprechen im Linienraume zwei Geraden, die eine Facette gemeinsam haben und sich also schneiden. So haben wir eine Berührungstransformation, die den Geraden des Linienraumes orientierte oder Punktkugeln der M_3^2 zuordnet.

Dem sehr durchsichtigen Sachverhalt, den wir hier mit Worten geschildert haben, gibt nun Study eine ebenso einfache wie vollkommene analytische Darstellung. Wie schon erwähnt, beginnt er mit einer Parameterdarstellung der erzeugenden Ebenen auf M_4^2 mittels orthogonaler Transformationen. Schreibt man die Gleichung der M_4^2 in der Gestalt:

$$\vartheta_0^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_4^2 = \vartheta_1^2 + \vartheta_3^2 + \vartheta_5^2,$$

so sieht man unmittelbar, daß die erzeugenden Ebenen einer Familie, etwa die der linksseitigen (und ähnlich der rechtsseitigen) Ebenen als Schnitte von drei R_4 durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{00}\,\vartheta_1 &= a_{11}\,\vartheta_0 + a_{12}\,\vartheta_2 + a_{13}\,\vartheta_4, \\ a_{00}\,\vartheta_3 &= a_{21}\,\vartheta_0 + a_{22}\,\vartheta_2 + a_{23}\,\vartheta_4, \\ a_{00}\,\vartheta_5 &= a_{31}\,\vartheta_0 + a_{32}\,\vartheta_2 + a_{33}\,\vartheta_4, \end{aligned}$$

dargestellt werden können, in denen die a_{ik} Koeffizienten einer eigtl. orthogonalen Transformation bezeichnen. Ihre daraus leicht zu berechnenden

Digitized by Google

20 Graßmannschen Koordinaten werden paarweise gleich und den Koeffizienten der ternären orthogonalen Transformation proportional.

In einem ähnlichen Zusammenhang stehen die Geraden auf M_4^2 mit den Koeffizienten quaternärer orthogonaler Transformationen:

$$C.x_i' = \Sigma C_{ik} x_k. \qquad (i,k = 0,1,2,3)$$

Unter der Voraussetzung:

$$C_{00} = \xi_0 \varphi_0 + \xi_1 \varphi_1 + \xi_2 \varphi_2 + \xi_3 \varphi_3 = 0$$

werden ihre 15 Graßmannschen Koordinaten den übrigen 15 Koeffizienten C_{ik}, bilinearen Funktionen der Punktkoordinaten $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ und der Ebenenkoordinaten $\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$ des Linienraumes proportional. So ergibt sich analytisch die Abbildung einer durch ihre Koordinaten ξ_i und φ_i bestimmten Fazette auf die durch ihre Graßmannschen Koordinaten definierte Bildgerade der M_4^2 und umgekehrt.

Aus der M_4^2 wird nun durch das Flach $z_0 = 0$ eine M_3^2 ausgeschnitten. Die 10 Koordinaten einer Geraden dieser M_3^2 werden aus den Ausdrücken für die Koordinaten der erzeugenden Ebenen auf M_4^2 abgeleitet: Sie werden den Koeffizienten einer ternären eigentlich-orthogonalen Transformation proportional (wobei a_{00} nicht als von Null verschieden angenommen zu werden braucht.) Schließlich wird das Blatt durch 15 Koordinaten dargestellt, von denen 10 die Graßmannschen Koordinaten seiner Ebene (im R_4) sind und 5 andere der Orientierung, d. h. der Unterscheidung der beiden in einer Ebene liegenden Blätter dienen: Da die beiden, auf einer Tangentialebene der M_3^2 liegenden Blätter — wie oben ausgeführt wurde — im Linienraume zwei Facetten entsprechen, die durch zwei nullpolare Büschel ξ, φ und ξ', φ' mit einer gemeinsamen Geraden dargestellt werden, handelt es sich bei der Orientierung darum, die Facette ξ, φ von der Facette ξ', φ' zu unterscheiden. Im R_5 entsprechen diesen Facetten zwei Paare erzeugender Ebenen E_ξ, E_φ und $E_{\xi'}$, $E_{\varphi'}$, die sich in je einer Geraden schneiden. Die 5 zur Orientierung dienenden Blattkoordinaten ergeben sich, wenn man zu den 10 Koordinaten einer Tangentialebene von M_3^2 in R_4 die 5 weiteren Koordinaten bestimmt, die zusammen mit den genannten 10 die 15 Koordinaten einer dieser Geraden (oder ihrer Polarfläche) im R_5 liefern.

So zeigt Study auf verschiedene Weise, wie man analytisch vom Raume der Facetten zum Raume der Blätter und umgekehrt übergehen kann. Eines der hierher gehörigen Formelsysteme sei noch angeführt. Ist

$$F(z) \equiv z_0 z_1 - z_2 z_3 + z_4^2 = 0$$

die Punktgleichung der M_3^2 in homogenen Koordinaten $z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ und sind — wie bisher — ξ_i homogene Punktkoordinaten im Linienraume, so vermittelt das Gleichungssystem:

Digitized by Google

$$\begin{aligned} * \quad & z_4\xi_1 + z_1\xi_2 - z_3\xi_3 = 0 \\ -z_4\xi_0 \quad & * \quad -z_2\xi_2 + z_0\xi_3 = 0 \\ -z_1\xi_0 + z_2\xi_1 \quad & * \quad -z_4\xi_3 = 0 \\ z_3\xi_0 - z_0\xi_1 + z_4\xi_2 \quad & * \quad = 0 \end{aligned}$$

die Abbildung der Punkte ξ auf die Geraden von M_3^2; denn diese Gleichungen widersprechen sich für festes z, das der Gleichung $F(z) = 0$ nicht genügt. Genügt aber ein vorgegebenes z dieser Gleichung, so hat das (schiefsymmetrische) System den Rang 2 und stellt eine Gerade des ausgezeichneten Komplexes als Schnitt von vier Ebenen dar. Ist umgekehrt ξ gegeben, so hat das System stets den Rang 3 und liefert eine Gerade X der M_3^2.

Dieses Gleichungssystem und ein anderes, das den Zusammenhang zwischen Ebenen φ und Geraden Y vermittelt, ist das, was in der Study-schen Theorie an Stelle der Lie schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} X + iY + xZ + z &= 0 \\ x(X - iY) - Z - y &= 0 \end{aligned}$$

tritt, die im Euklidischen Falle den Zusammenhang zwischen Kugel- und Linienraum herstellen sollen: x, y, z sind dabei inhomogene Koordinaten im Linienraum, X, Y, Z inhomogene Koordinaten im Kugelraum [24]).

Durch die Geradenkugeltransformation ist Study u. a. zu einer neuen Konfiguration geführt worden. Bekanntlich kann man 5 nicht-orientierte Kugeln konstruieren, die sich paarweise berühren. Orientiert man diese Kugeln, so erhält man zweimal fünf orientierte Kugeln A_i und B_i, von denen jede vier andere berührt. Man kann die Bezeichnung so einrichten, daß die Kugel A_i alle Kugeln B_k $(i \neq k)$ berührt. Überträgt man die Figur der 2 . 5 Kugeln in den Linienraum, so erhält man eine *Doppelfünf* mit bemerkenswerten Eigenschaften. Beispielsweise bilden die vier Punkte, in denen eine ihrer Geraden ihre vier Treffgeraden schneidet, ein äquianharmonisches Quadrupel. Die Konfiguration war wohl nur deshalb früheren Geometern entgangen, weil sie notwendig imaginär ist [25]).

Daß übrigens die Geradenkugeltransformation nicht im Reellen möglich ist, liegt daran, daß die M_3^2, die sich durch Schnitt der Plücker schen M_4^2 ergibt, einen anderen Trägheitsindex besitzt, als die sphärische M_3^2.

24) Daß diese Gleichungen den Sachverhalt nur sehr lückenhaft wiedergeben, hatte Study schon früher auseinandergesetzt: *„Über Lies Kugelgeometrie“*. Jahresber. d. D. M. V. 25 (1916).

25) Sie ist inzwischen von A. Maurer in seiner Dissertation: *Doppelvieren und Doppelfünfen* (Bonn, 1929) ausführlich vom liniengeometrischen und gruppentheoretischen Standpunkte aus untersucht worden.

Digitized by Google

Die Beachtung solcher Realitätsverhältnisse hat ein besonderes Interesse, wenn man nach Parameterdarstellungen der automorphen Kollineationen von M_3^2 und M_4^2 fragt. Für M_4^2 sind 4 Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I.} \quad \delta_0^2 - \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2 - \delta_5^2 = 0.$$
$$\text{II.} \quad \delta_0^2 + \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2 - \delta_4^2 - \delta_5^2 = 0.$$
$$\text{III.} \quad \delta_0^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2 - \delta_4^2 - \delta_5^2 = 0.$$
$$\text{IV.} \quad \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + \delta_5^2 = 0.$$

Während es nach einem Satze von E. Cartan unmöglich ist, die Gruppe in den Fällen II und IV reell darzustellen, erhält man im Falle I für die Gruppe (G_{15}, H_{15}) der eigentlichen und uneigentlichen automorphen Transformationen von M_4^2 durch Übertragung der in der Projektiven Geometrie üblichen Parameterdarstellungen der Kollineationen und Korrelationen auf den Linienraum und damit auf die Plückersche M_4^2 zwei Darstellungen durch je 16 homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung und diese fallen für die reellen Transformationen von (G_{15}, H_{15}) reell aus. Aber auch im Falle III gibt es Parameterdarstellungen mit ähnlichen Eigenschaften, solche nämlich, bei denen die reellen Transformationen der Gruppe reellen Werten der Parameter entsprechen. *Diese Parameterdarstellungen hat Study aus gewissen Quaternionenformeln abgeleitet,* die in der Abhandlung: *„Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen I—IV“* [26]) entwickelt werden.

Study läßt sich von der Analogie mit den Kreisverwandtschaften der Gaußschen Ebene leiten: Wie man dort von den projektiven Transformationen eines binären Gebietes ausgehen kann, so beginnt Study hier die Untersuchung mit der Behandlung des Gleichungssystems:

$$px + qy = x',$$
$$rx + sy = y'.$$

Dabei stehen alle vorkommenden Zeichen für (reelle) Quaternionen, sodaß das System acht gewöhnliche lineare Gleichungen zwischen acht Unbekannten $x_0 x_1 x_2 x_3$, $y_0 y_1 y_2 y_3$ vertritt. Study bezeichnet nun mit $\tilde{x}$ die zu x konjugierte Quaternion und setzt:

$$P = \tilde{s}s.\tilde{p} - \tilde{r}s\tilde{q}; \qquad R = \tilde{q}q.\tilde{r} - \tilde{p}q\tilde{s};$$
$$Q = \tilde{r}r.\tilde{q} - \tilde{s}r\tilde{p}; \qquad S = \tilde{p}p.\tilde{s} - \tilde{q}p\tilde{r}.$$

Dann wird:

$$\begin{pmatrix} Pp + Rr, & Pq + Rs \\ Qp + Sr, & Qq + Ss \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla & 0 \\ 0 & \nabla \end{pmatrix},$$

26) Math. Zeitschr. 18 (1923), 21 (1924).

Digitized by Google

wo ∇ die von Study eingeführte *Nablafunktion* vertritt, die sich durch die vorgegebenen Quaternionen z. B. in der Gestalt:

$$\nabla = \begin{Bmatrix} p\,q \\ r\,s \end{Bmatrix} = p\tilde{p}\,.\,s\tilde{s} - p\tilde{r}s\tilde{q} - q\tilde{s}r\tilde{p} + q\tilde{q}\,.\,r\tilde{r}$$

ausdrücken läßt. So folgt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich das vorgegebene Gleichungssystem eindeutig nach x und y auflösen läßt, im Nichtverschwinden der Nablafunktion besteht und daß die Lösung sich in der Gestalt:

$$\nabla x = Px' + Ry',$$
$$\nabla y = Qx' + Sy',$$

schreiben läßt.

Da die Nablafunktion eine skalare, irreduzible Funktion vierten Grades der 16 Koordinaten von p, q, r, s ist, muß ihr Quadrat, von einem Zahlenfaktor abgesehen, mit der Determinante D des entsprechenden Systems von 8 linearen Gleichungen übereinstimmen. Study findet:

$$D = \nabla^2.$$

Daraus ergibt sich, daß die gewöhnliche Auflösungsmethode dieses speziellen Gleichungssystems nach der Cramerschen Regel das Resultat mit einem Faktor ∇ behaftet liefern würde, der sich nachträglich wieder fortheben würde und den auch nur vorläufig einzuführen als unsachgemäß gelten muß. In der Arbeit „*Zur Theorie der linearen Gleichungen*“ [27]) wird die Theorie der Quaternionen-Gleichungssysteme ausführlich behandelt und auf Systeme von beliebig vielen Unbekannten ausgedehnt. Insbesondere werden Eigenschaften der (verallgemeinerten) Nablafunktion untersucht: Obwohl die Nablafunktion keiner negativen Werte fähig ist gilt nach J. Schur der Satz: Sind die Koordinaten der m^2 Quaternionen eines Systems von Qnaternionengleichungen reell, so kann, wenn $m > 1$ ist, die zugehörige ∇-Funktion nicht als Summe von Quadraten reeller ganzer rationaler Funktionen jener Koordinaten dargestellt werden.

Study faßt jetzt das Quaternionen-Gleichungssystem als Quaternionentransformation auf, die den Quaternionen x, y die Quaternionen x', y' zuordnet. Für die Zusammensetzung solcher Transformationen ergibt sich eine einfache Formel, die der Formel für das Binäre Gebiet durchaus analog ist:

$$\begin{pmatrix} p'\,q' \\ r'\,s' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p\,q \\ r\,s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'p + q'r, & p'q + q's \\ r'p + s'r, & r'q + s's \end{pmatrix}$$

und die das Multiplikationstheorem der Nablafunktion nach sich zieht.

27) Acta math. 42 (1918).

Digitized by Google

Wie man nun von den Gleichungen der binären projektiven Transformation zu den linear-gebrochenen Transformationen einer gewöhnlichen komplexen Veränderlichen übergeht, so führt Study von den letzten Quaternionentransformationen zu den Formeln:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta}, \quad z' = \frac{l\bar{z}+m}{n\bar{z}+r} = \frac{\bar{z}\lambda+\mu}{\bar{z}\nu+\varrho}$$

hin. (Dabei dienen die Haken an den Bruchstrichen dazu, eine bestimmte Reihenfolge beim Ausmultiplizieren zu bezeichnen). Diese Transformationen enthalten 15 wesentliche Parameter und sind in ihrem, von Study erklärten, natürlichen Punktkontinuum, dem durch einen uneigentlichen Punkt abgeschlossenen Punktkontinuum von vier reellen Dimensionen, (dem *„Möbiusschen Kontinuum"*) überall definiert, eindeutig und stetig. *Sie stellen die Gruppe aller eigentlichen und uneigentlichen Möbiusschen* (konformen) *Transformationen erschöpfend dar.*

Wie die Gaußsche Ebene mit der Riemannschen Zahlenkugel durch stereographische Projektion zusammenhängt, und wie die Gruppe der Kreisverwandtschaften in der Ebene, auf die Kugel übertragen, im Raume die Gruppe der automorphen Kollineationen der Kugel induziert, so kann man auch von den Möbiusschen Transformationen im R_4 zu den automorphen Transformationen einer sphärischen Mannigfaltigkeit M_4^2 im R_5 übergehen Elegante Formeln für diese Transformationen hat Study in der Arbeit *„Über die Summen von fünf und sechs Quadraten und konforme Transformationen"* [28]) abgeleitet.

Die letztgenannten Arbeiten beschäftigen sich mit der M_3^2 im R_4 und der M_4^2 im R_5, also mit quadratischen Mannigfaltigkeiten in Räumen höherer Dimensionenzahl. C. Segre hatte über diese Mannigfaltigkeiten, besonders über die auf ihnen liegenden linearen Mannigfaltigkeiten höchster Dimensionenzahl, die grundlegenden allgemeinen Sätze aufgestellt. Studys Verdienste auf diesem Gebiete sind zweierlei. Er hat erstens, wie wir es schon an den bisher angeführten Beispielen gesehen haben, die Geometrie der einfachsten quadratischen Mannigfaltigkeiten in spezieller Untersuchung gefördert und zweitens ganz allgemein die Invariantentheorie der Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit entwickelt.

In der Arbeit: *„Über die Invarianten der projektiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht-verschwindender Diskriminante"* [29]) hat Study Fundamentalsätze bewiesen, die denen der projektiven Invariantentheorie analog sind. Er hat nämlich erstens gezeigt, daß man in der Invariantentheorie dieser Gruppe mit einer Art von Veränderlichen, z. B. Punkten, auskommt und daß es dann im Gebiete n^{ter} Stufe ($n \geqq 3$) in

28) Crelles Journal 157. (1927).

29) Leipz. Ber. 49 (1897). Vgl. auch § 12, § 13 des Study schen Lehrbuches.

Digitized by Google

einem System von unbeschränkt vielen Punkten nur zwei Typen irreduzibler Invarianten gibt: Die bilineare Invariante (XY) und die alternierende Invariante, die Determinante $(X_1 X_2 \ldots : X_n)$. Zweitens hat Study dann bewiesen, daß die zwischen diesen Invariantentypen bestehenden Relationen ebenfalls nur zwei Typen angehören. Diese Sätze veröffentlicht er 1897. Aber schon vorher hat er den ersten Satz für einzelne Werte von n bewiesen: Für $n = 3$ in dem oben erwähnten nicht-erschienenen 2. Teile der Ternären Formen mittels des Hesseschen Übertragungsprinzips[30]). Im Falle $n = 4$ durch ein räumliches Analogen zum Hesseschen Übertragungsprinzip[31]), im Falle $n = 6$ durch eine liniengeometrische Überlegung. Die genannten Fundamentalsätze sind Verallgemeinerungen der Fundamentalsätze über orthogonale Invarianten, die in den späteren differentialgeometrischen Veröffentlichungen Studys eine hervorragende Rolle spielen[32]).

Übrigens beschränkt sich Study nicht auf Invarianten der Gruppen regulärer quadratischer Mannigfaltigkeiten. In seiner Abhandlung: *„Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie I"*[33]) entwickelt er die Grundlagen zur invariantentheoretischen Behandlung der Elementargeometrie.

Studys Leistung innerhalb der Theorie der quadratischen Mannigfaltigkeiten besteht aber zweitens — wie wir schon oben sagten — darin, daß er die Theorie einzelner Mannigfaltigkeiten dieser Art ausführlich entwickelt hat. Von der M_3^2 im R_4 und der M_4^3 im R_5 ist schon die Rede gewesen. Wir kommen jetzt zu der interessantesten Untersuchung, die sich auf M_6^2 im R_7 bezieht. Die Arbeiten, die zu dieser M_6^2 führen, beginnen schon im Jahre 1890[34]). Study geht von den orthogonalen Transformationen in drei Veränderlichen aus. Die analytische Darstellung der Drehungen eines starren Körpers um einen Punkt besitzt zwei bemerkenswerte Eigenschaften: Man kann die Koeffizienten a_{ik} durch die Eulerschen Parameter rational ausdrücken und dabei werden die Zusammensetzungsformeln in den Parametern bilinear. Study sucht eine ähnliche Parameterdarstellung für die Bewegungen im Raume und findet zunächst: *Eine Darstellung der Bewegungen des Raumes durch sieben homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung existiert nicht. Dagegen können die Bewe-*

30) Hierauf bezieht sich die Anmerkung bei *Gordan-Kerschensteiner*, Vorlesungen über Invariantentheorie Leipzig (1887) S. 155.

31) *Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie.* Jahresber. d. D.M.V. 11 (1902), S. 323.

32) *Zur Differentialgeometrie der analytischen Curven.* Trans. Am. Math. Soc. X. (1909) § 1 Bewegungsinvarianten von Vektoren. Vgl. auch: *Einleitung in die Theorie der Invarianten* ... § 13 Die Fundamentalsätze der Algebra der Vektoren in allgemeiner Fassung.

33) Leipz. Ber. 48 (1896).

34) *Über die Bewegungen des Raumes.* Sächs. Ber. 42 (1890).

Digitized by Google

gungen mittels acht homogener Parameter von bilinearer Zusammensetzung dargestellt werden, die der quadratischen Bedingungsgleichung:

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$

genügen. Wie diese Parameter geometrisch zu deuten sind — $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$ sind beispielsweise die Koordinaten des mit der Bewegung verbundenen (linearen) Mittelkomplexes — wie sie sich für Bewegungen von Untergruppen spezialisieren und wie sich die Parameter zweier Bewegungen zusammensetzen, dies alles wird, im Zusammenhang mit einer rein geometrischen Behandlung des Gegenstandes in der wichtigen und umfangreichen Arbeit *„Von den Bewegungen und Umlegungen“* [35]) ausführlich dargestellt. Die Parameterdarstellung selbst ergibt sich aber am einfachsten, wenn man sich der Biquaternionen bedient. Dazu führt am schnellsten das *Studysche Übertragungsprinzip.*

Study setzt:[36])

$$X_1 = \mathfrak{X}_{01} + i\mathfrak{X}_{23}, \quad X_2 = \mathfrak{X}_{02} + i\mathfrak{X}_{31}, \quad X_3 = \mathfrak{X}_{03} + i\mathfrak{X}_{12},$$

indem er Real- und Imaginärteile der Koordinaten eines Punktes X_i der komplexen projektiven Ebene als Plückersche Koordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ eines Linienkomplexes im Raume deutet. Dann ist die durch die letzten Gleichungen vermittelte Abbildung von linearen Komplexen auf Punkte zwar eindeutig, aber umgekehrt wird jedem Punkte X nicht eindeutig ein Komplex zugeordnet; denn, wenn man die Koordinaten X_i mit komplexen Proportionalitätsfaktoren $\varrho + i\sigma$ multipliziert, so erhält man neue Komplexe. Alle Komplexe, die sich so ergeben, sind im allgemeinen Falle koaxial: Sie besitzen dieselben Axen in Bezug auf eine ausgezeichnete Fläche 2. Ordn. ohne reelle Erzeugende, die man als Kugel bezeichnen kann. Im Sonderfalle aber, nämlich dann, wenn der Ausgangspunkt dem ausgezeichneten Kegelschnitt:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$$

angehörte, erhält man alle Geraden eines Tangentenbüschels der Kugel. Richtet man nun seine Aufmerksamkeit nur auf das Innere der Kugel, so kann man ein Axenpaar durch den „Strahl“ charakterisieren, in dem eine der Axen des Paares die Kugel durchdringt. Dazu kommen als „uneigentliche Strahlen“ die Punkte der Kugel als Scheitel der genannten Tangentenbüschel.

Bei dieser Abbildung werden die Punkte des reellen Zuges einer (reellen) Geraden zunächst auf ein reelles Büschel linearer Komplexe und

35) Math. Ann. 39 (1891).

36) *Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie.* Jahresber. d. D.M.V. 11 (1902) III.

Digitized by Google

dann auf die Figur der Axen dieser linearen Komplexe abgebildet. Diese Figur ist, als Ganzes betrachtet, das Nicht-Euklidische Analogon zum *Zylindroid*. Hier wird sie nur, soweit sie im Inneren der Kugel verläuft, als Ort von Strahlen betrachtet. Study nennt sie eine *Strahlenkette* in Analogie zur v. Staudtschen Kette der projektiven Ebene, deren Bild sie ist. Wie die allgemeinste v. Staudtsche Kette durch Anwendung einer komplexen projektiven Transformation aus dem reellen Zug einer Geraden entsteht, so werden die Strahlenketten durch Anwendung „dual-kollinearer" Transformationen unter sich vertauscht. Daher kann Study aus der Segreschen Geometrie des komplexen Gebietes eine Menge neuer Sätze der Strahlengeometrie durch Übertragung gewinnen.

Die besprochene Abbildung war schon früher von F. Klein[37]) auf anderem Wege gewonnen worden: Klein bildet mittels des Hesseschen Übertragungsprinzips die Punkte einer komplexen Ebene zunächst auf Punktepaare eines Fundamentalkegelschnittes ab, dessen Binäres Gebiet er dann weiter auf der Riemannschen Zahlenkugel reell veranschaulicht. Die Verbindungslinie der einem Punktepaare des Fundamentalkegelschnittes entsprechenden Punkte auf der Riemannschen Zahlenkugel wird die Bildgerade des Ausgangspunktes. Klein betrachtet aber nicht Transformationen, die (in der Terminologie Studys) eigentliche und uneigentliche Strahlen vertauschen, und zweitens versagt die Kleinsche Ableitung in dem von Study hauptsächlich behandelten Grenzfalle der Euklidischen Geometrie.

Dieser Grenzfall ergibt sich, wenn man in den Übertragungsformeln die komplexen Zahlen durch *duale Größen* (i durch ε mit $\varepsilon^2 = 0$) ersetzt. Die Gleichungen stellen dann eine Beziehung zwischen den Punkten der dualen Ebene und den Strahlen des Euklidischen Strahlenkontinuums her. Das klassische Beispiel für das Studysche Übertragungsprinzip bildet die *Übertragung der Konfiguration von Desargues*. Die Gleichung:

$$(XY) = (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) + \varepsilon\,(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$$

zeigt, daß zwei in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt konjugierte Punkte X und Y auf zwei Strahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ abgebildet werden, die aufeinander senkrecht stehen:

$$(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_{01}\,\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{X}_{02}\,\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{X}_{03}\,\mathfrak{Y}_{03} = 0$$

und sich schneiden:

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_{01}\,\mathfrak{Y}_{23} + \cdots + \mathfrak{X}_{12}\,\mathfrak{Y}_{03} = 0.$$

Konstruiert man nun zu einem vorgegebenem Dreieck der dual-projektiven Ebene das Polardreieck in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt, so ist dieses zum Ausgangsdreieck perspektiv und gibt mit ihm zusammen zu

37) Math. Ann. 22 (1883) S. 246.

Digitized by Google

einer Konfiguration von Desargues Anlaß. Diese enthält 10 Punkte, von denen jeder zu drei anderen konjugiert ist. Die Übertragung liefert also die *Konfiguration von Peterson und Morley:* 10 Geraden, von denen jede je drei andere senkrecht schneidet [38]).

Will man in der dualen Ebene (was nicht unbedingt erforderlich ist) Punkte und Geraden unterscheiden und diese Unterscheidung auch in der Abbildung zum Ausdruck bringen, so muß man *den Strahlenraum mit zwei Schichten überdecken* und neben Strahlen 1. Art, die den Punkten entsprechen, Strahlen 2. Art einführen, die Bilder von Geraden sind. Dann ergibt die Abbildung einer beliebig zum Fundamentalkegelschnitt gelegenen Desarguesschen Figur eiue neue Konfiguration von 10 Geraden erster und 10 Geraden zweiter Art: Jede Gerade der einen Art schneidet drei Geraden der anderen Art senkrecht.

Das Übertragungsprinzip liefert nun auch am einfachsten die *Parameterdarstellung der Bewegungen im Raume.* Study geht von der Darstellung:

$$x' = a^{-1} x a \qquad Na \neq 0$$

der Drehungen um den Nullpunkt aus. Bedeuten jetzt X_i Strahlenkoordinaten, A_i Biquaternionen:

$$A_i = \alpha_i + \varepsilon \beta_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

so erhält man durch Übertragung der Drehungsformel die Gleichung:

$$X' = A^{-1} X A \qquad SN(A) = N\alpha \neq 0$$

als Parameterdarstellung der Bewegungen in Strahlenkoordinaten.

Es ist nicht leicht, hieraus durch Rechnung die Transformationsformeln in Punktkoordinaten abzuleiten. Die Gleichung liefert nur den Beweis für die Möglichkeit einer Darstellung der Bewegungen mittels 8 homogener Parameter von bilinearer Zusammensetzung. Doch ergeben sich die Bewegungsgleichungen in Punktkoordinaten mühelos nach einem anderen Verfahren [39]) und lauten:

$$Sx' + \varepsilon Vx' = (\alpha + \varepsilon\beta)^{-1} (Sx + \varepsilon Vx) (\alpha - \varepsilon\beta).$$

Die Parameterdarstellung legt es nahe, die Bewegung als Raumelement einzuführen. Die Parameter einer Bewegung werden Koordinaten dieser Bewegung. Um eine anschauliche Figur mit dem Inbegriff dieser Koordinaten zu verbinden, unterwirft Study ein vorgegebenes Dreibein — Protosoma — allen Bewegungen und bezeichnet als Koordinaten eines der so entstandenen „*Somen*" die Koordinaten der Bewegung, mittels der es aus dem Protosoma

38) G. d. D. S. 107 und 217.

39) „*Grundlagen und Ziele der Analytischen Kinematik.*" Sitzungsb. d. Berliner Math. Ges. 12. Jahrg. 1913 S. 42 Anm.

Digitized by Google

gewonnen wurde. Die Geometrie der Somen bildet den Gegenstand der *Kinematik*. Diese umfaßt die Liniengeometrie als Spezialfall ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$).

Die einfachste Aufgabe, die sich bietet, ist die Untersuchung *linearer Somenmannigfaltigkeiten*. Einer solchen Mannigfaltigkeit entspricht, bei der Abbildung der Somen auf die Punkte der durch die Gleichung

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$

gegebenen M_6^2 des R_7 ein linearer Raum dieser M_6^2. Die ∞^9 „Rotationsketten" (die durch Rotation eines Somas um eine Gerade entstehen) werden auf Geraden der M_6^2 abgebildet. Unterwirft man ein Soma allen Drehungen um einen Punkt, so erhält man ∞^3 Somen, von denen je zwei durch eine Rotationskette verbunden werden können, also eine dreidimensionale lineare Somenmannigfaltigkeit. Ihr entspricht ein „rechtseitiger R_3" auf M_6^2. Ähnlich können die linkseitigen Räume R_3 auf M_6^2 kinematisch gedeutet werden.

Die Theorie der erzeugenden R_3 auf M_6^2 hat E. Study in einem umfangreichen unveröffentlichten Manuskript ganz analog zur Theorie der erzeugenden R_2 auf M_4^2 behandelt. Aus den Andeutungen, die er darüber in der Abhandlung *„Gruppen zweiseitiger Kollineationen"* [40]) macht, entnehmen wir folgende Gegenüberstellung:

Linearer R_3 auf M_6^2	Linearer R_2 auf M_4^2.
70 paarweise gleiche Graßmannsche Koordinaten.	20 paarweise gleiche Grassmannsche Kordinaten.
Figur von 8 assoziierten Punkten im Raume.	Figur von 6 Punkten eines Kegelschnittes in der Ebene.
Quaternäre orthogonale Transformationen.	Ternäre orthogonale Transformationen.
Gruppe der 28 Bitangenten einer Kurve 4. Ordn.	Gruppe der Kummerschen Konfiguration.

Strahlengeometrie und *Kinematik* bilden den wichtigsten Gegenstand des Study schen Hauptwerkes, der *Geometrie der Dynamen*. Dieses Buch ist Sophus Lie gewidmet. Auf der Rückseite des Widmungsblattes hat Study in seinem Handexemplar in einer handschriftlichen Eintragung Lies mathematische Leistung gewürdigt. Wir wollen mit diesen Worten Studys schließen, weil sie uns für seine Einstellung zur Mathematik charakteristisch scheinen:

„Ich bemerke, daß manche sehr scharfsinnige Mathematiker über Sophus Lie abfällig urteilen. Ich sehe aber auch, daß sie sämtlich Spezialisten sind. Lie war in der Tat wohl kaum scharfsinnig zu nennen.

40) Nachrichten der Ges. d. Wiss. Göttingen. 1912.

Digitized by Google

Seine Vorzüge waren eine großartige Gesamtansicht von der Mathematik, ein wunderbarer Instinkt für den Zusammenhang der Erscheinungen und eine unerschöpfliche Phantasie. Daß Gelehrte, denen diese Fähigkeiten beinahe gänzlich abgehen, sie sollten zu schätzen verstehen, ist vielleicht zu viel verlangt. In Bezug auf ihre eigenen Leistungen aber darf man wohl fragen, welcher Grad des Scharfsinnes denn als hinreichend erachtet werden soll, um Beschränktheit des Horizonts und Engherzigkeit der Urteilsbildung aufzuwiegen. So. 1903."

Digitized by Google

Adolf Kneser [1]).

Von Lothar Koschmieder in Brünn.

Noch stehen wir unter dem Eindruck der erschütternden Nachricht, daß Adolf Kneser am 24. Januar 1930 von jähem Tode ereilt wurde. Ein Schlaganfall traf den Jugendfrischen, als er am Morgen dieses Tages die Universität betrat. An deren Schwelle zusammengebrochen, ward er von Freunden gefunden; sie bemerkten eine linksseitige Lähmung, und doch verlangte er, wieder zu sich kommend, nachdrücklich danach, die gewohnte Vorlesung zu halten. Aber der Tod hatte ihn angetreten, und nur kurze Frist war ihm noch gegeben; am Nachmittage verschied er. Drei Tage darauf geleitete ein langer Trauerzug seine Bahre, und drei Wochen später füllte den großen Hörsaal des physikalischen Institutes die große Zahl derer, welche an der von der philosophischen Fakultät für ihn veranstalteten Gedenkstunde [2]) teilnahmen. Seine Freunde waren bestürzt über das viel zu frühe Ende des rüstigen Mannes, der im 68. Lebensjahre stand. Und doch war es die allgemeine Meinung, daß ihm ein schöner Tod beschieden gewesen sei. Man hätte die Vorstellung des Alterns oder gar eines Siechtums schlecht vereinbaren können mit dem Wesen des außerordentlichen Mannes, dessen Leben, wissenschaftliche Bedeutung und menschliche Eigenschaften ich in dieser Stunde schildern will.

I.

J. C. Chr. Adolf Kneser wurde am 19. März 1862 zu Grüssow in Mecklenburg geboren als jüngster Sohn des dortigen Pfarrers Adolf

1) Vorgetragen in der 266. Sitzung am 28. Mai 1930.

Digitized by Google

Kneser und seiner Frau Friederike geb. Kollmann. Einer der Paten und entfernter Oheim war J. Chr. Poggendorf, der in seinem Taufspruche den Wunsch ausdrückte, der Täufling möge dermaleinst Naturforscher werden. Das fand keinen Anklang in der geistlichen Familie, deren Wunsch dahin ging, daß der Sohn wieder den geistlichen Beruf erwähle. Kneser selbst hat sich später in seiner launigen Weise dahin geäußert, er sei eine Art Mittelding zwischen beiden geworden. — Als Kneser ein Jahr alt war, starb sein Vater; die Mutter siedelte nach Rostock über, um ihre vier Söhne dort zu erziehen. Sie wurde dabei gelegentlich von einem Bruder unterstützt, und zwar so nachdrücklich, daß sie ihre Kinder vor seiner schlagfertigen Hand durch geeignet angebrachte Polster schützte. Adolf besuchte das Gymnasium in Rostock; er war in allen Fächern ein guter, in vielen ein vortrefflicher Schüler. Ausgezeichnet waren seine Leistungen in der Mathematik; von seiner frühen Liebe zu diesem Gegenstande geben zwei sorgfältige Ausarbeitungen aus seiner letzten Schulzeit Kunde, deren eine die Apollonische Berührungsaufgabe im Raume behandelt. So wählte er, nachdem er Ostern 1879 die Reifeprüfung mit Auszeichnung bestanden hatte, das mathematische Studium; er brachte auf die Universität in Rostock so weitgehende Kenntnisse mit, daß er, ohne die Vorlesung über Differentialrechnung gehört zu haben, sogleich die über Integralrechnung bei M. Krause besuchen konnte. Schon in diese Zeit fällt Knesers erste Veröffentlichung (1)[3]: „Über atmosphärische Schallstrahlenbrechung", die im physikalischen Seminare wohl unter dem Einflusse Matthießens entstanden ist. Im dritten Semester wandte sich Kneser nach Berlin, wo er im Melanchthonhause wohnte, einem Heim für Söhne evangelischer Geistlicher. Es folgte ein Semester in Heidelberg, während dessen Kneser bei Fuchs und Quincke hörte. Daß der Zauber dieser Stadt auch ihm den Sinn gefangen hielt, lehrt ein Brief, den er, endgültig nach Berlin zurückgekehrt, an seine Mutter schrieb; es heißt da: „Wenn ich an Heidelberg und an den Rhein denke, so wird mir wehmütig zu Sinne". Doch fühlte sich Kneser in dem mathematischen Leben der Hauptstadt, das er selbst in seiner Rede (74) auf Kronecker so unübertrefflich geschildert hat, bald heimisch. Dazu trug nicht wenig der Verkehr mit gleichgestimmten jungen Fachgenossen bei; es bildete sich ein mathematisches Kränzchen, dem außer ihm J. Molk, C. Runge und D. Seliwanoff angehörten. Die Mitglieder kamen oft in einem berühmten Kaffeehause Berlins zusammen und

2) Ich weise auf die bei dieser Feier gehaltenen Reden hin, die, mit Ansprachen am Grabe vereinigt, soeben im Druck erschienen sind: *Zur Erinnerung an Adolf Kneser*, Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn, 1930, 24 S. Sie waren mir für das Folgende von großem Werte.

3) Die Nummern beziehen sich auf das an den Schluß gestellte Verzeichnis der Veröffentlichungen Knesers.

Digitized by Google

schrieben ihre Formeln auf die Steinplatten der Tische, bis der Wirt ihnen dazu unentgeltlich einen Block Papier zur Verfügung stellte. In einem größeren Rahmen fand man sich im Mathematischen Vereine zusammen; auch Kneser gehörte ihm an und versah dort 1882 den angesehenen Posten des Referenten, dem es oblag, die Vereinsmitglieder mit dem neuesten Schrifttum bekannt zu machen. Den ihm 1883 angetragenen Vorsitz freilich lehnte er wegen zu starker Inanspruchnahme ab.

Was war es denn nun, das die mathematische Jugend zu so reger Tätigkeit veranlaßte? Es waren die Vorlesungen und Übungen von Kummer, Weierstraß, Kronecker, Kirchhoff, Helmholtz. Vom Unterrichte dieser Großen fühlte auch Kneser sich mächtig angezogen; zuerst ließ er hauptsächlich Weierstraß auf sich wirken, später Kronecker. Es verfehlte seinen Eindruck auf diese beiden und auch auf Kummer nicht, daß der zwanzigjährige Kneser schon eine gedruckte Schrift — die genannte Erstlingsarbeit — gleichsam als Besuchskarte vorweisen konnte; immerhin blieben sie anfangs unnahbar. Aber bald bahnte sich ihm der Weg zu ihnen; sein Hervortreten in ihren Seminaren hatte zur Folge, daß sie ihm selbständige Tätigkeit anempfahlen. So begann er die Arbeit an seiner Doktorschrift. An dem ersten Entwurfe wünschten Weierstraß und Kronecker mehrfache Änderungen, vor allem mehr Ausführlichkeit der Darstellung, sodaß die Fertigstellung sich verzögerte. Dies bereitete der Mutter Knesers, die den Sohn wohl nicht ungern zum Studienabschlusse nach Rostock hätte zurückkehren sehen, manchen Kummer; in ihrem regelmäßigen Briefwechsel mit dem Sohne kommt ihre Sorge oft zu Worte. Kneser antwortete, die genaue Zeit der Erreichung seines Zieles sei nicht abzusehen; zudem halte er eine längere Ausbildung in Berlin seiner Zukunft für viel zuträglicher als einen unreifen Ruhm im engen heimatlichen Kreise. Wenn es aber auf die rasche Erlangung eines Amtes ankomme, so sei er bereit, auf die Laufbahn zu verzichten, die sich ihm vielleicht von Berlin aus eröffne, und daheim schnell die erforderlichen Prüfungen abzulegen. Freilich fürchte er die Verdumpfung, die eine so frühe Trennung von der Wissenschaft für ihn zur Folge haben könnte. So zeigt der Briefwechsel, daß auch Kneser die grauen Stunden nicht erspart geblieben sind, die fast jeder, der anderen als den landläufigen Zielen zustrebt, in seinen Werdejahren durchmacht. — Nun, Kneser blieb in Berlin und förderte seine Doktorschrift in dem Maße, daß ihm Anfang 1883 sowohl mit Kronecker wie mit Weierstraß eine lange Unterredung darüber zuteil wurde. In dieser Zeit öffnete sich ihm auch Kroneckers Haus. Der Bericht über Knesers Arbeit lag zuerst Weierstraß ob, ging aber auf Kronecker über, als diesem 1883 ein ordentlicher Lehrstuhl an der Universität Berlin übertragen wurde. Nach Überwindung der Verzögerungen, die dieser Amtsantritt für Knesers Angelegenheit mit sich

Digitized by Google

brachte, erfolgte am 8. III. 1884 seine Promotion. Unter den Thesen, die er dabei gegen D. Seliwanoff, E. Fiedler, K. Hensel verteidigte, besagt die eine, daß in der Lehre von der Massenanziehung die alten geometrischen Beweisverfahren nicht zu vernachlässigen seien. Sie ist insofern bezeichnend, als Kneser im ganzen Leben nicht müde wurde in der Mahnung an seine Hörer, die alten Meister nicht zu verachten, sondern ihre Kunst zu ehren und ihre Verfahren sich zu eigen zu machen. — Die Berliner Studienzeit, die mit der Promotion ihren äußeren Abschluß fand, ist für Kneser nicht nur fachlich von entscheidender Bedeutung gewesen; er nützte sie vielmehr auch dazu aus, seine allgemeine Bildung, um die er von Jugend auf bemüht war, zu verbreitern und zu vertiefen. In einem Briefe an seine Mutter schreibt er: „Wie ich für meine Allgemeinbildung sorge, ersiehst Du daraus, daß ich bei Treitschke Geschichte höre". Bei W. Scherer trieb er Literaturgeschichte. 1881 besuchte er die Vorlesungen F. Paulsens, den er als Philosophen hochschätzte. Wie früh Kneser in der Erkenntnislehre einen eigenen Standpunkt gewonnen hat, zeigt sich darin, daß bei seiner Doktorprüfung zwischen ihm und dem Prüfenden W. Dilthey keine rechte Einigung über das „Ding an sich" zustande kam. Die Neigung zur Philosophie war an Kneser sein Leben lang wahrzunehmen; von ihr legt beredtes Zeugnis ab seine von den Sachkennern hochgeschätzte Schrift (79): „Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart". Das Streben nach allgemeinster Bildung aber, das schon der Jüngling bekundete, zeitigte als reife Frucht eine Vielseitigkeit des Wissens, die das weite Feld zwischen schwierigen Fragen neuzeitlicher Technik und den feinen Schöpfungen altgriechischer Dichtkunst beherrschte. Vielen erschien diese Bildungshöhe Knesers geradezu als ein Wahrzeichen seines Wesens; daß er durch sie unter Amts- und Fachgenossen hervorragte, haben ihm diese stets neidlos zugestanden. —

Wir kehren zu Knesers äußerem Lebensgange zurück. Er habilitierte sich 1884 in Marburg; Kronecker hatte das befürwortet. Welches Vertrauen er auf Kneser setzte, geht aus sehr herzlichen Briefen hervor, die er in dieser Zeit an Kneser schrieb. In Marburg, wo H. Weber als Professor der Mathematik wirkte, trat Kneser in freundschaftliche Beziehungen zu dem Philosophen P. Natorp und dem Altsprach-Forscher Th. Birt, den er noch in den letzten Jahren wieder aufgesucht hat. 1886 habilitierte er sich nach Breslau um, weil er dadurch seine akademische Stellung zu verbessern und die Zahl seiner Hörer zu vergrößern hoffte. An der Universität Breslau, deren mathematische Lehrstühle J. Rosanes und H. Schröter inne hatten, trat Kneser an Stelle von O. Staude, der einem Rufe nach Dorpat gefolgt war. Als aber Staude 1889 eine Berufung nach Rostock annahm, wurde Kneser zum zweiten Male sein Nachfolger: er wurde in Dorpat, 27 jährig, zum außerordentlichen, schon

Digitized by Google

ein Jahr später zum ordentlichen Professor der angewandten Mathematik ernannt. Die reine Mathematik vertrat seit 1886 F. Schur als Nachfolger Helmlings. Daß noch eine zweite Zeit gemeinsamen Wirkens der beiden verschieden gearteten Männer Kneser und Schur zustande kam — nämlich in Breslau 30 Jahre später, nach Schurs Vertreibung aus Straßburg —, ist gewiß ein Beweis für Knesers treuen und beständigen Sinn. Den Rahmen, in dem Kneser sich nun 12 Jahre lang bewegte, bildet das Leben einer deutschen Führerschicht in estnischem Lande unter russischer Hoheit. Wie wohl er sich in dieser Umwelt befunden hat, geht aus der Schilderung (71) hervor, die er von ihr 20 Jahre später in einem Zeitungsaufsatze entworfen hat. Die deutschen Stammesgenossen betätigten den Kulturwillen und Gemeinschaftssinn, der seinen Eindruck noch auf keinen verfehlt hat, der vom Binnendeutschtum im Auslandsdeutschtum versetzt worden ist. Das baltische Dasein erhielt sein besonderes Gepräge durch manche großzügige Eigenheit russischen Wesens, in das Kneser sich tief eingefühlt hat. Zu den russischen Fachgenossen Bobyleff, Lachtin, Ljapounoff stand er in den besten Beziehungen; besonders bedeutsam auch für seine eigene wissenschaftliche Entwicklung wurde die Freundschaft zu Stekloff, die Knesers Nachruf (80) für diesen Mathematiker sichtbar durchglänzt. In seiner eigenen amtlichen Tätigkeit erlebte er die Befriedigung, daß sich unter seinen deutschen Hörern verständnisvolle Mitarbeiter fanden, von denen ich E. Schmidt, H. Carstens, A. Meder nenne; diesem Kreise stand auch P. Bohl nahe, dem Kneser mit Meder zusammen gleichfalls einen Nachruf (75) gewidmet hat. Als Menschen aber ward ihm in Dorpat das Glück zuteil, daß er die Lebensgefährtin fand, mit der er 1894 den eigenen Hausstand begründete. Es ist die einfache Feststellung einer Tatsache, daß Frau Laura Kneser geb. Booth die unbedingte Hochachtung und Verehrung aller derer genießt, die je in Knesers Hause ein- und ausgingen. Der Ehe entsproßten vier Kinder. Von den drei Söhnen starb der älteste den Soldatentod; die beiden anderen wandten sich dem Berufe des Vaters zu, der eine als Mathematiker, der andere als Physiker. Die Tochter betätigte sich bis zu ihrer Vermählung im Fürsorgeberufe.

Die neunziger Jahre in Dorpat standen für Kneser unter einem guten Stern. So behaglich blieben die Zeitläufte freilich nicht; gegen die Jahrhundertwende spitzten sich die Beziehungen zwischen den Völkern im Baltenlande zu. Daß die Russen in der Sprachenfrage unduldsamer wurden, zeigt ein nachgelassenes Schriftstück von Knesers Hand, der Entwurf zu einer Verwahrung, die die deutschen Professoren gegen die russischen wegen der Verdrängung der deutschen Sprache von der bisher zweisprachigen Universität einlegen wollten. Diese politischen Trübungen mögen dazu beigetragen haben, daß in Kneser der Wunsch nach Rückkehr in die deutsche Heimat reger wurde; so hat er 1900 den an ihn ergangenen Ruf an die Berg-

Digitized by Google

akademie in Berlin gern angenommen. Dort wirkte er als Nachfolger von F. Kötter bis 1905. Im Jahre 1901 vollbrachte er, was in diesem Kreise besonders hervorgehoben werden muß: Er rief, zusammen mit anderen jüngeren Mathematikern, die Berliner Mathematische Gesellschaft ins Leben. Über die Eigenart dieser Gründung und ihre Begleitumstände brauche ich hier nicht zu sprechen, da alles Wesentliche darüber in dem Nachrufe gesagt ist, den A. Barneck in den Berichten unserer Vereinigung[4]) dem Mitbegründer E. Jahnke gewidmet hat. Doch das sei betont, daß Kneser, seinem Wesen entsprechend, der Gesellschaft stets die Treue gehalten hat, als deren sichtbares Zeichen aus jüngster Zeit die hier gehaltene Rede (74) zu Leopold Kroneckers Gedächtnisse gelten kann. In die Berliner Jahre fällt eine Berufung Knesers nach Marburg, die er ablehnte, weil die Annahme eine Verschlechterung seiner Lage mit sich gebracht hätte. Was man ihm antrug, war so kümmerlich, daß Kneser sogar die bei der mündlichen Verhandlung ihm von Althoff angebotene Zigarre mit der Begründung ausschlug, daß er ein Feind jeglichen blauen Dunstes sei. Kneser hätte damals wohl überhaupt auf einen Ortswechsel verzichtet, wenn sich ihm Gelegenheit geboten hätte, sich an der Universität als Privatdozent zu habilitieren und sich auf diese Weise einen Kreis mathematisch eingestellter Hörer zu schaffen. Da verhieß ihm 1905 eine Berufung nach Breslau die angenehmste Erfüllung seines Wunsches nach solcher wissenschaftlicher Tätigkeit. Diesen Ruf anzunehmen ließ er sich gerne bereitfinden. In der umfassenden Wirksamkeit als Forscher und Lehrer, die er als Inhaber des dritten ordentlichen Lehrstuhles der Mathematik an der Universität Breslau entfalten konnte, hat Kneser die Verwirklichung seines Lebenszieles gesehen. Als an ihn dort 1908 ein ehrenvoller Ruf nach Leipzig erging, lehnte er ihn ab; die schlesische Hauptstadt, die er zwanzig Jahre früher als Privatdozent kennen gelernt hatte, war ihm zur zweiten Heimat geworden. Das Zeichen seiner Seßhaftigkeit war das behäbige, vornehme und doch einfache Landhaus, das er sich am Rande des Scheitniger Parkes in der Umgebung prächtiger alter Bäume erbaute und mit den Seinen bis an sein Ende bewohnte. Es war der Sitz reichen und glücklichen Familienlebens, ein Mittelpunkt edler Geselligkeit und die Stätte einer Gastfreundschaft, in der sich viele Amtsgenossen, einheimische und auswärtige Fachgenossen wohlgefühlt haben. Wie rasch der Breslauer Lehrkörper sein neues Mitglied schätzen lernte, geht daraus hervor, daß Kneser schon nach sechsjähriger Anwesenheit zum Rektor gewählt wurde. Bei der Übernahme dieses Amtes hielt er die Rede (56) über „Mathematik und Natur", die unter Ansprachen dieser Art nach Form und Inhalt eine Sonderstellung einnimmt. Ebenso aufhorchen machte die Rede „Von der

4) Bd. 21 (1922), S. 30—39.

Digitized by Google

Schwere" (70), die er 1918 bei der letzten Kaisergeburtstagsfeier der Universität Breslau hielt. Einer der wichtigsten Anlässe, bei denen Kneser als Rektor seine Universität zu vertreten hatte, war die Feier des 250 jährigen Bestehens der Royal Society in London. Knesers Rektoratsjahr war von der Sonne der glücklichen und reichen Vorkriegszeit bestrahlt; zwischen diesem Amte und dem Jahre 1918/19, in dem er als Dekan der philosophischen Fakultät vorstand, lag der Krieg, unter dessen unglücklichem Ausgange er als echter Vaterlandsfreund schwer gelitten hat. Hart genug mag es den dem Umsturze abholden Mann angekommen sein, sich in das neue Deutschland zu finden. Aber er stellte seine ganze Kraft in dessen Dienst um Deutschlands willen. Er suchte und fand Trost in der Arbeit. Solche bot schon das Dekansamt in dem erregten ersten Nachkriegsjahre. Man lobte Kneser wegen der straffen Leitung der Fakultätssitzungen und wegen ihrer Kürze. Eine seiner Einzelmaßnahmen, der er selbst eine gewisse Wichtigkeit beimaß, bestand darin, daß er die Nichtordinarien in die Fakultät einführte. Die ersten Nachkriegsjahre erschwerten den Unterricht durch die gewaltigen Hörerzahlen, die der Ansturm der feldgrauen Jugend auf die Hochschulen mit sich brachte. Kneser meisterte alle Schwierigkeiten; er überwand die leichte Ermüdung, die ihm die Spannung der Kriegszeit verursacht hatte, und erholte sich zu der erstaunlichen Jugendfrische, die seine letzten Jahre auszeichnet. In diesen wurden ihm Ehrungen zuteil, deren er sich herzlich gefreut hat: Die Technische Hochschule in Breslau verlieh ihm 1922 die Würde eines Doktor-Ingenieurs; die Preußische Akademie der Wissenschaften ernannte ihn 1923 zu ihrem korrespondierenden Mitgliede. In gleicher Eigenschaft gehörte er der Russischen Akademie der Wissenschaften an. Als diese 1925 ihr 200 jähriges Bestehen feierte, reiste er nach Petersburg und nahm an den Festlichkeiten teil. Daß Kneser bei dieser Rüstigkeit und Beweglichkeit Anfang 1928 in den Ruhestand versetzt wurde, blieb allen denen unerfindlich, die den Zeitpunkt einer Entpflichtung weniger von einer zufällig erreichten Altersgrenze als von der Leistungsfähigkeit abhängig wissen möchten. Der Wegfall amtlicher Obliegenheiten änderte freilich seine Lebensweise kaum. Er schränkte weder seine wissenschaftliche noch seine lehrende Tätigkeit ein; die Zahl seiner Hörer ließ nicht nach. Erst der Tod gebot seinem Schaffen Einhalt. Es war ein reiches Leben, aus dem er abberufen wurde; dieses Bewußtsein stärkte seine Angehörigen in ihrem Schmerze und tröstete seine Freunde. Niemand fand es ein Wort zuviel gesagt, wenn die Philosophische Fakultät in der Todesanzeige bekannte, daß sie einen ihrer besten Männer verloren habe.

II.

Ich will jetzt Knesers wissenschaftliche Bedeutung zu würdigen versuchen; das ist bei dem Umfange und Inhalte seiner Lebensarbeit kein

Digitized by Google

leichtes Unternehmen. Wir besitzen von ihm vier Bücher und an die achtzig Abhandlungen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik, der Algebra, Geometrie, Funktionenlehre, der mathematischen Physik, insbesondere ihren Randwertaufgaben, den Integralgleichungen, der Mechanik, der Variationsrechnung — um nur die Hauptgegenstände zu bezeichnen. Fern gehalten hat sich Kneser der Art von Untersuchungen, über die er selbst, wie sein Berliner Freund Richard Müller mir erzählte, sich einmal scherzhaft so äußerte: er verglich sie mit dem Verfahren des Mannes, der sich ein gesundes Bein ausreißt, um zu sehen, wie weit er mit dem andern allein komme.

Der Anfang in Knesers Schaffenszeit gilt der Algebra. Seine dem Gedankenkreise Kroneckers entstammende Doktorschrift (2) behandelt die Monodromiegruppe einer algebraischen Funktion y d. h. die Gruppe derjenigen Umordnungen ihrer Werte $y_1, \ldots, y_n$, welche bei der Durchlaufung gewisser Wege im Bereiche der Unabhängigen zustandekommen. Dabei ergeben sich ihm bemerkenswerte Aufschlüsse über die Affektlosigkeit gewisser Gleichungen, z. B. einer mindestens dreigliedrigen Gleichung, in der die Exponenten der Unbekannten den größten gemeinsamen Teiler 1 haben. Die Arbeit (5) zeigt Knesers Streben, arithmetisch ausgesprochene Sätze der Algebra auch arithmetisch zu begründen. Er deutet in ihr die Abkürzung an, die der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra erfährt, wenn man geeignete Erweiterungskörper heranzieht; diese Anregung hat man neuerdings aufgegriffen[5]). Ihrem dauernden Besitzstande hat die Algebra den Kronecker-Kneserschen Satz (7) einverleibt; er handelt von der Gegenseitigkeit des Zerfalls zweier Polynome in den Körpern, die aus dem Koeffizientenkörper *einer* Gleichung durch Adjunktion einer Wurzel der andern entstehen. Später ist Kneser auf seine algebraischen Neigungen mit einem neuen Beweise (11) der Unlösbarkeit höherer Gleichungen und mit einer eigenartigen Behandlung (13) des casus irreducibilis zurückgekommen.

In einem Briefe aus seiner Berliner Studienzeit schildert Kneser seiner Mutter die dortige mathematische Richtung als sehr „abstrakt-analytisch", was ihm gar nicht liege: er sei mehr geometrisch veranlagt. Dieses Bekenntnis könnte befremden, da man gewohnt ist, in Kneser vor allem einen Meister der Analysis zu schätzen; daß er aber auch eine starke geometrische Ader besaß, beweist eine Reihe von Arbeiten (8, 10, 14, 57) über die Gestalt ebener und räumlicher Kurven. Indem er die Verteilung der Schmiegungsebenen einer beliebigen Raumkurve aufklärt (8), gelangt er (10) zu Sätzen über die scheinbaren Singularitäten regulärer Bögen, von denen ich als Beispiel den folgenden anführe: Eine Raumkurve werde von verschie-

5) Vgl. K. Dörge, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Phys.-math. Klasse, 1928, S. 87—89.

Digitized by Google

denen Punkten aus projiziert. Bewegt sich dann das Auge durch die Tangentenfläche von der hohlen nach der erhabenen Seite hin, so geht ein scheinbarer Doppelpunkt der Kurve verloren, während gleichzeitig zwei scheinbare Wendepunkte gewonnen werden. Bei der Herleitung dieses und ähnlicher Sätze spielen die Bögen eine bedeutende Rolle, die keine Doppelpunkte, keine Doppeltangenten und keine doppelten Schmiegungsebenen besitzen. Von Knesers Ergebnissen bei ebenen Kurven (14) betrifft eine Gruppe die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden und die Zahl ihrer Tangenten durch einen Punkt. Eine zweite bezieht sich auf die Singularitäten geschlossener Kurven; wir finden darunter die Einsicht, daß dies niemals entweder nur Doppelpunkte oder Doppeltangenten sein können. Die dritte Gruppe besteht aus neuen Beweisen der Sätze von Möbius über die Wendepunkte geschlossener Kurvenzüge, und der Gegenstand der vierten sind die Abwandlungen der Singularitäten eines Bogens, wenn dieser selbst stetig abgewandelt wird. Geschieht das z. B. in der Nähe eines Selbstberührungspunktes, so ändert sich die Zahl der Doppeltangenten um 2. Als Kneser zwanzig Jahre später solche Untersuchungen wieder aufnahm (57), tat er einen glücklichen Fund: er entdeckte den Vierscheitelsatz [6]). An der Erforschung der Grundlagen der Geometrie hat sich Kneser durch eine neue Begründung der Ähnlichkeitslehre beteiligt (38, 40, 47).

Knesers erste Veröffentlichung zur Analysis (9) galt den elliptischen Funktionen. Der herkömmliche Beweis, daß $\sin \operatorname{am} u$ sich als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellen läßt, verwendete Sätze über die Summen unzähliger Potenzreihen. Kneser trachtete danach, das bescheidene Ziel auch mit weniger anspruchsvollen Hilfsmitteln zu erreichen. Als solche genügten in der Tat, wie er zeigte, ganz elementare Eigenschaften der Potenzreihen. Diese benutzend entwickelte er die Thetafunktionen zunächst in einem kleinen Gebiete U um O in Potenzreihen, das er dann durch die Formeln für die Verdoppelung des Arguments zu der ganzen Ebene erweitern konnte. So kommt in dieser überall die zunächst nur in U gültige Gleichung $\sin \operatorname{am} u = k^{-\frac{1}{2}} H(u) / \Theta(u)$ zustande. — Das Streben, den von Kronecker verfochtenen Grundsatz der geringsten Hilfsmittel innezuhalten, läßt sich durch Knesers ganzes Lebenswerk verfolgen. Besonders deutlich zeigt es sich an zwei weiteren Abhandlungen über elliptische Funktionen. Die eine (65) verwendet ein Verfahren von Hurwitz zu dem Beweise, daß sich zu geeignet gegebenen Invarianten stets ein Periodenpaar einer $\wp$-Funktion finden läßt, schneidet aber auf dem Wege zu diesem Ziele gleichsam alle Ecken ab. Die andere (78) erledigt auf kürzeste Weise die zahlenmäßige Seite der Umkehrungsaufgabe, indem sie auf glückliche Art Ge-

6) In Europa bemerkte man erst kürzlich, daß dieser Satz in Asien schon 1909 von Mukhopadhyaya entdeckt worden ist.

Digitized by Google

danken von Weierstraß, Hermite und Schellbach zusammenschweißt; an Hand der überraschend hergeleiteten Landenschen Transformation der Thetas dringt sie rasch zu der Potenzreihe vor, welche die gesuchte Größe q als Funktion der gegebenen k darstellt, und legt deren Konvergenz fest. — Die elliptischen Funktionen treten in Knesers Schriften immer wieder auf, da er sie als ein starkes Hilfsmittel zur Bearbeitung von Einzelaufgaben schätzte. Bei einer solchen begegnen sie ihm (66) in einem unerwarteten Zusammenhange mit den Lehren von Lie, in die Kneser sich während der Kriegsjahre vertiefte: sie dienen zur Darstellung der Transformationsgruppe einer Verallgemeinerung derjenigen Differentialgleichung, welche die Drehungen um einen festen Punkt zuläßt.

Auf Einfachheit und Reinheit des Verfahrens zielt auch ein Beitrag Knesers zur allgemeinen Funktionenlehre (72) ab, durch den er die Abschätzung des komplexen Integrals und den Residuensatz in die elementare Weierstraßsche Funktionentheorie eingeordnet hat. Die erhebliche Rolle, die in Knesers funktionentheoretischem Schaffen der Residuenrechnung zufällt (62), erklärt sich daraus, daß sie ihm wesentliche Dienste geleistet hat bei einer Frage, an deren Beantwortung er zwei Jahrzehnte lang seine volle Kraft gesetzt hat, während er sich mit den bisher genannten Gegenständen nur vorübergehend beschäftigte.

Diese Aufgabe, von deren Lösung durch Kneser jetzt die Rede sein soll, fordert Entwicklung willkürlicher Funktionen f nach den Eigenfunktionen V einer Randwertaufgabe. In den Kreis der Gedanken Sturms und Liouvilles trat Kneser mit der Untersuchung der Frage ein (15), wann die Integrale einer linearen Differentialgleichung für unbegrenzt wachsende positive Werte der Unabhängigen x unendlich oft verschwinden. Dieser ließ er die asymptotische Integration gewisser Differentialgleichungen folgen (21, 22, 26, 30), die bei großen x wenig von denen der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen abweichen. Nach diesen Vorarbeiten brachte er durch die große Abhandlung (39) die Lehre von den Sturm-Liouvilleschen Reihen auf den Stand, zu dem Dirichlet die Theorie der Fourierschen Reihe erhoben hatte. Kneser benutzt dabei die Verallgemeinerung einer von Cauchy bei der Fourierschen Reihe eingeführten Hilfsfunktion, eine Funktion $F(x, \lambda)$ des komplexen Parameters λ, deren Pole die Eigenwerte und deren Residuen die Entwicklungsglieder $A_n V_n$ der Funktion $f(x)$ sind. Der Widerspruch, daß $F(x, \lambda)$ ganz würde, wenn alle A_n verschwinden, löst sich durch die Feststellung, daß bei dieser Annahme die Funktion $f(x) \equiv 0$ dargestellt wird. Von dieser Einsicht aus gelangt Kneser zur Darstellung einer *willkürlichen* Funktion unter der Annahme, daß die ihr zugehörige Reihe $\Sigma A_n V_n$ gleichmäßig konvergiert. Und nun ermittelt er die Bedingungen, unter denen diese Annahme zutrifft.

Es ist für Kneser bezeichnend, daß er auf dieser Höhe allgemeiner

Digitized by Google

Entwicklungen sich die Muße zur sorgsamen Behandlung (45) einer einschlägigen *Einzelaufgabe* nahm, zu der ihn Stodolas Untersuchung der Gestalt einer rasch umlaufenden biegsamen, mit exzentrischen Scheibenrädern belasteten Welle anregte. Während Stodola die Scheibenschwerpunkte in einer und derselben Ebene durch die Achse und in gleicher Entfernung von dieser annimmt, gestattet ihnen Kneser beliebige Abweichungen von der Achse. Trotz dieser Verallgemeinerung findet er Stodolas wesentliche Ergebnisse wieder. Er gibt ein Verfahren an, durch Änderung der Form der Scheiben die gefährlichen Geschwindigkeiten unschädlich zu machen, bei denen bedenkliche Ausschläge auftreten könnten.

Nachdem Kneser und Stekloff durch ihre Einzelarbeit die Theorie der über fünfzig Jahre alten Sturm-Liouvilleschen Probleme zu einer einsamen Höhe geführt hatten, fanden diese plötzlich den allgemeinen Anteil der Mathematiker, als sie auf dem 1900 von Fredholm entdeckten Gebiete der Integralgleichungen auftraten. Aber selbst in der vollkommenen Gestalt, die deren Theorie vor allem den Arbeiten Hilberts und Schmidts verdankte, entschied sie die Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen nicht in dem Umfange, wie es die physikalischen Anwendungen erheischten; geknickte, sprunghafte, die Randbedingungen verletzende Funktionen entzogen sich ihr. Diese Lücke füllte Kneser aus; er schuf (51, 52, 55) auf dem Boden der Integralgleichungen die Hilfsmittel, mit denen er Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen von jeder nur wünschbaren Allgemeinheit entwickeln konnte. Gewiß war es Knesers Art, in der Wissenschaft wie im Leben, an das bewährte Alte anzuknüpfen; wie weit er aber davon entfernt war, sich gegen das gute Neue zu verschließen, zeigt diese seine Stellung zu den Integralgleichungen. Dabei ließ er es keineswegs damit bewenden, seinen früheren, immerhin auf eine Sonderfrage bezüglichen Ergebnissen ihren Platz in der neuen Lehre anzuweisen; vielmehr nahm er auch an deren allgemeinem Ausbau tätigen Anteil. Er bewies (48) aufs neue das Vorhandensein einer Eigenfunktion eines symmetrischen Kernes durch funktionentheoretische Überlegungen, die man bisher dazu nicht benutzt hatte, und entwickelte ein Verfahren zur zahlenmäßigen Berechnung der Eigenwerte. Er gab (60) einen neuen Beweis des Mercerschen Satzes; er dehnte (60) die ganze Theorie durch eine Erweiterung des Integralbegriffes zur Lehre von den belasteten Integralgleichungen aus, die man an den von Duhamel betrachteten Schwingungen einer mit Reitern besetzten Saite mechanisch veranschaulichen kann. Am deutlichsten kommt Knesers Verhältnis zu den Integralgleichungen in seinem Werke (55) über diesen Gegenstand zum Ausdruck. Er hält dafür, daß es dem Physiker, dem doch die neue Theorie zu gute kommen soll, nicht leicht sei, an Hand des vorwiegend abgebraisch gerichteten Schrifttums zu den Anwendungen vorzudringen; gerade diese dem Fernerstehenden zu erschließen sieht Kneser

Digitized by Google

als seine Aufgabe an. Er löst sie glänzend, indem er die diesem Zweige eigentümlichen Begriffe — etwa die Kerne und quellenmäßigen Funktionen bei den mannigfachsten Wärmeleitungs- und Schwingungsaufgaben in einer oder mehreren Ausdehnungen — physikalisch so gegenständlich deutet, wie sich algebraische Sachverhalte geometrisch versinnlichen lassen. Man hat in dem Buche eine Darstellung der allgemeinen Theorie vermißt; dem Wunsche vieler Leser, sich auch in diese zu vertiefen, hat der Verfasser bei der zweiten Auflage dadurch Rechnung getragen, daß er die Theorie von Erhard Schmidt und die funktionentheoretischen Verfahren, zu denen er selbst so viel beigetragen, in je einem besonderen Abschnitte auseinandergesetzt hat.

Nach der Aufzählung dieser Leistungen, die allein die höchst beachtenswerte Arbeit eines ganzen Lebens bedeuten würden, wenden wir uns dem Gebiete zu, auf dem Kneser seine ureigensten Schöpfungen vollbracht und dessen Entwicklung er entscheidend beeinflußt hat, der Variationsrechnung. Den Anstoß zur Beschäftigung mit diesem Stoffe hat nach Knesers eigener Äußerung seine Vorlesungstätigkeit in Dorpat gegeben. Doch geht man wohl nicht fehl in der Annahme, daß es die einen Wendepunkt der Variationsrechnung bezeichnenden Berliner Vorlesungen von Weierstraß waren, die in ihm diese Neigung weckten; wenn er diese dem Vernehmen nach auch selbst nicht gehört hat, so konnten doch die von ihnen ausgehenden Anregungen sehr wohl auch auf ihn einwirken. Aus ihnen aber erwuchs eine ganz selbständige Schöpfung Knesers, deren Wesen man dahin kennzeichnen kann, daß sie allgemeinen Variationsproblemen unbeschadet aller neuzeitlichen Strenge diejenige geometrische Anschaulichkeit verlieh, welche vordem ihren einfachsten Sonderfall, den der kürzesten Linien, auszeichnete.

Der Übergang zur Variationsrechnung vollzieht sich in Knesers Arbeiten zur Mechanik (18, 19, 23, 28), die vor allem die Bewegung in der Nähe labiler Gleichgewichtslagen betreffen: der Grundsatz der kleinsten Wirkung gelangt zur Herrschaft, und die von beliebigen Kräften bewirkten Bahnkurven werden als Kürzeste in einer Mannigfaltigkeit mit geeignetem Linienelement gedeutet. Knesers erste ausschließlich der Variationsrechnung gewidmete Abhandlung (27) erschien 1897; in ihr leitete er beim Integrale $J = \int F(x, y, x', y')\, dt$ den Hüllensatz her, der die Grenzen des Äußerstwertes ersichtlich macht, indem er die Grundeigenschaft der Evolute überraschend verallgemeinert. Er kommt zwar schon 1894 in der Doktorschrift von Zermelo vor; aber Kneser erzielt dadurch einen bedeutenden Fortschritt, daß er zwei von Zermelo ausdrücklich beiseite gelassene Fragen strenge beantwortet, die Frage nach dem Vorhandensein der Hülle und nach der Anwendbarkeit des Satzes bei gegebenem J. Knesers folgende Arbeit (51) galt der zweiten Variation. Man hatte geglaubt, daß

Digitized by Google

der Zuwachs des Integrals bei einer kleinen Abweichung von der Extremale gleiches Vorzeichen mit der zweiten Variation besitze. Dieses wesentliche Beweismittel entfiel, nachdem Peano durch ein Beispiel gezeigt hatte, daß bei einer Potenzreihe von n Veränderlichen die Glieder höherer Stufe in der Umgebung der Stelle 0 gegen die quadratischen nur dann nicht ins Gewicht fallen, wenn deren Form nicht auf weniger als n Quadrate zurückführbar ist. Kneser half dieser Verlegenheit ab; er rettete der zweiten Variation ihren Beruf, indem er beim Problem von Lagrange strenge Bedingungen herleitete, die dem Zuwachs des Integrals ein festes Zeichen sichern, wenn man von der Extremale nach Lage und Richtung wenig abweicht. — Beim Problem $\delta \int f(x, y, p)\, dx = 0$ war Scheeffer zu Aussagen über dieses Vorzeichen durch einen Kunstgriff gelangt, der sich auf den Fall *mehrerer* unbekannter Funktionen nicht übertragen ließ. Kneser gab in einem Vortrag auf der Naturforscherversammlung zu Braunschweig 1899 ein auf diesen Fall verallgemeinerbares Verfahren an (31), dessen Grundgedanken er der *Théorie des fonctions analytiques* von Lagrange entlehnte.

Aus dem Reichtum eigener Gedanken und der Fülle Weierstraßscher Anregungen entstand Knesers Lehrbuch der Variationsrechnung (33), das 1900 als deren erste neuzeitliche Darstellung erschien. Näheres Eingehen auf seinen Inhalt erübrigt sich deshalb, weil dieser längst Gemeingut der Fachwelt geworden ist. Freilich fällt dieser Besitz dem Leser nicht mühelos zu; denn er fühlt sich vom Verfasser nicht gemächlich zur Höhe der Erkenntnis emporgeleitet, sondern von ihm in steilem Fluge auf den Gipfel entführt. Wer aber dann dem kundigen Führer durch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen freier und gebundener Äußerstwerte bei einfachen Integralen mit ersten und höheren Ableitungen, bei der Mayerschen Aufgabe, bei vielfachen Integralen folgt, der verspürt einen Hauch vom Geiste der Variationsrechnung.

Im Jahre 1925 wurde eine Neuauflage des Lehrbuches notwendig; darein hat Kneser, soweit der Grundplan es zuließ, das aufgenommen, was ihm an Fortschritten seit 1900 erzielt zu sein schien, darunter den Ertrag der von seinen Schülern in seinem Seminar geleisteten Arbeit. Als er diese Erweiterungsabsicht aussprach, wurde er gefragt, ob dabei nicht mit einem starken Anschwellen des Buchleibes zu rechnen sei; er antwortete: „Meine Bücher sollen darin zeitgemäß sein, daß sie die schlanke Linie innehalten!“

Eine besondere Fähigkeit Knesers, die hauptsächlich in seinen Lehrbüchern zu Tage tritt und in seinem starken Gefühl auch für die Darstellungs*form* begründet liegt, ist das Vermögen zur Prägung kurzer treffender Fachausdrücke. Ich nenne Wörter wie Extremale, transversal, Feld, quellenmäßige Darstellung.

Der Bericht über Variationsrechnung, den Kneser zur Enzyklopädie

Digitized by Google

der mathematischen Wissenschaften beigesteuert hat, zeigt seinen ausgeprägten geschichtlichen Sinn. Er offenbart sich in allen Werken Knesers, besonders natürlich in dem Beitrag (50) zur Euler-Festschrift und dem geschichtlichen Büchlein (79).

Den Inhalt seines Lehrbuches von 1900 hat Kneser selbst durch eine Reihe weiterer Arbeiten über Variationsrechnung in wichtigen Punkten ergänzt. Er tat (34) beim gebundenen Äußerstwerte die Notwendigkeit der Jacobischen Bedingung dar; er gab (35) zum ersten Male hinreichende Bedingungen im Falle *zweier* veränderlicher Endpunkte an. In der Zeit hochgestimmter Arbeit an allgemeinen Theorien begegnen wir unter seinen Veröffentlichungen wieder der liebevollen Behandlung einer Einzelaufgabe, der Erörterung der zweckmäßigsten Gestalt einer Geschoßspitze (37). Dem Mangel an guten Beispielen für das Aufhören des gebundenen Äußerstwertes half Kneser ab (49), indem er bei einer Schar von Extremalen des Problems der Königin Dido, Kreisen durch einen festen Punkt, die Hülle mit der doppelten Evoluteneigenschaft herstellte.

Allgemeinere Stoffe hat Kneser in Arbeiten behandelt, die während des Krieges erschienen sind. Er legte den Zusammenhang der Theorie von Weierstraß mit der von Jacobi-Hamilton dar (61), deutete die Charakteristiken partieller Differentialgleichungen als Extremalen Mayerscher Probleme (64) und stellte dabei die Vereinfachungen des Variationsproblems fest, welche den gruppentheoretischen Besonderheiten der Differentialgleichung entsprechen (67). Knesers letzte Abhandlung über Variationsrechnung (76) gilt der Ermittelung konjugierter Punkte bei allgemeinen Aufgaben des freien und gebundenen Äußerstwertes. In dem wichtigsten Falle, daß der Integrand $F(y, x', y')$ die eine Veränderliche x nicht enthält, ist die Arbeit abschließend in dem Sinne, daß sie genau die Stelle aufzeigt, bis zu der die allgemeine Theorie reicht und an der die Eigenart der Einzelaufgabe heranzuziehen ist, um die Frage zu entscheiden.

Ich habe versucht, Knesers wissenschaftliche Eigenart zu kennzeichnen. An seiner Jugend beobachten wir die Neigung zur allgemeinen Theorie, an seinem Alter die Vorliebe für die greifbare Einzelaufgabe. Dem auf sein Gesamtwerk gerichteten Blick erscheint Kneser als ein vielseitiger, mitunter etwas eigenwilliger Meister der Analysis, in dem sich die Fähigkeit zu gedanklichen Entwicklungen und eine hohe Rechenkunst zu schönem Gleichklange vereinigen. Er geht ein in den Kreis der Mathematiker, dem erlauchte Geister wie der von ihm so hoch verehrte Hermite angehören.

III.

Nun will ich noch den Lehrer und Menschen Kneser beschreiben, wie ich ihn in 20 Jahren als sein Hörer, später als sein Helfer und Fachgenosse kennen gelernt habe.

Digitized by Google

Kneser behandelte in seinen Vorlesungen die mannigfachsten Gegenstände, hauptsächlich Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Variationsrechnung, Mechanik, Funktionentheorie, elliptische Funktionen, Algebra, Zahlentheorie, Grundlehren der Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er hielt an der Universität Breslau die erste Vorlesung über allgemeine Relativitätslehre. Immer lebte er ganz in dem Gegenstande seines Vortrags; seine besondere Zuneigung aber galt der Variationsrechnung, den Randwertaufgaben der mathematischen Physik und den elliptischen Funktionen. Die Art, wie er diese Stoffe darbot, beschreibe ich am deutlichsten, wenn ich einige Einzelheiten nenne, auf die er Gewicht legte.

Die Anfangsgründe der Analysis habe ich von Kneser selbst nicht vortragen hören; ich glaube, seine Neubearbeitung (73) des Lehrbuches von Schlömilch gibt ein klares Bild von seiner Lehrweise in diesem Gegenstande. Er stellte die hohe Rechnung auf eine feste Grundlage, die er grade so breit wählte, daß sie den Tummelplatz der Formeln abgeben konnte, die er an den mannigfachsten Beispielen aus Geometrie und Mechanik erprobte. In der Lehre von den Differentialgleichungen verweilte er gern bei den Reihenentwicklungen von Fuchs, im einzelnen bei den Differentialgleichungen von Legendre und Bessel, die er in Bewegungs- und Wärmelehre zu deuten nicht müde wurde. Bei den Fourierschen Reihen ging er auf alle Einzelheiten des Dirichletschen Konvergenzbeweises ein, den er dann in einer besonderen Vorlesung an zahlreichen Orthogonalsystemen durch sein eigenes Verfahren der Integralgleichungen ersetzte. Ausführlich besprach er auch die Gibbssche Erscheinung. In welchem Geiste er die Variationsrechnung betrieb, weiß man aus seinem Buche; es genügt zu erwähnen, daß er einer Einzelheit, der Jacobischen Bedingung — etwa der doppelten Evoluteneigenschaft der Hülle bei der isoperimetrischen Aufgabe —, viel Liebe zuwandte. In der Funktionentheorie verband er auf glückliche Weise analytische und geometrische Gesichtspunkte; breiteren Raum nahmen ein die Residuenrechnung, hauptsächlich die Teilbruchzerlegung gebrochener Funktionen, und die konforme Abbildung, besonders die allgemeine Vielecksabbildung. In der Lehre von den elliptischen Funktionen stellte Kneser oft die Liouvilleschen Sätze an die Spitze und entwickelte aus ihnen die Eigenschaften der Weierstraßschen Funktionen $\wp$, ζ, σ, wie sie in der von ihm gern als „Weierstraßschen Taschenausgabe“ bezeichneten Formel ihren verdichtetsten Ausdruck finden; mit Hilfe von $\wp$ erklärte er Jacobis Funktionen Sinus, Cosinus, Delta Amplitudinis, und dann rief er als stärkstes Hilfsmittel die Thetafunktionen auf den Plan. Er hatte seine helle Freude daran, diese mathematischen Truppen mit klingendem Spiele aufziehen zu lassen; ihre Schlagkraft zeigte er durch eine besondere Vorlesung über den Kreisel, in der er sie zur Be-

Digitized by Google

wältigung einer schwierigen mathematischen Aufgabe einsetzte. In einer Art des Altersstils der Vorlesungen seiner letzten Jahre gab er einer mehr rechnerischen Entwicklung der elliptischen Funktionen den Vorzug im Geiste der *Fundamenta nova* von Jacobi. Doch bei jeder Vorlesung über diesen Gegenstand ging er ausführlich auf die rechnerische Behandlung der Umkehrungsaufgabe ein, d. h. auf die zahlenmäßige Herstellung der Potenzreihe, welche q als Funktion von k darstellt.

Im Stoffumfange hielt er weise Grenzen inne, erschöpfte dafür den Inhalt eines deutlich abgesteckten Gebietes um so gründlicher, am liebsten an scharf umrissenen Einzelfragen, für deren Behandlung er aber erwähntermaßen die allgemeinen Grundlagen stets in voller Strenge bereitstellte. Der Vortrag selbst war ausgezeichnet, rednerisch vollkommen, meist ernst und gewichtig, manchmal fast feierlich; oft lebhaft bis zur Begeisterung und dann von hinreißendem Schwunge. Er verstand es eben, jeder Sache, die er vertrat, ob in der Wissenschaft oder im Leben, Glanz zu verleihen. Führte der Gang der Vorlesung durch das Dunkel schwieriger Hilfssätze, so zuckte aus seiner Rede zur rechten Zeit der Strahl, der Weg und Ziel erhellte. Der alten und doch noch heute nicht veralteten Mahnung, daß der Unterricht vor allem fesseln soll, war Kneser stets eingedenk. Eine Vorlesung von ihm war niemals langweilig; sie war es ebensowenig, wie sonst je eine Äußerung von ihm. Diese Eigenschaft seiner Rede haben ihm auch diejenigen niemals bestritten, die gelegentlich mit deren Inhalte nicht übereinstimmten.

Eine Vorlesung zu mehrmaligem Gebrauche auszuarbeiten liebte Kneser nicht, vielmehr behandelte er jeden Gegenstand immer wieder auf neue Weise, was ihn viel Vorbereitungszeit gekostet haben mag, den Hörern aber seine Darstellung besonders lebensvoll machte. Kneser sprach meist ganz frei; selten, daß er aus der Rocktasche einen kleinen Zettel als Behelf hervorzog. Die Formeln schrieb er in schöner Schrift an die Tafel, wichtige durch einen rechteckigen Kreiderahmen hervorhebend. Was er einmal angeschrieben hatte, löschte er nur im Notfalle; er wollte den Hörern die Übersicht über den Stoff der Stunde erhalten wissen. Der Wortlaut von Erklärungen oder Sätzen gehörte nach seiner Meinung nicht an die Tafel.

Von besonderer Art waren die Übungen. Von bloßen Vortragsseminaren hielt er nicht viel, wohl weil er den Verdacht hegte, daß in solchen der Leiter und der Vortragende leicht die einzigen Verständnisvollen seien und von den Übrigen nach dem Schriftworte ein gut Teil schlafe. „Seid aber Täter des Worts und nicht Hörer allein!“ — dies andere Schriftwort galt ihm als Leitsatz. Er hielt wirkliche Übungen. Allwöchentlich stellte er den Mitgliedern ein reichlich halbes Dutzend Aufgaben, deren schriftliche Bearbeitungen er nach Durchsicht zurückgab und je nach Verdienst lobte. Diese häusliche Belastung fanden manche nicht bequem, und so standen

Digitized by Google

Knesers Übungen im Rufe der Schwierigkeit und Anstrengung. Es kam hinzu, daß er die Teilnehmer einzeln zur Rechnung an die Tafel bat und der eine oder andere dort gelegentlich versagte. Glaubte Kneser, daß das auf mangelhafter Bemühung um die Wissenschaft beruhe, so ermahnte er zu eifrigerer Beschäftigung mit den Grundlehren der höheren Mathematik; ja einzelnen stellte er anheim, statt dieses schwierigen Gebietes ein bequemeres und anspruchsloseres Fach zu wählen. Solche unliebsamen Eröffnungen wurden indes nur solchen zuteil, die er für ungeeignet zur Mathematik hielt. Den Eifrigen und gar denen, in deren Arbeiten er den mathematischen Funken bemerkte, spendete er volles Lob und suchte ihre Kräfte auf jede Weise zu steigern, indem er sie ihre Ergebnisse vortragen ließ und auf die Einzelheiten berichtigend und glättend einwirkte. Dabei hat er sich keineswegs nur den Hochbegabten gewidmet; er besaß vielmehr auch die nicht häufige Gabe, den Durchschnitt zu hohen Leistungen fortzureißen. Er verlangte von seinen Schülern mehr, als sie leisten konnten: da leisteten sie, was sie konnten. So bildete sich während der Übungen der ersten vier Semester über Differential- und Integralrechnung eine Gemeinde von mäßiger Stärke, die für die höheren Gegenstände Erfolg verhieß; von ihren bewährten Mitgliedern, die Kneser alle genau kannte, blieben die meisten seinem Seminar bis zum Studienende treu. Es folgten die Semester der Funktionentheorie und Variationsrechnung. In einer Übungsstunde z. B. über elliptische Funktionen ließ er wohl zu Beginn einen vorbereiteten Vortrag halten, etwa über die komplexe Multiplikation der lemniskatischen Funktionen. Sodann trugen die erfolgreichsten Bearbeiter der letztmaligen Aufgaben deren Lösungen vor, vom Wattschen Regulator oder dem sphärischen Pendel oder den vielfachen Anwendungen des Abelschen Theorems auf die elliptischen Integrale. Dabei ließ Kneser jede ihm wichtig scheinende Einzelheit aufs genaueste durchführen. Durch diesen eindringlichen Übungsbetrieb hat er alle Teilnehmer gefördert und viele zu eigener mathematischer Hervorbringung veranlaßt, was ihm als das höchste Ziel erschien. Es wurden in diesen Seminaren die Keime zu den großen Staatsprüfungs- und Doktorschriften gelegt. An deren Entwicklung nahm Kneser den regsten Anteil. Er wünschte, daß der Beflissene öfters vom Fortgange seiner Arbeit hören ließe; wer damit im Verzuge blieb, hatte zu gewärtigen, von Kneser darüber nachdrücklich befragt zu werden. In häufiger Aussprache betreute dieser die Arbeit des Anfängers bis zum Abschlusse, und er begleitete sie auch auf dem Wege in die Öffentlichkeit. Bei allem Druckwerk hielt er auf eine auch sprachlich abgerundete Darstellung. Ihm selbst kommt hierin das Verdienst zu, durch die Entfernung manches überflüssigen Welschwortes die Fachsprache veredelt und die Überzeugung bestärkt zu haben, daß man deutsche Wissenschaft auch in deutscher Sprache betreiben könne. Ohne kleinlich zu sein, legte

Digitized by Google

Kneser auch auf den sauberen Satz der Formeln Wert. Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion sah er im Druck ungern durch die landläufige Form des Buchstaben p entweiht.

Von Knesers Geschick, das junge Geschlecht zu selbständiger Tätigkeit anzuregen, geben 27 Breslauer Doktorschriften Kunde, deren Gegenstände meist einem seiner genannten Lieblingsgebiete angehören. Man würde aber seinem Unterrichte nicht gerecht, wenn man nur auf die wissenschaftlichen Erfolge hinwiese; man muß vielmehr auch die starken menschlichen Wirkungen hervorheben. Im Verlaufe emsiger Arbeit spannen sich feine Fäden zwischen Lehrer und Schülern; sie befestigten sich dadurch, daß Kneser einen erlesenen Kreis von ihnen öfters in sein Heim zu Gaste lud, auch Ausflüge mit ihnen in die schlesischen Berge machte, deren Schönheit es ihm angetan hatte. Solche Veranstaltung war der Jugend stets ein Fest. Daß er deren Herzen mit zunehmenden Jahren immer näher kam, war eine der feinsten Früchte seines Alters. Obwohl durch seine Herkunft dem herben norddeutschen Wesen verpflichtet, war er doch dem beweglicheren Sinne des Schlesiers zugetan. Zwar war es nicht ganz leicht, Knesers Zuneigung zu gewinnen, zumal ihm die Würde und die Höhe eignete, die nach dem Dichterworte die Vertraulichkeit entfernt. Für wen er aber einmal sich entschieden hatte, dem wahrte er unverbrüchliche Treue. Als wir als Soldaten im Felde standen, hat er den Briefwechsel mit uns aufrecht erhalten, uns mit mathematischem Schrifttum versorgt, uns brieflich in wissenschaftlichen und menschlichen Dingen beraten, uns in Urlaubszeiten zu sich beschieden. —

So viel von Knesers Seminar; jetzt soll vom mathematischen Colloquium in Breslau die Rede sein, dessen Schöpfung und Erhaltung wesentlich sein Werk gewesen ist. Darin wirkte sich die bedeutsame Erfahrung aus, die Kneser aus der Berliner Mathematischen Gesellschaft mitgebracht hatte. Er verstand es ausgezeichnet, die jüngeren Breslauer Mathematiker zu Vorträgen im Colloquium zu gewinnen. Es gab kaum einen Zweig der Mathematik, der dort in den Berichten der Mitglieder über eigene oder fremde Forschung nicht zur Sprache gekommen wäre. Unbestritten war Kneser die Seele der Veranstaltung, fehlte kaum je bei einer Sitzung oder Nachsitzung, hielt selbst zahlreiche Vorträge und griff oft in die Aussprache ein. Er brachte allen Vortragsgegenständen Anteil entgegen; freilich ließ er mit zunehmenden Jahren immer deutlicher durchblicken, daß ihm diejenigen mathematischen Darbietungen die liebsten waren, welche von der Musik der Formeln der höheren Rechnung begleitet wurden, und daß ihm der formellose Teil der zeitgenössischen Mathematik weniger zusagte.

Auch im physikalischen Colloquium war Kneser kein seltener Gast. Wer seine ernste und förderliche Mitarbeit bei wissenschaftlichen Zusammen-

Digitized by Google

künften kennt, wird mir hier zwei weniger ernste Erinnerungen zugute halten; es gibt ja kein Gesetz, das die schalkhaften und launigen Züge eines Menschen aus seinen wertvollen Eigenschaften ausstriche. Es war die Zeit rascher Entwicklung der allgemeinen Relativitätslehre nach dem Kriege. Der über ihren letzten Stand gehaltene Bericht lastete schwer auf den Zuhörern. Da entspannte Kneser die Lage, indem er an den verdienten Vortragenden die Frage richtete: „Und können Sie uns nun auch von der Energie ein kräftig Wörtlein sagen?“ Die verblüffende Antwort lautete: „Energie — die gibt es eigentlich gar nicht; die Energie ist ein Pseudotensor!“ Daß dieser Bescheid nach Knesers Herzen war, geht aus seiner Schlußbemerkung hervor: „Ich danke Ihnen; das war allerdings ein kräftig Wörtlein!“ Ein andermal bat er um Aufklärung eines vom Vortragenden nur angedeuteten mathematischen Gedankens; als die Erläuterung sich in die Länge zu ziehen drohte und keine allgemeine Teilnahme fand, beendete er sie mit der Bemerkung: „Nun, wenn ich der Einzige bin, der das Mathematische daran nicht versteht, so will ich gewiß nicht länger aufhalten!“

Diese Erinnerungen erwecken weitere an Knesers Auftreten bei den Fachtagungen. Dort zog er den Blick auf sich, schon bevor er das Wort ergriff, durch das Außergewöhnliche seiner Erscheinung, durch die eigene Prägung seiner scharf geschnittenen Züge. Leitete er aber eine Sitzung, so konnte man mit Sicherheit ein zündendes Wort von ihm erwarten. Manches ist noch unvergessen: Wie er einen der Vortragenden mit Dante verglich, daß er seine Gefolgschaft aus der Hölle der Funktionentheorie durch das Fegefeuer der Algebra zum Himmel der Zahlentheorie emporgeführt habe. Wie er, gleichfalls in Jena, begeisterten Lobspruch auf die junge Affingeometrie ausbrachte: Das sei „wahre, echte Mathematik, keine Philosophie, keine Grundlagenkrise,“ — die damals die mathematischen Grenzpfähle zu seinem Mißvergnügen zu verrücken drohten. Wie er in Prag als Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung das von einem Vorredner lieblich gemalte Bild von der Ehe zwischen Mathematik und Physik witzig abwandelte, steht den Teilnehmern an der vorjährigen Tagung noch in frischem Gedächtnisse. Sehr bezeichnend für Kneser ist ein Wort, das er in Jena fast scherzhaft hinwarf und doch so ernst meinte: Als vor dem Vortrage eines jungen, von ihm hochgeschätzten, damals noch weniger bekannten Mathematikers viele Versammlungsteilnehmer den Hörsaal verlassen wollten, hielt Kneser sie zurück: „Die Jugend,“ rief er, „hat jetzt das Wort; wer die Jugend nicht hören will, der schließt sich selbst vom Fortschritte aus!“ Dieser Äußerung des Sechzigjährigen kommt eine tiefere Bedeutung zu: Seine Art fügte sich der bequemen Zweiteilung modern—unmodern nicht; sie war dem ruhenden Pole in der Flucht der Erscheinungen zugewandt. Hierin offenbarte sich seine im besten Sinne konservative Veranlagung. Diese äußerte sich, wie schon angedeutet, auch in seiner Staats-

Digitized by Google

gesinnung; er war ein königstreuer Mann, dem Herrschertume zugetan, ohne gegen die Schwächen des einzelnen Herrschers blind zu sein. Im Gelehrtenstaate aber zeigte er eine freistaatliche Überzeugung; dort mißbilligte er das Streben nach Alleinherrschaft, wo es sich zeigte.

Ich bin damit schon zu der Schilderung des Menschen Kneser übergegangen. Ein Hauptzug seines Wesens, bereits bei flüchtiger Bekanntschaft bemerkbar, war die selbstverständliche und gelassene Erfüllung aller Pflichten, die der Augenblick auferlegte. Diese wahrzunehmen hielt er immer für wichtiger, als die mutmaßlich doch fruchtlosen Versuche, die vorgegebenen Bindungen des Lebens — und der Wissenschaft — abzuändern. Der Arbeitseifer konnte bei Kneser manchmal geradezu spartanisches Gepräge annehmen. Dabei liebte er es, sich ein läßliches Ansehen zu geben, als ob er alles nicht als so gar wichtig ansähe. Es war dies eine der Eigenheiten Knesers, die gelegentlich mißverstanden wurden. Manchem schien es, er werde von ihm menschlich oder wissenschaftlich nicht genügend ernst genommen, weil Kneser seine ernste Meinung über Menschen und Dinge gern hinter einem Scherzworte verbarg. Die ihn näher kannten, wußten, wie es gemeint war, und daß er damit auch vor sich selbst nicht haltmachte, nach dem Worte Goethes: „Wer sich nicht selbst zum besten haben kann, der ist gewiß nicht einer von den Besten.“ So sprach er dann und wann von seiner unglücklichen Liebe zur Geometrie, und es fehlte nicht an Böotern, die solche Äußerungen — sachlich sehr mit Unrecht — ernst nahmen.

Die Hingabe an die Arbeit forderte Kneser auch von allen, mit denen er in der Wissenschaft oder im Amte zu tun hatte. Er ließ da nicht gern Müdigkeit oder Abspannung als Entschuldigung sachlicher Unvollkommenheiten gelten. Auf sich selbst nahm er nicht die geringste Rücksicht. Diese altpreußische Gesinnung wurde ihm allerdings dadurch erleichtert, daß die Natur ihm zu einer unerschütterlichen Seelenruhe eine wunderbare Leibesrüstigkeit verliehen hatte. Es war eine bisher noch nicht genannte Eigenschaft seiner Vorlesungen, daß er sie kaum je wegen Krankheit auszusetzen brauchte; er war immer so gesund, daß er die herkömmliche Frage nach seinem Befinden gern mit der fast ablehnenden Antwort abtat: „Nun, mir geht es ja immer ganz gut.“ — Die geschilderten strengen Eigenschaften machen es verständlich, daß der eine oder der andere an Knesers Wesen in seiner mittleren Lebenszeit eine gewisse Schärfe verspürte. Gewiß ist, daß er mit zunehmenden Jahren immer milder wurde, und daß seinem Alter die abgeklärte Ruhe eines wahrhaft Weisen zuteil ward. Er trank vom goldenen Überfluß der Welt, deren edlen Freuden er niemals abhold war. Bei unserem letzten längeren Zusammensein mit dem hochverehrten Lehrer und väterlichen Freunde war sein Wesen der milden Herbstsonne vergleichbar, die jene Tage seines Besuches in Brünn freundlich beschien. Gerne gaben wir uns dem Zauber seiner un-

Digitized by Google

vergleichlichen Plauderkunst hin. Diese schlug von jeher alle in ihren Bann, die mit ihm zusammenkamen, und um ihretwillen war das Dozentenzimmer neben Knesers Hörsaal 11 ein Anziehungspunkt für seine Amtsgenossen. Seine Gabe, Menschen und Dinge durch ein kurzes Wort in scharfe Beleuchtung zu rücken, wetteiferte mit der Kraft seines Gedächtnisses, aus dem er eine Fülle von Erlebnissen schöpfte, die ihm in seiner langen akademischen Tätigkeit und im Alltag begegnet waren. Er würzte dabei die Rede gern mit einem Dichterworte. Dazu halfen ihm die Griechen und die Römer, deren Werke er in der Ursprache las, die Franzosen, Engländer und Italiener, vor allem aber die großen Deutschen und ganz besonders die Luther-Bibel, in der er, der Sohn des evangelischen Pfarrhauses, ganz zu Hause war.

Doch bliebe man dem Menschen Kneser noch das Beste schuldig, wenn man sich darauf beschränkte, die Gaben seines Geistes zu rühmen. Es gilt von ihm das Wort, das Goethe von Jung-Stilling gesagt hat: „Sein Herz, das wenige kannten, war so groß wie sein Verstand, den alle kannten." Zwar sprach er nicht viel von den höchsten und letzten Dingen, die Wissenschaft ausgenommen. Und doch offenbarten sich denen, die ihm näher standen, seine Grundanschauungen in dem, was er war. Die edlen Eigenschaften, die er in einem schönen Nachrufe (77) an dem Hindenburg der Breslauer Philosophischen Fakultät, an Alfred Hillebrandt, gepriesen hat, waren auch die starken Wurzeln seiner eigenen Kraft: die wahrhaft edelmännische Gesinnung, die großartige innere Freiheit, die heilige Vaterlandsliebe, die tiefe Frömmigkeit. Mit diesen Zügen steht er vor mir, Adolf Kneser, der Gelehrte von hohem Range, der erfolgreiche Lehrer, der hochgemute deutsche Mann: Ehre seinem Andenken!

Verzeichnis der Veröffentlichungen von A. Kneser.

1. Über atmosphärische Schallstrahlenbrechung. Ann. d. Phys. u. Chem. (2) 11 (1880), S. 516—522.
2. Irreductibilität und Monodromiegruppe algebraischer Gleichungen. Dissertation Berlin 1884.
3. Über einige Fundamentalsätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen von mehreren Variablen. Habilitationsschrift Marburg 1884.
4. Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearer Transformation der Variabeln. Math. Ann. 28 (1886), S. 125—132.
5. Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 102 (1887), S. 20—55.
6. Zur Theorie der algebraischen Funktionen. Math. Ann. 29 (1887), S. 171—186.
7. Über die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher gegebene Gattungen algebraischer Größen enthalten sind. Math. Ann. 30 (1887), S. 179—202.
8. Synthetische Untersuchungen über die Schmiegungsebenen beliebiger Raumkurven und die Realitätsverhältnisse spezieller Kegelschnittsysteme. Math. Ann. 31 (1888), S. 507—548.

Digitized by Google

9. Elementarer Beweis für die Darstellbarkeit der elliptischen Funktionen als Quotienten beständig konvergenter Potenzreihen. Math. Ann. 32 (1888), S. 309—330.
10. Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumkurven. Math. Ann. 34 (1889), S. 204—226.
11. Ein neuer Beweis der Unmöglichkeit, allgemeine Gleichungen höheren Grades algebraisch aufzulösen. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 106 (1890), S. 48—64.
12. Über eine Methode zur Darstellung der Determinantentheorie. Sitzungsber. d. Dorpater Naturf.-Ges. 9 (1891), 13 S.
13. Bemerkungen über den sogenannten casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen. Math. Ann. 41 (1892), S. 344—348.
14. Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven. Math. Ann. 41 (1892), S. 349—376.
15. Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. 42 (1893), S. 409—435.
16. Über die Umkehrung der Systeme von Funktionen reeller Variabeln. Math. Ann. 45 (1894), S. 446—470.
17. Bemerkung über die Frenet-Serretschen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Raumkurven. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 113 (1894), S. 89—101.
18. Das Prinzip der kleinsten Aktion nnd die infinitesimale Transformation der dynamischen Probleme. Sitzungsber. d. Dorpater Naturf.-Ges. 10 (1895), S. 501—514.
19. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen (Erster Aufsatz). Journ. f. d. reine u. angew. Math. 115 (1895), S. 308—327.
20. Neue Beweise für die Konvergenz der Reihen, welche bei der Integration linearer Differentialgleichungen in der Umgebung der einfachsten singulären Stellen auftreten. Math. Ann. 47 (1896), S. 408—422.
21. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei großen reellen Werten des Arguments I. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 116 (1896), S. 178—212.
22. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei großen reellen Werten des Arguments II. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 117 (1896), S. 72—103.
23. Zwei Sätze über Bewegungen in der Nähe labiler Gleichgewichtslagen. Sitzungsber. d. Dorpater Naturf.-Ges. 11 (1896), S. 153—161.
24. Gustav von Grofe und seine wissenschaftliche Tätigkeit. Sitzungsber. d. Dorpater Naturf.-Ges. 11 (1896), S. 186—187. — Folgt auf eine Abhandlung von Gustav von Grofe: *Die Bewegung eines mathematischen Pendels von veränderlicher Länge,* die Kneser aus dessen Nachlasse ebenda S. 176—185 herausgegeben hat.
25. Bemerkungen zu der ausnahmslosen Auflösung des Problems, eine quadratische Form durch eine lineare orthogonale Substitution in eine Summe von Quadraten zu verwandeln. Archiv d. Math. u. Phys. (2) 15 (1897), S. 225—231.
26. Einige Sätze über die asymptotische Darstellung von Integralen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. 49 (1897), S. 383—399.
27. Zur Variationsrechnung. Math. Ann. 50 (1897), S. 27—50.
28. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen (Zweiter Aufsatz). Journ. f. d. reine u. angew. Math. 118 (1897), S. 186—223.

Digitized by Google

29. Ableitung hinreichender Bedingungen des Maximums oder Minimums einfacher Integrale aus der Theorie der zweiten Variation. Math. Ann. 51 (1898), S. 321—345.
30. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei großen reellen Werten des Arguments III. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 120 (1899), S. 267—275.
31. Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 6 (1899), S. 95—98.
32. Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Mindings nebst biographischen Notizen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 45 (1900), H.-l. A., S. 113—128.
33. Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn.
    1. Aufl. 1900, XIV + 311 S. 8°.
    2. Aufl. 1925, VII + 397 S. 8°.
34. Beiträge zur Theorie und Anwendung der Variationsrechnung (Erster Aufsatz). Math. Ann. 55 (1901), S. 86—107.
35. Beiträge zur Theorie und Anwendung der Variationsrechnung (Zweiter Aufsatz). Math. Ann. 56 (1902), S. 169—232.
36. Die Jacobische Bedingung des Extremums bei einem allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung. Mitteil. der Math. Ges. zu Charkow (2) 7 (1902), S. 253—267.
37. Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäßigsten Gestalt der Geschoßspitzen. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 2 (1902), S. 267—278.
38. Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurablen. Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 1 (1902), S. 3—9.
39. Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Math. Ann. 58 (1903), S. 81—147.
40. Zur Proportionslehre. Math. Ann. 58 (1903), S. 583—584.
41. Die Stabilität des Gleichgewichts hängender schwerer Fäden. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 125 (1903), S. 189—206.
42. Die Fouriersche Reihe und die angenäherte Darstellung periodischer Funktionen durch endliche trigonometrische Reihen. Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 3 (1904), S. 28—34.
43. Variationsrechnung. Enzykl. d. math. Wissensch. 2_1, S. 571—625. 1904.
44. Die Entwicklung willkürlicher Funktionen in Reihen, die nach Besselschen Funktionen fortschreiten. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 7 (1904), S. 123—133.
45. Ein Beitrag zur Theorie der schnell umlaufenden elastischen Welle. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 51 (1904), S. 264—276.
46. Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen. Math. Ann. 60 (1905), S. 402—423.
47. Über die Begründung der Ähnlichkeitslehre in der Elementargeometrie. Jahresbericht d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 1905, 2 S.
48. Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen. Rend. del Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), S. 233—240.
49. Konjugierte Punkte beim isoperimetrischen Problem. Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 1906, 6 S.
50. Euler und die Variationsrechnung, Festschrift zur Euler-Feier. Abh. z. Gesch. d. math. Wissensch. 25 (1907), S. 21—60.
51. Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Math. Ann. 63 (1907), S. 477—524.

Digitized by Google

52. Integralgleichungen und Darstellung willkürlicher Funktionen von zwei Variabeln. Rend. del Circ. Mat. di Palermo 27 (1909), S. 117—147.
53. Dynamische Deutung gewisser Integralgleichungen mit symmetrischem Kern. Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 1909, 8 S.
54. Kleine Beiträge zur Funktionentheorie. Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 1910, 13 S.
55. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn.
    1. Aufl. 1911, VIII + 244 S. 8°.
    2. Aufl. 1922, VIII + 292 S. 8°.
56. Mathematik und Natur. Rede zum Antritt des Rektorats der Breslauer Universität in der Aula Leopoldina am 15. X. 1911. Breslau, Trewendt und Granier, 18 S. 8°. 1. Abdruck 1911. 2. Abdruck 1913. 3. Abdruck 1918 (vgl. 70).
57. Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie. Festschrift für H. Weber, Leipzig (Teubner) 1912, S. 170—180.
58. Zur Theorie der Determinanten. Math. Abh., H. A. Schwarz zu s. 50jähr. Doktor-Jub. gewidmet. Berlin (Springer) 1914, S. 177—191.
59. Zur Theorie der Legendreschen Polynome. The Tôhoku Math. Journ. 5. (1914), 7 S.
60. Belastete Integralgleichungen. Rend. del Circ. Mat. di Palermo 37 (1914), S. 169—197.
61. Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung. Die Methode von Weierstraß im Zusammenhange mit der Jacobi-Hamiltonschen und einer Integrationstheorie von Cauchy. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 24 (1915), S. 26—57.
62. Bestimmung des Geschlechtes spezieller ganzer transcendenter Funktionen. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 24 (1915), S. 25—41.
63. Die Gaußsche Theorie der geodätischen Linie übertragen auf das Mayersche Problem der Variationsrechnung. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 146 (1915), S. 116—127.
64. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und Mayersche Probleme der Variationsrechnung. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 24 (1915), S. 123—135.
65. Zur Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 24 (1915), S. 230—238.
66. Eine durch elliptische Funktionen darstellbare Transformationsgruppe. Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver. 25 (1916), S. 383—392.
67. Transformationsgruppen und Variationsrechnung. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 147 (1917), S. 54—66.
68. Rede im Schlesischen Bismarckverein, gehalten am 31. III. 1917. Sonderdruck der Schlesischen Zeitung vom 8. IV. 1917, 7 S.
69. Kleinste Wirkung und Galileische Relativität. Math. Zeitschr 2 (1918), S. 326—349.
70. Mathematik und Natur. Von der Schwere. Zwei akademische Reden. Breslau, Trewendt und Granier 1918, 40 S. 8°.
71. Dorpat. Erinnerungen eines alten Professors. Breslauer Zeitung 1918, Nr. 186 (Morgen-Ausgabe vom 13. IV. 1918).
72. Die elementare Theorie der analytischen Funktionen und die komplexe Integration. Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. der Bayr. Akad. d. Wissensch. zu München 1920, S. 65—81.

Digitized by Google

73. Oskar Schlömilchs Kompendium der höheren Analysis, in sechster Auflage bearbeitet von A. Kneser. Erster Band, Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn, 1923. X + 619 S. 8°.
74. Leopold Kronecker. Rede, gehalten bei der Hundertjahrfeier seines Geburtstages in der Berliner Mathematischen Gesellschaft am 19. XII. 1923. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 33 (1925), S. 210—228.
75. A. Kneser und A. Meder, Piers Bohl zum Gedächtnis. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 33 (1925), S. 25—32.
76. Neue Theorie der konjugierten Punkte bei gewissen Klassen von Aufgaben der Variationsrechnung. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Phys.-math. Klasse, 1926, S. 142—168.
77. Alfred Hillebrandt zum Gedächtnis. Schlesische Zeitung 1927, Nr. 602 vom 27. XI. 1927.
78. Neue Untersuchung einer Reihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 158 (1927), S. 209—218.
79. Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart. Leipzig, B. G. Teubner, 1928. 70 S.
80. Wladimir Stekloff zum Gedächtnis. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 38 (1929), S. 206—231.
81. Eine Anwendung der eindimensionalen Greenschen Funktion. Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 270—275.

Besprechungen:

Archiv d. Math. u. Phys. (3) 3 (1902), S. 56—57, 299—301. 6 (1904), S. 333—337. 9 (1905), S. 366—369. 10 (1906), S. 88—89. 11 (1907), S. 347—348. 12 (1907), S. 363—365. 14 (1909), S. 345—347. 15 (1909), S. 256, 347—348, 352—353.

Aufgaben:

Archiv d. Math. u. Phys. (3) 1 (1901), S. 368—369. 3 (1902), S. 307. 4 (1903), S. 349—350. 24 (1916), S. 175, 369.

A. Kneser gab heraus:

C. G. J. Jacobi, Theorie der elliptischen Funktionen. Ostwalds Klassiker Nr. 224. Leipzig, Akad. Verlagsgesellsch., 1927.

Digitized by Google

Zur Begründung des Parallelismus von Levi-Civita[1]).

Von Gerhard Grüß in Berlin.

1. Einleitung. Der von Levi-Civita in die Differentialgeometrie eingeführte Begriff der Parallelübertragung eines Vektors in einer beliebigen n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit hat folgende bemerkenswerte Eigenschaften:

1. Geodätische Linien sind „autoparallel", d. h. ihre Tangentenvektoren gehen durch Parallelverschiebung längs der Geodätischen auseinander hervor.
2. Der Winkel zwischen zwei Richtungen bleibt bei simultaner Parallelübertragung der Richtungen erhalten.
3. Die Länge eines Vektors bleibt bei seiner Parallelverschiebung erhalten.
4. Satz von Severi[2]): Verschiebt man einen Vektor von einem gegebenen Punkt P nach einem Nachbarpunkt P', und zwar einmal bezüglich des gegebenen n-dimensionalen Riemannschen Raumes, und dann bezüglich der zweidimensionalen geodätischen Fläche, die durch die (von einander verschiedenen) Richtungen des Vektors und der Verschiebung PP' eindeutig bestimmt ist, dann gelangt man zu demselben Resultat.

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, daß die von Levi-Civita definierte Parallelverschiebung die einzige differentiierbare Vektorübertragung ist, der jene vier Eigenschaften zukommen; also sind sie für den Parallelismus von Levi-Civita charakteristisch und können dazu dienen die Parallelverschiebung im n-dimensionalen Riemannschen Raum sehr einfach begrifflich einzuführen.

Levi-Civita[3]) selbst geht dabei bekanntlich so vor: Für gewöhnliche Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum läßt sich der Parallelismus durch folgende Konstruktion begründen: man wickelt die Torse, die die gegebene Fläche längs des Verschiebungsweges berührt, auf die Ebene ab, verschiebt den Vektor in der

1) Vorgetragen in der 267. Sitzung am 25. Juni 1930.

2) Severi: Sulla curvatura della superficie e varieta. Rend. del Circolo Mat. di Palermo Bd. 42 (1917) S. 227 ff.

3) Vgl. etwa T. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül, Springer 1928.

Digitized by Google

Abwicklungsebene parallel zu sich und nennt das Bild dieses Vektors auf der Ausgangsfläche parallel zu dem Ausgangsvektor. Für $n > 2$ Dimensionen versagt diese Konstruktion; dagegen läßt sich das sog. Differentialgesetz des Parallelismus, das im Zweidimensionalen aus der Abwicklungskonstruktion folgt, leicht auf $n > 2$ Dimensionen verallgemeinern, wenn die n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit in einen Euklidischen Raum von höherer Dimensionenzahl eingebettet wird. Aus dem verallgemeinerten Differentialgesetz lassen sich dann die Differentialgleichungen des Parallelismus in einer nur die Metrik der Mannigfaltigkeit enthaltenden Form ableiten.

Abweichend von Levi-Civita entwickelt Weyl[4]) den Parallelismus aus folgenden Forderungen: 1. Durch Parallelübertragung von einem Punkt P nach einem Nachbarpunkt P' werden sämtliche Vektoren in P auf sämtliche Vektoren in P' affin abgebildet. 2. Es gibt in P ein „geodätisches" Koordinatensystem, d. h. ein Koordinatensystem, bei dessen Benutzung die Komponenten eines jeden Vektors durch infinitesimale Parallelverschiebung nicht geändert werden. 3. Die Länge eines Vektors bleibt bei seiner Parallelübertragung erhalten.

Die Weylsche Begründung des Parallelismus vermeidet die Mängel der Levi-Civitaschen Ableitung: die Unsymmetrie der Bevorzugung des Zweidimensionalen, die Unanschaulichkeit des sog. Differentialgesetzes der Parallelübertragung, das nur im zweidimensionalen Fall in deutlicher Beziehung zum Parallelismus zweier Richtungen steht, und endlich die Benutzung eines höher dimensionalen Euklidischen Hilfsraumes, in den die Riemannsche Mannigfaltigkeit eingebettet wird. Trotzdem ist der in der vorliegenden Arbeit zu entwickelnde Zugang zum Parallelismus vielleicht aus zwei Gründen nicht überflüssig: erstens sind die Merk-

4) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie 4. Auflage 1921 S. 100 ff. — Eine dritte wesentlich verschiedene Begründung des Parallelismus — anscheinend unabhängig von Levi-Civita — gibt Fokker in seiner Arbeit: „On the equivalent of parallel translation in non-Euclidean space and on Riemanns measure of carvature" Proceedings of the section of sciences 21, 1 (1919) R. Academy of Amsterdam p. 505—517. Fokker bestimmt die „geodätische Verschiebung" eines infinitesimalen starren Probekörpers (der als Aggregat von $2n-2$ Punkten mit bei irgendwelchen Bewegungen konstanten Abständen erklärt wird) durch die Forderung, daß 1) alle Punkte des „Kompasses" bei einer geodätischen Verschiebung bis auf Abweichungen höherer Ordnung denselben Weg zurücklegen wie der willkürliche „Zentralpunkt" des Kompasses; und daß 2) eine gewisse „Reziprozität" zwischen irgend zwei verschiedenen Verschiebungen besteht.

Digitized by Google

male, durch die der Parallelismus hier charakterisiert wird, äußerst einfach, da sie naheliegende Verallgemeinerungen elementarer Ergebnisse Euklidischer Geometrie darstellen, und zweitens bietet sich hier die Möglichkeit, den Begriff der Parallelverschiebung in einfacher Weise auf eine nicht Riemannsche allgemein-metrische Geometrie zu übertragen[5]), da nur rein metrische Elemente — Länge, Winkel, Eigenschaft, geodätische Linie zu sein — benutzt werden, während die Methoden sowohl von Levi-Civita wie auch von Weyl an die Riemannsche Metrik gebunden zu sein scheinen. Insbesondere dürfte sich die Bedeutung des affinen Zusammenhanges auf die Riemannsche Geometrie beschränken.

2. Der zweidimensionale Fall. Um nun die Differentialgleichungen des Parallelismus aus den an die Spitze gestellten Forderungen abzuleiten, bemerken wir zunächst, daß auch hier der Fall $n = 2$ eine besondere Rolle spielt. Denn im Zweidimensionalen erübrigt sich die vierte Bedingung, weil die durch Vektor und Verschiebung bestimmte geodätische Fläche mit der gegebenen Fläche identisch ist. Indessen wird hier die Sonderstellung des Falles $n = 2$, der zunächst erledigt werden soll, durch den Severischen Satz gerechtfertigt.

x_i $(i = 1, 2)$ mögen die Koordinaten auf der Fläche sein, deren Bogenelement ds durch

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \equiv a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad |a_{ik}| \neq 0$$

gegeben ist. Der Vektor mit den kontravarianten[6]) Komponenten u_i von der Länge $l = +\sqrt{a_{ik}\, u_i\, u_k}$ soll im oben angegebenen Sinn von $\{x_i\}$ nach $\{x_i + dx_i\}$ parallel verschoben werden. Wie ändern sich seine Komponenten u_i?

Zunächst sei $u_1\, dx_2 - u_2\, dx_1 \neq 0$. Man betrachte die geodätische Linie, die im Punkt $\{x_i\}$ die Richtung der Verschiebung $\{dx_i\}$ hat; ist α $(\neq 0, \neq \pi)$ der Winkel zwischen dem Vektor $\{u_i\}$ und dem Tangentialeinheitsvektor $\left\{\frac{dx_i}{ds}\right\}$ dieser geodätischen Linie, also

5) Vgl. einen diesbezüglichen Versuch in meiner Note: Beiträge zur Differentialgeometrie zweidimensionaler allgemein-metrischer Flächen. Math. Ann. 103 Heft 1 S. 162 ff.

6) Die Parallelverschiebung eines kovarianten Vektors $\{v_i\}$ wird dann in bekannter Weise eindeutig durch die Forderung bestimmt, daß das invariante Produkt $u_i v_i$ — $\{u_i\}$ ein beliebiger kontravarianter Vektor — ungeändert bleibt. — Da in der Folge nur kontravariante Vektoren auftreten, verzichte ich darauf, die Kontravarianz durch Hochstellen der Indizes anzudeuten.

Digitized by Google

$$\cos\alpha = \frac{a_{ik}\,u_i\,dx_k}{\sqrt{a_{ik}\,u_i\,u_k}\,\sqrt{a_{ik}\,dx_i\,dx_k}}, \tag{2}$$

dann gilt für die Parallelübertragung von $\{u_i\}$ längs $\{dx_i\}$ nach der Forderung 3)

$$d(a_{ik}\,u_i\,u_k) = 0 \tag{3}$$

und nach der Forderung 1), 2) und 3)

$$d\left(a_{ik}\,u_i\,\frac{dx_k}{ds}\right) = 0, \tag{4}$$

da der Winkel α als Winkel zwischen den simultan parallel verschobenen Vektoren $\{u_i\}$ und $\left\{\frac{dx_i}{ds}\right\}$ erhalten bleibt[7]). Aus (3) folgt

$$du_i\,u_k\,a_{ik} = -\tfrac{1}{2}\,u_i\,u_k\,da_{ik},$$

und wegen

$$da_{ik} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\,dx_l = (\Gamma_{il,\,k} + \Gamma_{kl,\,i})\,dx_l$$

$$du_i\,u_k\,a_{ik} = -u_i\,u_k\,\Gamma_{il,\,k}\,dx_l, \tag{5}$$

worin

$$\Gamma_{il,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k}\right) = a_{k\varrho}\,\Gamma^{\varrho}_{il} \tag{6}$$

ist. Gl. (4) ergibt

$$du_i\,a_{ik}\,\frac{dx_k}{ds} = -u_i\,a_{ik}\,d\,\frac{dx_k}{ds} - u_i\,\frac{dx_k}{ds}\,(\Gamma_{il,\,k} + \Gamma_{kl,\,i})\,dx_l. \tag{7}$$

Da die Verschiebung längs des Linienelementes $\{dx_i\}$ der oben betrachteten geodätischen Linie geschieht, erhält man aus ihren Differentialgleichungen

$$d\,\frac{dx_k}{ds} + \Gamma^{k}_{lm}\,\frac{dx_l}{ds}\,\frac{dx_m}{ds}\,ds = 0 \qquad k = 1, 2$$

$$a_{ik}\,d\,\frac{dx_k}{ds} = -\Gamma_{lm,\,i}\,\frac{dx_l}{ds}\,\frac{dx_m}{ds}\,ds, \qquad i = 1, 2$$

7) Daß der Winkel zwischen einem Vektor, der längs einer geodätischen Linie parallel verschoben wird, und dieser Kurve konstant ist, benutzt Corbellini zur Definition des Parallelismus auf gewöhnlichen Flächen konstanten Krümmungsmaßes und leitet daraus eine kinematische Konstruktion paralleler Richtungen her. Vgl. Corbellini, Genesi cinematica, intrinseca del parallelismo di Levi-Civita per le superficie a curvatura costante. Atti d. reale accad. dei Lincei, rendiconti, 1. Sem. Bd. 32 (1923) S. 72 ff. — Man vergleiche auch Lagally, Vektorrechnung (Leipzig 1928), S. 312 ff., wo die geodätische Übertragung (Parallelverschiebung) als lineare Übertragung erkannt wird, deren Bahnkurven die geodätischen Linien sind.

Digitized by Google

also aus (7)

$$du_i a_{ik} \frac{dx_k}{ds} = u_i \Gamma_{lm,i} \frac{dx_l}{ds} \frac{dx_m}{ds} ds - u_i \frac{dx_k}{ds} (\Gamma_{il,k} + \Gamma_{kl,i}) \frac{dx_l}{ds} ds$$

oder

$$du_i a_{ik} \frac{dx_k}{ds} = - u_i \Gamma_{il,k} \frac{dx_k}{ds} dx_l. \tag{8}$$

Die Gleichungen (5) und (8) stellen nun zwei lineare Gleichungen für $du^i a_{ik}$ $(k = 1, 2)$ dar, die sich mit Hilfe von

$$\alpha_k = - u_i \Gamma_{il,k} dx_l$$

folgendermaßen schreiben lassen:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k (du_i a_{ik} - \alpha_k) = 0, \\ \dfrac{dx_k}{ds} (du_i a_{ik} - \alpha_k) = 0. \end{array} \right. \tag{9}$$

Da die Determinante $\Delta = u_1 dx_2 - u_2 dx_1$ nach Voraussetzung von Null verschieden ist, folgt

$$du_i a_{ik} = \alpha_k \qquad k = 1, 2$$

oder

$$du_k + \Gamma^k_{lm} u_l dx_m = 0 \qquad k = 1, 2, \tag{10}$$

und das sind die bekannten Differentialgleichungen des Parallelismus, die damit — zunächst nur für den Fall $\Delta \neq 0$ — abgeleitet sind. Daß sie auch für $\Delta = 0$, also für die Verschiebung eines Vektors in seiner Richtung gelten, beweist man entweder durch Grenzübergang $\Delta \to 0$, oder auch unmittelbar folgendermaßen: da im Ausgangspunkt der Verschiebung $u_i = \lambda \frac{dx_i}{ds} (\lambda \gtrless 0)$ ist, und wegen der Erhaltung des Winkels der Vektor $\{u_i\}$ stets die Richtung der geodätischen Linie haben muß, die er anfangs berührt, geht (5) über in

$$d\left(\lambda \frac{dx_i}{ds}\right) a_{ik} \frac{dx_k}{ds} = - u_i \frac{dx_k}{ds} \Gamma_{il,k} dx_l \tag{5a}$$

oder wegen

$$a_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 1$$

in

$$d\lambda + \lambda \frac{dx_k}{ds} \left[a_{ik} d \frac{dx_i}{ds} + \Gamma_{il,k} \frac{dx_i}{ds} dx_l \right] = 0. \tag{5b}$$

Die eckige Klammer verschwindet, weil $\{dx_i\}$ Linienelement einer geodätischen Linie ist; also ist λ konstant und man erhält sofort

Digitized by Google

$$du_i = \lambda d\frac{dx_i}{ds} = -\lambda \Gamma^i_{kl}\frac{dx_l}{ds}\,dx_k$$

oder

$$du_i + \Gamma^i_{kl}\,u_l\,dx_k = 0.$$

Damit ist für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten alles bewiesen.

3. Im Fall von $n > 2$ Dimensionen ist offenbar die vierte der anfangs formulierten Bedingungen die wichtigste: daß der Severische Satz gelten soll. Die Fragestellung ist die gleiche wie in dem eben Erledigten, nur daß der Dimensionenzahl entsprechend alle Indizes von 1 bis n laufen: im Punkt $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ sind ein kontravarianter Vektor $\{u_i\}$ und eine Verschiebung $\{dx_i\}$ gegeben. Wie bestimmen sich die Änderungen du_i der Komponenten u_i bei der durch die Forderungen 1) bis 4) charakterisierten Parallelübertragung von $\{x_i\}$ nach $\{x_i + dx_i\}$? Zunächst mögen die Vektoren $\{u_i\}$ und $\{dx_i\}$ linear unabhängig sein, so daß sie eine Flächenrichtung bestimmen. Die Gesamtheit der ∞^1 geodätischen Linien, die vom Punkt $\{x_i\}$ ausgehen und eine in der Flächenrichtung liegende Anfangstangente haben, bildet die durch Vektor und Verschiebung bestimmte geodätische Fläche. Die Gleichungen des Büschels geodätischer Linien durch $\{x_i\}$ seien

$$x_i = x_i(s, \vartheta) \qquad i = 1, 2, \ldots n; \tag{11}$$

s, der Parameter auf der geodätischen Linie $\vartheta = \text{const.}$, bedeute die vom Zentrum $\{x_i\}$ des Büschels aus gemessene Bogenlänge, so daß folgende Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{a_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_k}{\partial t}}\,dt, \qquad a_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial s} = 1 \\ x_i(o, \vartheta) &= x_i(o) \quad \text{für} \quad o \leqq \vartheta < 2\pi \\ \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}(o, \vartheta) &= 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial s}(o, \vartheta) &= \lambda(\vartheta)\,u_i + \mu(\vartheta)\,dx_i \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots n. \tag{12}$$

Die letzten Gleichungen (12) charakterisieren die Fläche (11) als geodätische Fläche der durch die Vektoren $\{u_i\}$ und $\{dx_i\}$ bestimmten Flächenrichtung. Als der die einzelne geodätische Linie charakterisierende Parameter ϑ werde etwa der Winkel gewählt, den die Anfangstangente der betreffenden Geodätischen mit dem gegebenen Vektor $\{dx_i\}$ der Verschiebung einschließt. Die geo-

Digitized by Google

dätischen Kreise $s = \text{const.}$ schneiden die Radien des geodätischen Polarkoordinatensystems senkrecht:

$$a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial \vartheta} = 0. \tag{13}$$

Die geodätische Fläche (11) hat das Linienelementquadrat

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= a_{ik} \left(\frac{\partial x_i}{\partial s} ds + \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \left(\frac{\partial x_k}{\partial s} ds + \frac{\partial x_k}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \\ &= \gamma_{11} ds^2 + 2\gamma_{12} ds\, d\vartheta + \gamma_{22} d\vartheta^2 \end{aligned} \tag{14}$$

mit

$$\gamma_{11} = 1, \qquad \gamma_{12} = 0, \qquad \gamma_{22}(s, \vartheta) = a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta} \frac{\partial x_k}{\partial \vartheta}.$$

Der Pol des geodätischen Polarkoordinatensystems ist singulär für die Parameterdarstellung s, ϑ, da wegen (12) $\gamma_{22}(o, \vartheta) = 0$, also $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = 0$ für $s = 0$. Wenn wir aber voraussetzen, daß $\{x_i(o)\}$ ein regulärer Punkt des n-Raumes ist, d. h. daß die a_{ik} in einer Umgebung dieses Punktes analytisch sind, dann ist auch die Fläche $x_i(s, \vartheta)$ regulär, und für γ_{22} gilt in der Umgebung von $\{x_i(o)\}$ die Entwicklung

$$\gamma_{22}(s, \vartheta) = s^2 - \frac{K_0}{3} s^4 + \cdots, \tag{15}$$

wo K_0 das Krümmungsmaß der geodätischen Fläche im Punkt $\{x_i(o)\}$ ist. Nach diesen Vorbemerkungen leiten wir die Differentialgleichungen des Parallelismus folgendermaßen her:

Die vom Pol $\{x_i(o)\}$ ausgehende Verschiebung $\{dx_i\}$ von dem Betrage $ds = +\sqrt{a_{ik} dx_i dx_k}$ wird mit Hilfe der geodätischen Polarkoordinaten durch

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial s}(o, o)\, ds \tag{16}$$

dargestellt. Nach der vierten (Severischen) Bedingung liegt der nach $\{x_i(o) + dx_i\}$ parallel verschobene Vektor mit den Komponenten $u_i(ds) = u_i + du_i$ in der Tangentialmannigfaltigkeit der geodätischen Fläche im Punkt $\{x_i(o) + dx_i\}$, d. h. es ist

$$u_i(ds) = \frac{\partial x_i}{\partial s}(ds, o)\, v_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}(ds, o) v_2. \tag{17}$$

Die Komponenten v_1, v_2 des Vektors $\{u_i(ds)\}$ werden wie im zweidimensionalen Fall durch die Bedingungen 1) bis 3) charakterisiert, d. h. es muß der Winkel zwischen den Vektoren $\{u_i(ds)\}$ und

Digitized by Google

$\left\{\frac{\partial x_i}{\partial s}(ds, o)\right\}$ gleich dem Winkel zwischen den Richtungen $\{u_i\}$ und $\left\{\frac{\partial x_i}{\partial s}(o, o)\right\}$ sein, und ebenso muß die Länge des Vektors $\{u_i\}$ erhalten bleiben. Winkel α und Länge l sind durch die Gleichungen

$$(18) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_{ik}u_i\,dx_k}{\sqrt{a_{ik}u_i\,u_k}\,\sqrt{a_{ik}\,dx_i\,dx_k}}, \\ l = +\sqrt{a_{ik}\,u_i\,u_k} \end{cases}$$

definiert. Aus (17) folgt dann

$$(19) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_{ik}(ds, o)\,u_i(ds)\,\dfrac{\partial x_k}{\partial s}(ds, o)}{l} = \dfrac{v_1}{l} \\ \text{und} \\ l^2 = a_{ik}(ds, o)\,u_i(ds)\,u_k(ds) = v_1^2 + \gamma_{22}v_2^2, \end{cases}$$

so daß sich bei passender Wahl des Drehsinnes vom Koordinatenwinkel ϑ

$$(20) \qquad v_1 = l\cos\alpha, \qquad v_2 = \frac{l\sin\alpha}{+\sqrt{\gamma_{22}(ds, o)}}$$

ergibt.

Im Anfangspunkt der Verschiebung $\{x_i(o)\}$ versagen die Gleichungen (20) wegen $\gamma_{22}(o, \vartheta) = 0$. Vielmehr werden die Komponenten des Vektors durch

$$(21) \qquad u_i = \frac{\partial x_i}{\partial s}(o, \alpha)\,l$$

dargestellt, oder bei Benutzung der nachher zu beweisenden Hilfsformel

$$(22) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial s}(o, o)\cos\varphi + \frac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial\vartheta}(o, o)\sin\varphi = \frac{\partial x_i}{\partial s}(o, \varphi)$$

durch

$$(23) \qquad u_i = \frac{\partial x_i}{\partial s}(o, o)\,l\cos\alpha + \frac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial\vartheta}(o, o)\,l\sin\alpha.$$

Nun gehen die durch die Gleichungen (17) und (20) definierten Komponenten $u_i(ds)$ des parallel verschobenen Vektors für $ds \to 0$ stetig in die durch (23) definierten Komponenten $u_i = u_i(o)$ über. Denn es ist ja wegen der Regularitätsvoraussetzung

$$\frac{\partial x_i}{\partial\vartheta}(ds, o) = ds\,\frac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial\vartheta}(o, o) + \frac{ds^2}{2!}\,\frac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial\vartheta}(o, o) + \cdots,$$

Digitized by Google

also nach (15), (17) und (20)

$$(24)\quad u_i(ds) = \frac{\partial x_i}{\partial s}(ds, o)\, l\cos\alpha + \frac{\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial\vartheta}(o, o) + \dfrac{ds}{2!}\dfrac{\partial^3 x_i}{\partial s^2\,\partial\vartheta}(o, o) + \cdots}{+\sqrt{1 - \dfrac{K_0}{3}ds^2 + \cdots}}\, l\sin\alpha$$

und daher

$$\lim_{ds\to 0} u_i(ds) = u_i(o) = u_i.$$

Weiter folgt aber aus denselben Gleichungen

$$(25)\quad \frac{du_i}{ds}(o) = \lim_{ds\to 0}\frac{u_i(ds) - u_i(o)}{ds} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial s^2}(o, o)\, l\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 x_i}{\partial s^2\,\partial\vartheta}(o, o)\, l\sin\alpha.$$

Da aber $\left\{\dfrac{\partial x_i}{\partial s}\right\}$ Tangentenvektor einer geodätischen Linie ist, gelten die Gleichungen

$$(26)\quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial s^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{\partial x_l}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial s} = 0,$$

durch deren Differentiation nach ϑ man für $s = 0$

$$(27)\quad \frac{\partial^3 x_i}{\partial s^2\,\partial\vartheta} + 2\Gamma^i_{kl}\frac{\partial x_l}{\partial s}\frac{\partial^2 x_k}{\partial s\,\partial\vartheta} = 0$$

erhält, da

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Gamma^i_{kl}(o, \varphi) = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots n)$$

gilt. Damit geht (25) über in

$$\frac{du_i}{ds}(o) = -\Gamma^i_{kl}\frac{\partial x_l}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial s}\, l\cos\alpha - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial x_l}{\partial s}\frac{\partial^2 x_k}{\partial s\,\partial\vartheta}\, l\sin\alpha$$

und mit Rücksicht auf (23) in

$$\frac{du_i}{ds}(o) = -\Gamma^i_{kl}\frac{\partial x_l}{\partial s}u_k$$

oder

$$(28)\quad du_i + \Gamma^i_{kl}u_k\, dx_l = 0,$$

womit man die Differentialgleichungen des Parallelismus in der gewohnten Form erhalten hat.

Bevor ich die Ableitung durch den Beweis der oben benutzten Hilfsformel (22) vervollständige, muß noch der bisher ausgeschlossene Fall erledigt werden, daß Vektor und Verschiebung gleiche Richtung haben. Wenn $u_i = \lambda dx_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ gilt, wird die Severische Bedingung hinfällig, weil durch die zusammenfal-

Digitized by Google

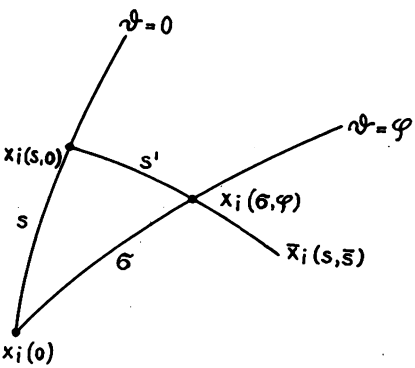
lenden Richtungen keine geodätische Fläche bestimmt ist. Man schließt aber genau so wie beim zweidimensionalen Problem die Gültigkeit der Gleichung (5 b), in der jetzt nur alle Indizes von 1 bis n laufen, und aus dieser Gleichung ergeben sich dann wie früher die Differentialgleichungen des Parallelismus.

4. Beweis der Hilfsformel. Ein in den n-dimensionalen Raum der x_i eingebettetes reguläres Flächenstück — oben war es speziell eine geodätische Fläche des n-Raumes, die im folgenden zu beweisende Gleichung gilt aber allgemein — möge durch geodätische Polarkoordinaten mit dem Pol $x_i(o)$ orientiert sein:

$$x_i = x_i(s, \vartheta) \qquad i = 1, 2, \ldots n;$$

s und ϑ sollen dieselbe Bedeutung wie früher haben.

Man betrachte die beiden geodätischen Linien $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \varphi$ des Büschels und fälle vom Punkte $x_i(\sigma, \varphi)$ der zweiten geodätischen Linie auf die erste das geodätische Lot; es ist eindeutig bestimmt, wenn nur $\sigma > 0$ unterhalb einer positiven, bei gegebenem φ festen Schranke liegt[8]). Wie man leicht zeigt, ist die Bogenlänge s, die das geodätische Lot auf der Kurve $\vartheta = 0$ vom Punkt $\{x_i(o)\}$ aus gerechnet abschneidet — s ist die Projektion von σ auf der Kurve $\vartheta = 0$ —, eine analytische Funktion von σ, falls nur σ genügend klein ist; und dasselbe gilt von der Bogenlänge s' des Lotes zwischen den Punkten $\{x_i(s, o)\}$ und $\{x_i(\sigma, \varphi)\}$. Die Koordinaten der Punkte des geodätischen Lotes mögen mit $\bar{x}_i(s, \bar{s})$ bezeichnet werden, wobei der Parameter s andeuten soll, daß die Kurve $\bar{x}_i(s, \bar{s})$ die geodätische Linie $\vartheta = 0$ im Punkt $\{x_i(s, o)\}$ unter rechtem Winkel schneidet; $\bar{s}$ endlich sei die vom Punkt $\{x(s, o)\}$ aus gemessene Bogenlänge des geodätischen Lotes. Danach gelten folgende Beziehungen:



$$(29)\quad \begin{cases} \text{a)} & x_i(s, o) = \bar{x}_i(s, o), \\ \text{b)} & a_{ik}(s, o)\dfrac{\partial x_i}{\partial s}(s, o)\dfrac{\partial \bar{x}_k}{\partial \bar{s}}(s, o) = 0, \\ \text{c)} & \bar{x}_i(s, s') = x_i(\sigma, \varphi). \end{cases}$$

8) Darboux, Théorie générale des surfaces, Paris 1889; Bd. II, S. 412 ff.

Digitized by Google

Entwickelt man die beiden Seiten der Gleichung (29 c) nach Potenzen von σ, so erhält man

$$\bar{x}_i(o, o) + \sigma\left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial s}(o, o)\frac{ds}{d\sigma} + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{s}}(o, o)\frac{ds'}{d\sigma}\right) + \cdots$$

$$= x_i(o, \varphi) + \sigma\frac{\partial x_i}{\partial s}(o, \varphi) + \ldots,$$

also

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial s}(o, o)\frac{ds}{d\sigma} + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{s}}(o, o)\frac{ds'}{d\sigma} = \frac{\partial x_i}{\partial s}(o, \varphi). \tag{30}$$

Nun folgt aus (29 b) und

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{s}}(s, o) = \alpha\frac{\partial x_i}{\partial s}(s, o) + \beta\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}(s, o)$$

wegen

$$a_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \beta = 1 : +\sqrt{a_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}\frac{\partial x_k}{\partial \vartheta}},$$

also

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{s}}(s, o) = \frac{\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta}(s, o)}{+\sqrt{s^2 - \frac{K_0}{3}s^4 + \cdots}} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial \vartheta}(o, o) + \cdots. \tag{31}$$

Andrerseits folgt aus (30) und (29 b), da wegen (29 a)

$$\frac{\partial x_i}{\partial s}(s, o) = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial s}(s, o)$$

gilt,

$$\frac{ds'}{d\sigma} = a_{ik}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial \bar{s}}(o, o)\frac{\partial x_i}{\partial s}(o, \varphi) = \sin\varphi, \tag{32 a}$$

und

$$\frac{ds}{d\sigma} = a_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial s}(o, o)\frac{\partial x_k}{\partial s}(o, \varphi) = \cos\varphi. \tag{32 b}$$

Benutzt man nun die Gleichungen (31), (32 a) und (32 b), so geht (30) über in

$$\frac{\partial x_i}{\partial s}(o, o)\cos\varphi + \frac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial \vartheta}(o, o)\sin\varphi = \frac{\partial x_i}{\partial s}(o, \varphi) \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{33}$$

und das ist die zu beweisende Hilfsformel.

Digitized by Google

Übrigens ist es für den Beweis nicht wesentlich, daß die Kurve, durch die der Punkt $x_i(\sigma, \varphi)$ auf die geodätische Linie $\vartheta = 0$ projiziert wird, eine Geodätische ist; man kann irgend eine Kurve benutzen, die die geodätische Linie $\vartheta = 0$ orthogonal schneidet. Das geodätische Lot wurde hier nur deshalb eingeführt, weil es in einfacher Weise eine analytische Projektionskurve darstellt.

Die Hilfsformel läßt sich leicht verifizieren, wenn es sich um eine Fläche im gewöhnlichen Euklidischen Raum ($n = 3$) handelt und wenn die x_i spezielle rechtwinklige cartesische Koordinaten bedeuten: der Ursprung $x_i = 0$ ist Pol des geodätischen Polarkoordinatensystems, die x_1-Achse ist Tangente der geodätischen Linie $\vartheta = 0$, die x_3-Achse hat die Richtung der Flächennormalen. Dann gelten nämlich folgende Entwicklungen[9]):

$$x_1 = s\cos\vartheta + \frac{s^3}{3!}z_1(\vartheta) + \cdots, \qquad x_2 = s\sin\vartheta + \frac{s^3}{3!}z_2(\vartheta) + \cdots,$$

$$x_3 = \frac{s^2}{2!}\frac{1}{R} + \cdots$$

(R = Krümmungsradius der geodätischen Linie $\vartheta = 0$ in $\{x_i = o\}$, aus denen die Richtigkeit der Gleichung (33) sofort erhellt; der allgemeine Beweis der Hilfsformel scheint aber am einfachsten in der obigen Weise gebracht zu werden.

5. Schlußbemerkungen. Die Ableitung der Differentialgleichungen des Parallelismus für den Fall $n > 2$ scheint vielleicht zu umständlich; man wird zunächst eine rein formale Herleitung etwa folgendermaßen versuchen: Auf der geodätischen Fläche in der durch Vektor und Verschiebung gegebenen Flächenrichtung wird die Parallelübertragung durch die für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten bewiesenen Differentialgleichungen geleistet. Bestimmt man also die beiden Komponenten des Vektors $\{u_i\}$ bezüglich eines Koordinatensystems der geodätischen Fläche, so hat man nur die Änderung dieser Komponenten nach den bekannten Gleichungen zu bestimmen und daraus die Größen du_i zu berechnen. Dieser formale Weg ist nicht gangbar, wenn man die geodätische Fläche durch Polarkoordinaten orientiert, weil der Pol singulärer Punkt dieser Parameterdarstellung ist: die Determinante der metrischen Grundform der geodätischen Fläche hat im

9) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I. S. 98. — L. Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie S. 160.

Digitized by Google

Pol den Wert Null. Andrerseits scheint das geodätische Polarkoordinatensystem zur Orientierung der geodätischen Fläche berufen, da sie als die von den ∞^1 geodätischen Linien der gegebenen Flächenrichtung gebildete Fläche definiert wird. Man hat also die Wahl, ein anderes, im Anfangspunkt der Verschiebung nicht singuläres Koordinatensystem einzuführen, oder bei Verzicht auf den formalen Weg einen Grenzübergang durchzuführen, etwa wie es oben geschehen ist. Offensichtlich läßt sich die nur der Einfachheit wegen eingeführte Voraussetzung der Regularität der a_{ik} durch schwächere Bedingungen ersetzen.

Digitized by Google

Über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre[1]).

Von Alfred Brauer und Hermann Zeitz in Berlin.

Um die Existenz unendlich vieler Primzahlen in der arithmetischen Progression $kx+l$ für $(k, l) = 1$ zu beweisen, gibt Legendre in seiner Théorie des Nombres[2]) einen vermeintlichen Beweis für die folgende Behauptung:

Bezeichnet p_n die n-te Primzahl, so gibt es höchstens $p_{n-1}-1$ aufeinanderfolgende ungerade Zahlen derart, daß alle diese Zahlen durch mindestens eine der Primzahlen $p_2, p_3, \ldots, p_n$ teilbar sind.

Daß der Beweis, den Legendre für diese Behauptung gibt, falsch ist, erkannte schon Dirichlet[3]); es gelang ihm aber nicht, wie er selbst angibt, die Legendresche Behauptung zu beweisen, sondern er mußte den Beweis für den Satz von der arithmetischen Progression auf ganz andere Weise führen.

Im Jahre 1858 stellte die Pariser Akademie die folgende Preisaufgabe[4]):

Es ist die Legendresche Behauptung zu beweisen oder es ist zu zeigen, durch welche größere Zahl hierbei $p_{n-1}-1$ zu ersetzen ist.

Die eingegangenen fünf Arbeiten brachten keine befriedigende Lösung der Frage; der Preis wurde A. Dupré zuerkannt. Dieser zeigte in seiner Arbeit[5]), daß die Legendresche Behauptung für $p_n \leqq 19$ und für $p_n = 29$, 31 und 41 richtig ist, daß sie aber nicht allgemein gilt, da sie für $p_n = 23$ und 37 und für $43 \leqq p_n \leqq 113$ falsch ist.

---

1) Vorgetragen in der 267. Sitzung am 25. Juni 1930.

2) Tome II, Paris (1830) S. 71—79.

3) Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, Abhandlungen d. Preußischen Akademie d. Wiss. 1837 S. 45—81 = Werke I. S. 313—342.

4) Rapport sur le concours pour le grand prix de sciences Mathématiques, Comptes Rendus 48 (1859) S. 487—488.

5) Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres, ouvrage placé en première ligne par l'Academie des Sciences dans le concours pour le grand prix de Mathématiques de 1858, Paris (1859) Mallet-Bachelier.

Digitized by Google

Unabhängig hiervon wiesen später Moreau[6]) und A. Piltz[7]) darauf hin, daß die Legendresche Behauptung allgemein nicht richtig ist; Piltz sprach ferner die Vermutung aus, daß die Behauptung für alle hinreichend großen p_n falsch sei.

Vor kurzem hat auch Herr R. J. Backlund[8]) die Richtigkeit der Legendreschen Behauptung für $p_n \leqq 19$ bewiesen.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß für $p_n \geqq 43$ die Legendresche Behauptung falsch ist. Beim Beweise wird eine elementare Methode benutzt, die der zweite der Verfasser in einem Privatdruck[9]) soeben veröffentlicht hat. Es ergibt sich ferner, daß nach Wahl einer beliebig kleinen positiven Zahl ε sich eine Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß für alle $n > n_0$ es mindestens

$$N = (2-\varepsilon)p_n$$

aufeinanderfolgende ungerade Zahlen gibt, die sämtlich zu $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ nicht teilerfremd sind.

Herr Backlund[10]) hat gezeigt, daß es für jedes beliebig kleine positive δ unendlich viele aufeinanderfolgende Primzahlen p_m und p_{m+1} gibt, welche der Bedingung

$$p_{m+1} - p_m > (2-\delta)\log p_m$$

genügen. Nach seiner Methode ergibt sich hier für unendlich viele m die bessere Abschätzung

$$p_{m+1} - p_m > (4-\delta)\log p_m.$$

Es soll zunächst der folgende Hilfssatz bewiesen werden:

Hilfssatz: *Es sei p_n die n-te Primzahl, A_{n-1} die Anzahl der Primzahlen p, die der Bedingung*

$$\frac{p_{n-1}-1}{2} < p < p_{n-1} - 1$$

genügen. Ist dann

$$p_n \geqq 103,$$

6) Extrait d'une lettre de M. Moreau, Nouvelles Annales (2) XII (1873) S. 323—324.

7) Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze, Habilitationsschrift, Jena 1884.

8) Über die Differenzen zwischen den Zahlen, die zu den n ersten Primzahlen teilerfremd sind, Commentationes in honorem Ernesti Leonardi Lindelöf, Helsinki 1929.

9) H. Zeitz, Elementare Betrachtungen über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre, Berlin 1930.

10) A. a. O. 8).

Digitized by Google

so ist

$$A_{n-1} \geqq 2\left[\frac{\log\frac{p_{n-1}-1}{2}}{\log 2}\right].$$

Beweis: Setzt man

$$p_{n-1}-1 = 2x$$

und wie üblich

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p,$$

so ist

$$A_{n-1} = \pi(2x)-\pi(x) = \sum_{x<p\leqq 2x} 1 \geqq \sum_{x<p\leqq 2x} \frac{\log p}{\log 2x}$$

$$= \frac{1}{\log 2x} \sum_{x<p\leqq 2x} \log p = \frac{1}{\log 2x}(\vartheta(2x)-\vartheta(x)).$$

Nun ist [11])

$$\vartheta(2x)-\vartheta(x)$$

$$\geqq \vartheta(2x-2)-\vartheta(x) > 0{,}7x-3{,}4\sqrt{x}-4{,}5\log^2 x-24\log x-32.$$

Daher genügt es zu zeigen:

$$0{,}7x-3{,}4\sqrt{x}-4{,}5\log^2 x-24\log x-32 > \frac{2\log x}{\log 2}\log 2x$$

$$= \frac{2\log^2 x}{\log 2}+2\log x,$$

$$f(x) = 0{,}7x-3{,}4\sqrt{x}-\left(4{,}5+\frac{2}{\log 2}\right)\log^2 x-26\log x-32 > 0.$$

Da $\log 1000 < 7$ ist, ist dies, wie eine leichte Rechnung ergibt, für $x = 1000$ erfüllt. Ferner ist für $x \geqq 1000$

$$f'(x) = 0{,}7-\frac{3{,}4}{2\sqrt{x}}-\frac{\log x\left(9+\frac{4}{\log 2}\right)}{x}-\frac{26}{x} > 0.$$

Folglich wächst $f(x)$ für $x \geqq 1000$, und die Behauptung ist also für $x \geqq 1000$ bewiesen.

Für $49 \leqq x < 1000$ ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung leicht direkt. So erhält man z. B. für $555 \leqq x < 1000$ sofort die Richtigkeit der Behauptung aus der Tatsache, daß 18 Primzahlen zwischen 1000 und 1110 liegen; u. s. w.

11) S. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig (1909), Bd. I S. 91.

Digitized by Google

Der Hilfssatz gilt also für $x \geqq 49$, $p_n \geqq 103$.

Legendre verfährt bei seinem vermeintlichen Beweis folgendermaßen: Für $n \geqq 3$ sei x eine Lösung der simultanen Kongruenzen

$$(1) \qquad \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p_{n-1}}, \\ x \equiv 1 \pmod{p_{n-1}}, \\ x \equiv -1 \pmod{p_n}. \end{cases}$$

Die Zahlen

$$(2) \qquad x-(p_{n-1}-2),\ x-(p_{n-1}-4),\ \dots,\ x-1,\ x+1,\ \dots,\ x+(p_{n-1}-4),\ x+(p_{n-1}-2)$$

haben die Form

$$x \pm (2\alpha+1) \qquad (2\alpha+1 = 1, 3, \dots, p_{n-1}-2).$$

Ist nun für eine Primzahl q

$$2\alpha+1 \equiv 0 \pmod{q},$$

so ist wegen (1) und $q \leqq p_{n-2}$ auch

$$x \pm (2\alpha+1) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Da $x-1$ und $x+1$ durch p_{n-1} bezw. p_n teilbar sind, bilden folglich die Zahlen (2) eine Sequenz von $p_{n-1}-1$ ungeraden, zu $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ nicht teilerfremden Zahlen.

Legendre nahm es nun als selbstverständlich an, daß die so konstruierte Sequenz (2) eine solche von maximaler Länge sei. Dies ist aber im allgemeinen nicht richtig; es gilt vielmehr

Satz 1: *Ist p_n die n-te Primzahl, so gibt es für $p_n \geqq 43$ und für $p_n = 37$ und 23 stets mindestens p_{n-1} aufeinanderfolgende ungerade Zahlen, die sämtlich durch mindestens eine der Primzahlen $p_2, p_3, \dots, p_n$ teilbar sind.*

Beweis: Es sei p_{r_n} die größte Primzahl, für die

$$p_{r_n} \leqq \frac{p_{n-1}-1}{2}$$

ist. Man betrachte die simultanen Kongruenzen

$$(3) \qquad \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2}, \\ x \equiv 0 \pmod{p_2 p_3 \dots p_{r_n}}. \end{cases}$$

Für jedes x, daß diesen beiden Kongruenzen genügt, bilden die Zahlen

$$(4) \qquad x-(p_{n-1}-1),\ x-(p_{n-1}-3),\ \dots,\ x-2,\ x,\ x+2,\ \dots,\ x+(p_{n-1}-3),\ x+(p_{n-1}-1)$$

Digitized by Google

eine Sequenz von p_{n-1} ungeraden Zahlen der Form

$$x \pm 2\alpha \qquad \left(\alpha = 0, 1, \ldots, \frac{p_{n-1}-1}{2}\right).$$

Ist hierbei α durch eine ungerade Primzahl p_ν teilbar, so ist, da $p_\nu \leqq p_{r_n}$ sein muß, wegen (3) auch

$$x \pm 2\alpha \equiv 0 \pmod{p_\nu}.$$

Setzt man daher

$$\left[\frac{\log(p_{n-1}-1)}{\log 2}\right] = k,$$

so sind in der Reihe (4) nur die $2k$ Zahlen

$$(5) \qquad x \pm 2,\ x \pm 2^2,\ \ldots,\ x \pm 2^x,\ \ldots,\ x \pm 2^k$$

zu $p_2 p_3 \ldots p_{r_n}$ teilerfremd.

Nun ist nach dem Hilfssatz für $p_n \geqq 103$ die Anzahl der Primzahlen, die der Bedingung

$$\frac{p_{n-1}-1}{2} < p < p_{n-1}-1$$

genügen,

$$A_{n-1} \geqq 2\left[\frac{\log\frac{p_{n-1}-1}{2}}{\log 2}\right] = 2\left[\frac{\log(p_{n-1}-1)-\log 2}{\log 2}\right] = 2k-2.$$

Folglich liegen im Intervall $\frac{p_{n-1}-1}{2} < p < p_{n-1}-1$ mindestens $2k-2$, also im Intervall $\frac{p_{n-1}-1}{2} < p \leqq p_n$ mindestens $2k$ Primzahlen; es seien $q_1, q_2, \ldots, q_{2k}$ Primzahlen aus diesem Intervall.

Um nun p_{n-1} aufeinanderfolgende ungerade Zahlen zu erhalten, die sämtlich durch mindestens eine der Primzahlen $p_2, p_3, \ldots, p_n$ teilbar sind, schreibe man für x noch weitere Kongruenzen vor. Man hat hierzu die $2k$ Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_{2k}$ zur Verfügung. Es möge also x außer den Kongruenzen (3) etwa noch den $2k$ Kongruenzen

$$(6) \qquad \left.\begin{array}{l} x + 2^\varkappa \equiv 0 \pmod{q_\varkappa} \\ x - 2^\varkappa \equiv 0 \pmod{q_{\varkappa+k}} \end{array}\right\} \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, k$$

genügen. Da diese Kongruenzen stets eine Lösung haben, werden für eine Lösung x die Zahlen (4) sämtlich durch mindestens eine der Primzahlen $p_2, p_3, \ldots, p_n$ teilbar sein, da wegen (6) jetzt auch die Zahlen (5) alle durch mindestens eine dieser Primzahlen teilbar sind.

Damit ist die Behauptung für $p_n \geqq 103$ bewiesen.

Digitized by Google

Für $43 \leqq p_n < 103$ und für $p_n = 23$ und 37 ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung, wie schon Dupré [12]) gezeigt hat, leicht direkt.

Satz 2: *Zu jeder beliebig kleinen Zahl* $\varepsilon\,(1 > \varepsilon > 0)$ *gibt es eine nur von* ε *abhängende Zahl* n_0 *derart, daß für alle* $n > n_0$ *es stets*

$$N = [(2-\varepsilon)\,p_n]$$

aufeinanderfolgende ungerade Zahlen gibt, die zu $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ *sämtlich nicht teilerfremd sind.*

Beweis: Ist Z_n die Anzahl der Primzahlen p, die der Bedingung

$$p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leqq p \leqq p_n$$

genügen, so ist nach dem Primzahlsatz

$$Z_n = \frac{p_n}{\log p_n} - \frac{p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\log p_n + \log\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)} + O\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right)$$

$$= \frac{p_n}{\log p_n} - \frac{p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\log p_n} + \frac{p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\log\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\log p_n\left\{\log p_n + \log\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}} + O\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right)$$

$$= \frac{\frac{\varepsilon}{2}\,p_n}{\log p_n} + O\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right).$$

Daher läßt sich eine nur von ε abhängende Konstante n_0 so angeben, daß für alle $n > n_0$

$$Z_n > \frac{2\log\left\{2p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}}{\log 2}$$

wird. Man setze

$$\left[\frac{\log\left\{2p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}}{\log 2}\right] = k.$$

Dann ist also

$$Z_n > 2k.$$

12) A. a. O. S. 33—56.

Digitized by Google

Folglich kann man unter diesen Z_n Primzahlen $2k$ auswählen, etwa $q_1, q_2, \ldots, q_{2k}$; ferner seien $p_1, p_2, \ldots, p_{r_n}$ die Primzahlen, die kleiner als $p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ sind. Nun bestimme man x durch die Kongruenzen

$$(7)\qquad \left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 2, \\ x \equiv 0 \pmod{p_2 p_3 \ldots p_{r_n}}, \\ x + 2^x \equiv 0 \pmod{q_x}, \\ x - 2^x \equiv 0 \pmod{q_{k+x}} \end{array}\right\} \quad x = 1, 2, \ldots, k.$$

Dann folgt analog wie beim Beweis des Satzes 1, daß für jede Lösung x die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen

$$(8)\qquad x-2\left[p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right],\ x-2\left[p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]+2, \ldots, x-2,\ x,$$
$$x+2, \ldots, x+2\left[p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

sämtlich durch mindestens eine der Primzahlen $p_2, p_3, \ldots, p_n$ teilbar sind. Die Anzahl der Zahlen (8) ist aber

$$2\left[p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]+1 \geqq \left[2p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] = [p_n(2-\varepsilon)] = N.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Durch diesen Satz wird natürlich die Frage, welches die größtmögliche Anzahl aufeinanderfolgender ungerader Zahlen ist, die sämtlich durch mindestens eine der Zahlen $p_2, p_3, \ldots, p_n$ teilbar sind, nicht gelöst.

Betrachtet man nicht nur die ungeraden Zahlen, sondern alle ganzen Zahlen, so läßt sich Satz 2 auch folgendermaßen aussprechen.

Satz 2a: Zu jeder beliebig kleinen Zahl ε $(1 > \varepsilon > 0)$ gibt es eine nur von ε abhängende Konstante n_0, derart daß für alle $n > n_0$ es stets

$$N^* = 2[p_n(2-\varepsilon)]+1$$

aufeinanderfolgende ganze Zahlen gibt, die sämtlich durch mindestens eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar sind.

Aus dem Satz 2a folgt sofort eine Verschärfung des bereits erwähnten Satzes von Herrn Backlund.

Satz 3: *Für jedes beliebig kleine positive δ gibt es unendlich viele aufeinanderfolgende Primzahlen p_m und p_{m+1}, welche der Un-*

Digitized by Google

gleichung

$$p_{m+1} - p_m > (4-\delta)\log p_m$$

genügen.

Beweis: Man setze

$$\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu = P_n.$$

Aus

$$\vartheta(x) \sim x$$

folgt dann

$$\log P_n = \sum_{\nu=1}^{n} \log p_\nu = \vartheta(p_n) \sim p_n.$$

Daher ist für hinreichend großes n

$$p_n > \left(1-\frac{\delta}{8}\right)\log P_n. \tag{9}$$

Andererseits folgt aus Satz 2a, daß es zu jedem beliebig kleinen positiven ε eine Zahl n_0 gibt, derart, daß sich stets für $n > n_0$

$$N^* = 2\,[p_n(2-\varepsilon)] + 1$$

aufeinanderfolgende Zahlen angeben lassen, die sämtlich zu P_n nicht teilerfremd sind. Ist a_1 die kleinste dieser N^* Zahlen, so kann man, wie aus (7) folgt, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$0 \leqq a_1 < P_n$$

ist. Es sei x_1 die zu a_1 gehörige Lösung der Kongruenzen (7).

Man kann sogar stets eine solche Sequenz von N^* zu P_n nicht teilerfremden Zahlen angeben, deren Anfangsglied größer als p_n und kleiner als P_n ist. Ist nämlich

$$a_1 \leqq p_n, \tag{10}$$

so betrachte man statt (7) das folgende Kongruenzensystem

$$\left\{\begin{array}{ll} x & \equiv 1 \pmod 2, \\ x & \equiv 0 \pmod{p_2 p_3 \dots p_{r_n}}, \\ x+2 & \equiv 0 \pmod{q_{k+1}}, \\ x-2 & \equiv 0 \pmod{q_1}, \\ x+2^\varkappa & \equiv 0 \pmod{q_\varkappa}, \\ x-2^\varkappa & \equiv 0 \pmod{q_{k+\varkappa}} \end{array}\right\} \qquad \varkappa = 2, 3, \dots, k. \tag{11}$$

Digitized by Google

Ist x_2 eine Lösung diese Systems, so liefern die Zahlen

$$x_2 - 2\left[p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] - 1,\ x_2 - 2\left[p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right],\ \ldots,\ x_2 + 2\left[p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right],$$

$$x_2 + 2\left[p_n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] + 1$$

wieder eine Sequenz von N^* zu P_n nicht teilerfremden Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man, wenn a_2 das Anfangsglied dieser Sequenz ist, wieder annehmen

$$0 \leqq a_2 < P_n. \tag{12}$$

Ferner kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$q_{2k} = p_n$$

wählen. Da $k > 1$ vorausgesetzt werden kann, stimmen die erste und die letzte Kongruenz des Systems (11) mit denen von (7) überein. Folglich ist

$$x_2 \equiv x_1 \pmod{2p_n},$$

also auch

$$a_2 \equiv a_1 \pmod{2p_n}. \tag{13}$$

Andererseits ist

$$a_2 \neq a_1,$$

da

$$a_2 \not\equiv a_1 \pmod{q_1}$$

ist. Daher folgt aus (13)

$$|a_2 - a_1| \geqq 2p_n > p_n,$$

folglich ist wegen (10) und (12)

$$a_2 > p_n.$$

Also gibt es für $n > n_0$ eine Sequenz von N^* zu P_n nicht teilerfremden Zahlen, deren Anfangsglied a der Bedingung

$$p_n < a < P_n \tag{14}$$

genügt. Da die Zahlen dieser Sequenz sämtlich durch mindestens eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar sind, enthält wegen (14) diese Sequenz keine Primzahl.

Ist nun p_m die größte Primzahl unterhalb a, so folgt daher

$$p_{m+1} - p_m \geqq N^* + 1 = 2\,[p_n(2-\varepsilon)] + 2 > 2p_n(2-\varepsilon).$$

Setzt man nun

$$\varepsilon = \frac{2\delta}{8-\delta},$$

Digitized by Google

so ist wegen (9)

$$p_{m+1} - p_m > 4p_n\left(1-\frac{\delta}{8-\delta}\right) > 4\left(1-\frac{\delta}{8}\right)\left(1-\frac{\delta}{8-\delta}\right)\log P_n$$

$$= \left(4-\frac{\delta}{2}-\frac{4\delta}{8-\delta}+\frac{\delta^2}{2(8-\delta)}\right)\log P_n = \left(4-\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\log P_n$$

$$= (4-\delta)\log P_n.$$

Nun ist wegen (14)

$$p_m < a < P_n,$$

folglich

(15) $$p_{m+1} - p_m > (4-\delta)\log p_m.$$

Für wachsende n erhält man wegen (14) immer andere Werte von a und daher unendlich viele p_m, die der Bedingung (15) genügen.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Berichtigungen.

In der Abhandlung

A. Korn, Über die Heaviside'sche Methode zur Integration der Telegraphengleichung (Jahrgang XXVI dieser Zeitschrift), S. 83 in Formel (33)

ist vor dem Integral rechts der konstante Faktor Cv hinzuzufügen.

In der Abhandlung

A. Korn, Über einige Integraleigenschaften der Bessel'schen Funktionen und eine Anwendung derselben, Jahrgang XXIX, S. 30 in der ersten Formel (27)

ist:

$$\left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + f\right)$$

statt:

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}$$

zu setzen.

Digitized by Google

Mitglieder-Verzeichnis.

A. Persönliche Mitglieder.

Die mit einem Stern versehenen Mitglieder haben sich durch einmalige Zahlung nach § 4 der Satzung abgelöst.

Ackermann-Teubner, Hofrat Dr. Dr.-Ing. E. h. A., Domherr, Leipzig, Poststr. 3.
Apt, Studienrat Dr. Fr., Berlin-Neukölln, Pflügerstr. 59 I.
Aschert, Bankdirektor a. D. H., Berlin W., Derfflinger Str. 3,
Baldus, Prof. Dr. R., Karlsruhe i. B., Mozartstr. 8.
Barneck, Privatdozent Dr. A., Berlin-Zehlendorf, Treibjagdweg 41.
Beck, Prof. Dr. H., Bonn, Lennéstr. 36.
Becker, Studienassessor W., Berlin-Neukölln, Fuldastr. 23 a.
Berger, R., ao. wiss. Hilfsarb. am Meteorol.-Magnet. Observatorium, Potsdam, Telegraphenberg.
Bergmann, Dipl.-Ing., Dr. Stefan, Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.
Bernays, Prof. Dr. P., Göttingen, Kirchweg 6 I.
Bernstein, Prof. Dr. F., Göttingen, Lotzestr. 33.
Betz, O., Korvettenkapitän a. D., Berlin-Schmargendorf, Salzbrunnerstr. 58/60.
Bieberbach, Prof. Dr. L., Berlin-Dahlem, Gelfertstr. 16.
Birck, Dr. phil. Otto, Königswinter, Haus Felseck.
Birkhoff, Prof. Dr. G. D., 984 Memorial Drive, Cambridge, Mass. (U.S.A.).
Blaschke, Prof. Dr. W., Hamburg, Math. Seminar der Universität, Rothenbaumchaussee 21.
Blumenthal, Prof. Dr. O., Aachen, Rütscherstr. 38.
Bochner, Dr. S., München, Möhlstr. 12.
Böhler, Landmesser H., Berlin-Steglitz, Schloßstr. 49.
Böhmer, Prof. Dr. P. E., Dresden-A., Ludwig Richterstr. 22.
Boelk, Studienrat Dr. P.. Berlin-Charlottenburg, Wallstr. 54.
Bollé, Dr. E., Berlin-Charlottenburg 2, Fraunhoferstr. 17.
Bornitz, Studienrat F., Berlin-Halensee, Schweidnitzer Str. 5.
Boß, Studienrätin A., Brandenburg/Havel, Abtstr. 18.
Brauer, Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 57.
v. Brill, Prof. A., Tübingen, Eugenstr. 3.
Brun, Prof. V., Trondhjem (Norwegen).
Burg, Oberstudiendirektor Dr. R., Berlin-Charlottenburg, Sybelstr. 2.
Byk, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 13.
Carathéodory, Prof. Dr. C., München, Universität.
Cauer, Dr.-Ing. W., Göttingen, Friedländerweg 35.
Cohn, Studienrat Dr. A., Berlin-Waidmannslust, Waidmannstr. 119.
Cohn-Vossen, Dr. Stephan, Köln-Delbrück, Waldhausstr. 9.
Cranz, GRR. Prof. Dr. C., Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 32 a.
Cremer, Dr. H., Leipzig S. 3, Steinstr. 65 I.
Degosang, Studienrat, Berlin-Karlshorst, Königswinterstr. 20.
Denizot, Prof. Dr. A., Posen, Physikalisches Institut der Universität.
Dingeldey, Prof. Dr. F., Darmstadt, Hoffmannstr. 41.
Dörge, Privatdozent Dr. K., Köln, Aduchtstr. 9.
Dreetz, Studienrat W., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 65.
Duarte, Prof. F. J., Genf (Schweiz), 5, rue Henri-Mussard.
Dubislav, Privatdozent Dr. W., Berlin-Friedenau, Bennigsenst. 6.

Digitized by Google

Duffing, Oberingenieur G., Hamburg 23, Landwehrstr. 16.
Dumas, Prof. Dr. G., Béthusy-Lausanne, Cabrières Av. Mt Charmant (Schweiz).
Ebeling, Direktor Dr. phil., Dr.-Ing. E. h. A., Berlin-Charlottenburg 9, Schwarzburg-Allee 14.
Ebner, Studienrat M., Berlin-Karlshorst, Kaiser Wilhelmstr. 16.
Ehrlich, Studienrat L., Berlin NO. 55, Marienburger Str. 36.
Eisner, Regierungsbaumeister Dipl.-Ing. F., Berlin-Westend, Akazien-Allee 15.
Emde, Prof. Dr.-Ing. E. h. F., Stuttgart, Moserstr. 14.
*Emmerich, A., Rudolstadt, Georgstr. 5.
Engel, Prof. Dr. Dr. h. c. F., Gießen, Ludwigsplatz 9.
Epstein, Prof. Dr. P., Frankfurt a. M., Eschersheim, Körberstr. 16.
Fejér, Prof. Dr. L., Budapest V (Ungarn), Falk Miksa utca 15.
Feigl, Privatdozent Dr. G., Berlin-Lankwitz, Kaiser Wilhelmstr. 139.
Finsler, Prof. Dr. P., Zürich (Schweiz), Schmelzbergstr. 27.
Fischer, Studienrat P. B., Berlin-Lichterfelde-W., Drakestr. 36 I.
Fladt, Studienrat Dr. K., Vaihingen a. F. bei Stuttgart, Christofstr. 18.
Fleck, San.-Rat Dr. A., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 22.
Föttinger, Prof. Dr.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg, Techn. Hochschule EB 205.
Fraenkel, Prof. Dr. A., Kiel, Niemannsweg 36 z. Z. Hebrew University, P.O.B. 340, Jerusalem.
*Franck, Dr. P., Hamburg, Wolfshagen 18 I.
Freundlich, Dr. E. F., Astrophysik. Observatorium, Potsdam, Telegraphenberg.
Fuchs, Prof. Dr. R., Berlin-Halensee, Ringbahnstr. 7.
Fujiwara, Prof. M., Universität Sendai (Japan).
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Wien XVIII, Messerschmidtgasse 45.
Galle, GRR. Prof. Dr. A., Potsdam, Neue Königstr. 103.
Gebhardt, Studienrat F., Berlin-Schlachtensee, Seestr. 44.
Geilen, Studienrat V., Marienburg, Langgasse 6.
Gruschke, Oberingenieur Dr. G., Berlin-Wilmersdorf, Hildegardstr. 24.
Grüß, Privatdozent Dr.-Ing. G., Berlin NW. 87, Tile Wardenbergstr. 28.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Berlin-Tempelhof, Sachsenring 22.
Haenzel, Privatdozent Dr.-Ing. G., Berlin-Wittenau, Oranienburger Str. 273.
Hamburger, Prof. Dr. H., Köln a. Rh., Alter Burgen-Wall 18.
Hamel, Prof. Dr. G., Berlin W. 30, Eisenacherstr. 35.
Hammerstein, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 9.
*Haniel, Maler F., Düsseldorf, Goldsteinstr. 27.
Happel, Prof. Dr. H., Breslau XVI, (Zimbel), Friedrich Ebertstr. 37.
Hausdorff, Prof. Dr. F., Bonn a. Rh., Hindenburgstr. 61.
Haußner, GHR. Prof. Dr., Jena, Stoystr. 1.
Heegaard, Prof. Dr. P., Lilleaker, box 105, Norwegen.
Heegner, Dr. K., Berlin SW. 11, Hallesches Ufer 5.
Hellinger, Prof. Dr. E., Frankfurt a. M., Marbachweg 339.
Hensel, GRR. Prof. Dr. K., Marburg (Lahn), Breiter Weg 7.
Hertwig, GRR. Prof. Dr.-Ing. E. h., Berlin-Charlottenburg 2, Kurfürstenallee Baracke 15.
Herzberger, Dr. M., Jena, Pfaffenstieg 3.
Hinrichs, Dr., Berlin-Wilmersdorf, Brandenburgische Str. 18.
Hoecken, Oberingenieur K., Berlin W. 30, Hohenstaufenstr. 37.
Hoff, Prof. Dr.-Ing., Berlin-Johannisthal, Sternplatz 9.
Hoffmann, Prof. Dr. C., Ravensburg (Württ.), Schützenstr. 9.
Holtze, Oberlehrer Dipl.-Ing. H., Magdeburg, Königstr. 31.
Holzer, Dr. L., Assistent a. d. Technischen Hochschule in Graz.
Hopf, Privatdozent Dr. E., Berlin-Steglitz, Kühlebornstr. 20.
Hopf, Privatdozent Dr. H., Berlin C. 2, Mathematisches Seminar der Universität.
Hurwitz, Frl. Dr. Lotte, Studienrat, Berlin-Wilmersdorf, Sigmaringerstr. 23.
v. Ignatowsky, Dr. W., Leningrad, Nabereschnaja 9—oe, Janwarja No. 32. Wohnung 8.
Jacobsthal, Prof. Dr. E., Berlin-Zehlendorf, Am Fischtal 2a.
Jacobsthal, Studiendirektor Dr. W., Berlin SW. 47, Yorkstr. 89.
Jaenichen, Studienrat Dr. W., Berlin-Zehlendorf-West, Niklasstr. 33.
Jasse, E., Oberingenieur, Mülheim-Ruhr, Seilerstr. 13.

Digitized by Google

Jolles, GRR. Prof. Dr. St., Berlin-Halensee, Kurfürstendamm 130.
Jonas, Studienrat Dr. H. J., Berlin-Steglitz, Klingsorstr. 3.
v. Kármán, Dr. Th. ordentl. Professor an der Techn. Hochschule Aachen.
Knopp, Prof. Dr. K., Tübingen, Neckarhalde 56.
Koebe, Prof. Dr. P., Leipzig, Fockestr. 9.
Koebke, Oberingenieur Dr. E., Berlin-Charlottenburg 5, Lietzensee-Ufer 1.
Koepsel, Dr. A., Berlin-Friedenau, Kaiserallee 99/100.
Köhler, Studienassessor O., Berlin-Tempelhof, Hohenzollernkorso 34 g.
Kopff, Prof. Dr. A., Berlin-Dahlem, Altensteinstr. 40.
Korn, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 25.
*Koschmieder, Prof. Dr. L., Brünn C. S. R., Landwirtschaftsgasse 36.
Krafft, Privatdozent Dr. M., Marburg/Lahn, Savignystr. 7.
Kramer, Studiendirektor Dr., Alt-Döbern N.-L., Staatl. Aufbauschule.
v. Krbek, Dr. F., Astrophysikalisches Observatorium, Budapest I (Ungarn) Sváhegy, Koukoly-Tuege Miklós-úk.
Kreuter, Regierungsrat G., Berlin-Friedenau, Odenwaldstr. 26.
Kubota, Prof. T., Sendai (Japan). College of Science Imp. Univ.
v. Kuhl, Fräulein Dr. H., Studienassessorin, Berlin-Steglitz, Breitestr. 36.
Kullrich, Oberstudiendirektor i. R. Dr. E., Berlin-Tempelhof, Kaiserin Augustastr. 20.
Küpfmüller, Prof. K., Danzig-Langfuhr, Pommersche Chaussee 2.
Landau, Prof. Dr. E., Göttingen, Herzberger Landstr. 48.
Lasker, Dr. E., Berlin-Wilmersdorf, Aschaffenburgerstr. 6 a.
Lechner, Dr. G., Berlin-Eichkamp, Königsweg 114.
Lemke, Studienrat Dr. H., Berlin-Wilmersdorf, Wegenerstr. 10/11.
Levi-Civita, Prof. Dr. T., Rom 25 (Italien), Via Sardegna 50.
Lichtenstein, Prof. Dr. Dr.-Ing. L., Leipzig, Großgörschenstr. 3.
Lietzmann, Oberstudiendirektor Dr. W., Göttingen, Calsowstr. 18.
Linsenbarth, Studienrat Dr. H., Berlin N. 54, Lothringerstr. 76.
Löwner, Prof. Dr. K., Prag X, Palackého t. 68.
Loewy, Prof. Dr. A., Freiburg i. B., Reichsgrafenstr. 14.
Lorenz, Dr. P., Berlin-Reinickendorf-Ost, Seestr. 63.
Lorey, Prof. Dr. W., Oberstudiendirektor der öff. Handelslehranstalt u. Dozent am Inst. f. Versicherungswissenschaft d. Universität Leipzig, Fockestr. 7.
Loria, Prof. Dr. G., Genua (Italien), Piazza Manin 41.
Ludwig, Prof. Dr. W., Dresden-A., Kaitzerstr. 21.
Mann, Prof. Dr.-Ing. L., Breslau, Hobrechtufer 15.
Martens, Prof. Dr. F. F., Berlin NW. 87, Hansa-Ufer 4.
Matthée, Direktor der staatlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht, Berlin W. 35, Potsdamer Str. 135.
*Meder, Prof. A., Riga, Schulenstr. 19 W. 3.
Mehmke, Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. R., Degerloch-Stuttgart, Löwenstr. 102.
Meier, Zivilingenieur E., Taubenmühle bei Leichholz (Neumark).
Meth, Studienrat Dr. P., Berlin-Charlottenburg, Königin Luisestr. 9.
Metzner, Ministerialrat Prof. Dr., Berlin-Dahlem, Königin Luisestr. 12.
Meyer, GRR. Prof. Dr. F., Königsberg (Pr.), Villenkolonie Maraunenhof, Hoverbeckstr. 13.
Meyer-Wülfing, Dr. phil., Berlin-Schöneberg, Nymphenburgerstr. 10.
v. Mises, Prof. Dr. R., Berlin NW. 87, Siegmundshof 9.
Moeske, Studienrat P., Berlin-Pankow, Hartwigstr. 29.
Mühlendyck, Dr. O., Berlin-Charlottenburg, Pestalozzistr. 87, Portal II.
Müller, Prof. Dr. Conrad H., Hannover, Brahmsstr. 1.
Müntz, Prof. Dr. Ch., Leningrad, Krassnyeh Zorj 73 qn. 47.
Nachtsheim, Studienrat A., Berlin-Wilmersdorf, Mannheimerstr. 9 a.
Nakajima, S., Taihoku Imperial University, Taiwan (Japan).
Nakamura, K., Berlin-Wilmersdorf, Helmstedterstr. 26 (bei Barnewitz).
Neiß, Privatdozent Dr. F., Berlin-Charlottenburg 5, Friedrich Karlplatz 16.
Neuendorff, Prof. Dr. R., Kiel, Holtenauer Str. 130.
Neugebauer, Patentingenieur H., Berlin-Lichterfelde-Ost, Luisenstr. 12.
v. Neumann, Privatdozent Dr. Joh., Berlin W. 10, Hohenzollernstr. 23/24.
Nörlund, Prof. Dr. N. E., Kopenhagen (Dänemark), Malmögade 8.

Digitized by Google

Obrechkoff, Prof. Dr. N., ord. Prof. a. d. Univ. Sofia, S. Stefanosstr. 4.
Oseen, Prof. C. W., Upsala (Schweden).
*Ostrowski, Prof. Dr. A., Basel (Schweiz), Arlesheimer Str. 7 I.
Papperitz, GRR. Prof. Dr. E., Freiberg i. S., Leipzigerstr. 8.
Peters, Prof. Dr., Berlin-Lichterfelde, Weddigenweg 25.
*Peters, Studienrat J., Köln-Nippes, Niehler Kirchweg 147.
Pfeiffer, Prof. Dr. F., Stuttgart, Moltkestr. 130.
Pfeiffer, Prof. Dr. G. W., Kiew (Ukraine), Leninstr. 59/5.
Piefke, Studienrat Walter, Berlin-Charlottenburg, Kaiserdamm 96.
Pollaczek, Dr. F., Reichspostzentralamt, Berlin-Tempelhof, Schönebergerstr. 11—15.
Pollaczek, Frau Privatdozent Dr. H., Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.
Popoff, Prof. Dr. Kyrill, Sofia, General Parenssoffstr. 35.
Prandtl, Prof. Dr., Göttingen, Calsowstr. 15.
Prange, Prof. Dr. G., Hannover, Engelbostelerdamm 58.
Prüfer, Privatdozent Dr. H., Münster, Kinderhauser Str. 16.
Rademacher, Prof. Dr. H., Breslau, Tiergartenstr. 123.
Reißner, Prof. Dr.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg 9, Mohrungen Allee 4, Kolonie Heerstraße.
Remak, Privatdozent Dr. R., Berlin-Lichterfelde-West, Manteuffelstr. 23 I.
Rembs, Studienrat Dr. E., Berlin-Friedenau, Begasstr. 5 I.
Respondek, Patentanwalt Dr. G., Berlin-Halensee, Auguste Victoriastr. 5.
Rey-Pastor, Prof. Dr. J., Madrid, Universität.
Ribeiro, Luiz F., Pernambuco (Brasilien) Rua Augusta 456.
Riesz, Prof. Dr. F., Szeged (Ungarn), Dugonics-tér 13.
Riesz, Prof. Dr. M., Lund (Schweden), Universität.
Rogowski, Prof. Dr.-Ing. W., Aachen, Techn. Hochschule.
Roschlau, Studienassessor F., Berlin-Wilmersdorf, Bruchsaler Str. 7.
Rosenthal, Prof. Dr. A., Heidelberg, Blumenthalstr. 7.
Rothe, Frau Dr. H., Breslau 16, Sternstr. 128.
Rothe, Prof. Dr. R., Berlin-Lichterfelde, Esmarchstr. 27.
Rühle, Studienreferendar A., Berlin-Reinickendorf-Ost, Epensteinplatz 4.
Ruhm, Prof. G., Bonn, Blücherstr. 26.
Sadowski, Privatdozent Dr.-Ing. M., Berlin-Wilmersdorf, Privatstr. a. d. Bahn 2 III.
Salkowski, Prof. Dr. E., Neubabelsberg bei Berlin, Odinstr. 6.
Schauffler, R., Regierungsrat, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter im auswärtigen Amt, Berlin-Wilmersdorf, Rauenthalerstr. 11 III.
Scheffers, GRR. Prof. Dr. Dr. h. c. G., Berlin-Dahlem, Willdenowstr. 40.
Schings, Studienassessor A., Solingen (Rhld.), Schlickerweg 8.
Schlegel, Studienrat M., Berlin-Friedenau, Goßlerstr. 24.
Schleusner, Dipl.-Ing. A., Institut für Mechanik in der Fakultät für Bauwesen a. d. Techn. Hochschule zu Berlin, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstr. 171.
Schmeidler, Prof. Dr. W., Breslau, Novastr. 15.
Schmidt, Prof. Dr. Erhard, Berlin NW., Altonaerstr. 30.
Schnee, Prof. Dr. W., Leipzig, Universität.
Schneider, Studienrat Dr. E., Berlin-Steglitz, Unter den Rüstern 13.
Schneider, Reichstagsstenograph R., Berlin-Steglitz, Fritschstr. 7.
Schotte, Studienrat Dr. V., Berlin W. 57, Elsholzstr. 3.
Schottky, Geheimrat Prof. Dr. F., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 12 a.
Schrutka, Edler von Rechtenstamm, Prof. Dr. L., Wien, Onno Kloppstr. 8.
Schülke, Oberstudiendirektor i. R. A., Berlin-Tempelhof, Albrechtstr. 98.
Schur, Prof. Dr. I., Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.
Shoda, K., Japan.
Simons, Studienrat W., Berlin-Schmargendorf, Sulzaerstr. 14.
Singer, Dr. O., Berlin NW. 87, Levetzowstr. 13 a.
Slaby, Dipl.-Ing. R., Berlin-Charlottenburg, Sophienstr. 33.
Sommer, Prof. Dr. J., Danzig-Langfuhr, Johannistal 2.
Spielrein, Prof. Dipl.-Ing. J., Moskau, Taganka, Nischnaja Raditschewa 10.
Stein, Dr. Joh., Altona a. E., Lessingstr. 30 p.
Steinbacher, Studienrat Dr. F., Berlin-Friedrichshagen, Waldowstr. 19.

Digitized by Google

Straßmann, Dr. R., Berlin-Schlachtensee, Friedrich-Wilhelm Str. 35.
Strelitz, Fräulein P., Berlin-Lichterfelde, Steglitzerstr. 50.
Süß, Prof. Dr. W., Greifswald, Karlsplatz 3.
Szász, Prof. Dr. O., Frankfurt a./M., Kettenhofweg 99 I.
Szegö, Prof. Dr. G., Königsberg (Pr.), Cäcilienallee 9.
Tauber, Prof. Dr. A., Wien IV, Karlsgasse 18.
Thürmel, Oberingenieur Direktor Dr. E., Siemens u. Halske, A.-G., Wernerwerk, Berlin-Siemensstadt.
Timerding, Prof. Dr. H. E., Braunschweig, Kasernenstr. 23.
220 Timpe, Prof. Dr. A., Berlin-Schlachtensee, Dianastr. 21.
*Tietze, Prof. Dr. H., München, Lessingstr. 3.
Toeplitz, Prof. Dr. O., Bonn, Coblenzerstr. 121.
Trefftz, Prof. Dr. E., Dresden, Nürnberger Str. 31 I.
Tropfke, Oberstudiendirektor GStR. Dr. J., Berlin NW. 87, Zwinglistr. 2.
Tschakaloff, Prof. L., Sofia (Bulgarien), Boulevard Skobeleff 13.
Umlauf, Prof. Dr. K., Bergedorf, Bismarckstr. 33.
Unger, Dr. W., Berlin W., Friedrich Wilhelmstr. 26.
*Volterra, Prof. Dr. Vito, Senatore del Regno, Rom (Italien), Via in Lucina 17.
Wagner, Präsident a. D. Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. K. W., Berlin NW 87, Franklinstr. 1.
230 Walther, Prof. Dr. A., Darmstadt, Mathem. Institut der Techn. Hochschule.
Weber, Studienrat W., Berlin-Schöneberg, Bennigsenstr. 12.
Weinstein, Privatdozent Dr. A., Breslau, Mathematisches Seminar der Universität.
Weiß, Privatdozent Dr. E. A., Bonn a. Rh., Endenicher Allee 20.
Weiß, Studienrat H., Berlin-Lichterfelde, Rankestr. 70.
Wenk, Studienrat W., Berlin N. 58, Schönhauser Allee 60.
Weyl, Prof. Dr. H., Göttingen.
Wieleitner, Oberstudiendirektor Dr. H., München 2, SO. 5, Müllerstr. 7.
Willers, Prof. Dr. Fr., Freiburg (Sa.), Goethestr. 2.
Winkelmann, Prof. Dr. M., Jena, Hügelstr. 4.
240 Witt, Prof. Dr. G., Berlin NW. 21, Crefelderstr. 18.
Wolff, RR. Dr. Hans, Neubabelsberg, Luisenstr. 10.
Wolff, Dr. Th., Schriftsteller, Berlin-Friedenau, Kaiser-Allee 79.
Zacharias, Studienrat Dr. M., Berlin NW. 52, Melanchthonstr. 27.
Zastrow, K., Berlin-Steglitz, Sedanstr. 9.
Zeitz, Bankdirektor H., Berlin-Charlottenburg, Schillerstr. 11.
246 Zühlke, Oberschulrat Prof. Dr. P., Cassel-Kirchditmold, Geröderweg 25.

Digitized by Google

B. Korporative Mitglieder.

Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft, Direktion, Berlin NW. 87. Huttenstr. 12—16.
Felten & Guilleaume Carlswerk A.-G., Köln-Mülheim.
Gesellschaft für drahtlose Telegraphie (Telefunken), Berlin SW. 11, Hallesches Ufer 10/12.
Hermsdorf-Schomburg Isolatoren G. m. b. H., Hermsdorf S.-A.
Siemens & Halske A.-G., Wernerwerk, Berlin-Siemensstadt.
Siemens-Schuckertwerke A.-G. Berlin-Siemensstadt.
Julius Springer, Verlagsbuchhandlung, Berlin W. 9, Linkstr. 23/24.
Carl Zeiss, Jena.
Elektrotechnischer Verein, E. V., Berlin W. 35, Potsdamer Str. 118a.
Mathematisches Seminar der Universität Berlin.
Institut für angewandte Mathematik an der Techn. Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg.
Institut für Technische Hydro- und Aerodynamik, sowie Strömungsmaschinen, Berlin-Charlottenburg, Techn. Hochschule EB 205.
Mathematisches Seminar der Universität Bonn.
Mathematisches Seminar am Friedrichs-Polytechnikum, Cöthen (Anhalt).
Mathematisches Institut der Universität Göttingen.
Mathematisches Institut der Universität Leipzig, Talstr. 35.
Mathematisches Seminar der Universität Münster.
Mathematisches Seminar der Techn. Hochschule Dresden.
Bayerische Staatsbibliothek, München, Ludwigstr. 23.
Hauptbücherei der Technischen Hochschule, Stuttgart.
Bibliothek der Techn. Hochschule zu Berlin, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstr. 171.
Bibliothek der Techn. Hochschule Fridericiana, Karlsruhe.
Universitätsbibliothek Tübingen, Tübingen.
Mathematisches Institut der Universität Jena.
Hochschulbibliothek Darmstadt.
Staats- und Universitätsbibliothek zu Hamburg, Hamburg 1, Speersort.
Universitätsbibliothek in München, München, Ludwigstr. 17 II.
Universitätsbibliothek in Basel.
Mathematisches Seminar der Universität Marburg, Marburg/Lahn

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXX. JAHRGANG

1932
GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

7) Alle Zuschriften, welche den Inhalt der Sitzungsberichte betreffen, sind zu richten an den derzeitigen Schriftleiter, Herrn **Prof. Dr. Ernst Jacobsthal, Berlin-Zehlendorf, Am Fischtal 2a.**

Mitteilungen:

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten entweder an den Schriftführer oder an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Oberinspektor M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 12a).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse und nicht an die Adresse des Schriftführers zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

DREISSIGSTER JAHRGANG

1932

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Bergmann, St., Eine Bemerkung über schlichte Minimalabbildungen .	11—13
Hammerstein, A., Die erste Randwertaufgabe für nichtliineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	3—10
Mühlendyck, O., Über die analytischen Zylinder	14—17
268. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 29. Oktober 1930	1
269. „ am 26. November 1930	1
270. „ „ 17. Dezember „	1
271. „ „ 28. Januar 1931	2
272. „ „ 25. Februar „	2
273. „ „ 25. März „	2
274. „ „ 29. April „	2
275. „ „ 20. Mai „	2
276. „ „ 24. Juni „	2
Inhaltsverzeichnis der Jahrgänge XI—XXX der Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft	18—24
Mitgliederverzeichnis	25—30

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

268. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 29. Oktober 1930.

Vorsitzender: Herr Korn. Anwesend: 31 Mitglieder und Gäste.

Zu Beginn der Sitzung teilt Herr Korn das Ableben des Mitgliedes Herrn Wöhlermann mit; zu Ehren des Heimgegangenen erheben sich die Anwesenden von ihren Plätzen.

A) Geschäftlicher Teil:

1. Nach dem Bericht des Kassenwartes und der Kassenprüfer wird dem Kassenwart Entlastung erteilt.

2. Neuwahl des Vorstandes und der Kassenprüfer. Nachdem Herr Fuchs durch Zettelwahl zum ersten Vorsitzenden gewählt ist und die übrigen Herren des Vorstandes durch Zuruf wiedergewählt worden sind, setzt sich der Vorstand folgendermaßen zusammen: R. Fuchs (1. Vorsitzender), E. Jacobsthal (2. Vorsitzender und Schriftführer), P. B. Fischer (Kassenwart). — Kassenprüfer werden wieder die Herren Singer und Zacharias.

3. Neuwahl zweier Mitglieder der Redaktionskommission. An die Stelle der ausscheidenden Herren Bieberbach und Fraenkel treten die Herren Korn und H. Hopf.

B) Wissenschaftlicher Teil:

Herr E. Jacobsthal: Über das Schwarzsche Lemma.

269. Sitzung am 26. November 1930.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 30 Mitglieder und Gäste.

Geschäftlicher Teil:

Herr Hamel berichtet über die Tagung des mathematischen Reichsverbandes in Königsberg.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Timpe: Ein neuer Satz in der Torsionslehre.

Herr Geilen: Der Aufbau der Mathematik als pädagogisches Minimalproblem.

270. Sitzung am 17. Dezember 1930.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 40 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Schur: Ganzwertige Polynome.

Digitized by Google

Herr Hammerstein: Das Analogon zum Rieß-Fischerschen Satz bei Orthogonalfunktionen im Komplexen.

271. Sitzung am 28. Januar 1931.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 35 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilung:

Herr R. Rothe: Schwingungen linear gekoppelter Systeme, die durch Stoßkräfte erregt werden.

272. Sitzung am 25. Februar 1931.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 40 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Bieberbach: Bemerkungen zu Hilberts dreizehntem Problem.
Herr Mühlendyck: Über die analytischen Zylinder.

273. Sitzung am 25. März 1931.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 19 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilung:

Herr F. Pollaczek: Lösumg eines geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblems mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln.

274. Sitzung am 29. April 1931.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 26 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Bergmann: Eine Bemerkung über schlichte Minimalabbildungen.
Herr W. Jacobsthal: Zur Elementarmathematik vom höheren Standpunkt.

275. Sitzung am 20. Mai 1931.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 42 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilung:

Herr Hamel: Anwendungen der Funktionentheorie auf Hydrodynamik.

276. Sitzung am 24. Juni 1931.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 25 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilung:

Herr Hammerstein: Über die Randwertanfgabe bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Digitized by Google

Die erste Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichungen 2ter Ordnung[1]).

Von A. Hammerstein in Berlin.

1. Die Aufgabe eine solche Lösung der Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

zu finden, welche zwei gegebene Punkte (a, A); (b, B) der x, y-Ebene verbindet, ist bekanntlich nicht stets lösbar[2]). Im Folgenden soll gezeigt werden, daß sie dann gewiß eine Lösung hat, wenn die Funktion $f(x, y, y')$ mit wachsendem $|y|$ nicht stärker unendlich wird als eine lineare. Es gilt nämlich:

Satz 1: $f(x, y, y')$ sei für $a \leqq x \leqq b$, alle y und y' stetig. Ferner sei für $a \leqq x \leqq b$, alle y' und hinreichend großes $|y|$

$$|f(x, y, y')| \leqq c|y|,$$

wobei die positive Konstante $c < \frac{\pi^2\sqrt{3}}{(b-a)^2}$ ist. Dann hat die Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y')$$

stets eine den Randbedingungen

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

genügende Lösung.

Beweis. Durch die Substitution

$$x = \frac{\xi}{\pi}(b-a)+a,$$

$$y = \eta+\frac{\xi}{\pi}(B-A)+A$$

1) Vorgetragen in der 276. Sitzung am 24. Juni 1931.

2) Literatur z. B. E. Picard, Leçons sur quelques problêmes aux limits de la Theorie des Equations differentielles. Der Sonderfall, daß die Funktion $f(x, y, y')$ die Ableitung y' nicht enthält, läßt eine weitgehende Behandlung mit nichtlinearen Integralgleichungen zu. Man vergleiche dazu die Arbeit des Verfassers: Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen (Acta mathematica Bd. 54) sowie L. Lichtenstein: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen.

Digitized by Google

gehen die Randbedingungen in

$$\xi = 0, \quad \eta = 0; \quad \xi = \pi, \quad \eta = 0,$$

und die Differentialgleichung in

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{(b-a)^2}{\pi^2} f\left[\frac{\xi}{\pi}(b-a)+a,\ \eta+\frac{\xi}{\pi}(B-A)+A,\ \left(\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{B-A}{\pi}\right)\frac{\pi}{b-a}\right],$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = f_1\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right)$$

über. Dabei ist für $0 \leqq \xi \leqq \pi$, alle η' und genügend großes $|\eta|$

$$|f_1(\xi, \eta, \eta')| \leqq c_1 |\eta|$$

mit

$$c_1 < \sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

Es genügt daher die Behauptung bei den Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \text{ mit } |f(x, y, y')| \leqq c_2 |y| + c_3$$

für $0 \leqq x \leqq \pi$, alle y und y' zu beweisen, wenn

$$c_2 < \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

ist.

Hieraus folgt zunächst für jedes System von n reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, welche den Ungleichungen $|\alpha_\nu| < d$ genügen:

$$\int_0^\pi \left[f\left(x, \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\nu} \sin \nu x, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cos \nu x\right)\right]^2 dx \leqq c_4 \int_0^\pi \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\nu} \sin \nu x\right)^2 dx + c_5,$$

wobei $c_4 < \frac{3}{\pi}$ ist oder, wenn in f dieselben Argumente stehen wie vorher:

$$\int_0^\pi f^2 dx \leqq c_4 \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d^2}{\nu^2} + c_5 = c_4 \frac{\pi^3}{12} d^2 + c_5.$$

Somit wird für jedes ganze $\varkappa$ nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f \sin \varkappa x\, dx\right| \leqq \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\pi f^2 dx \cdot \frac{\pi}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{\frac{\pi}{3}}\sqrt{c_4}\, d\left(1+\frac{12 c_5}{c_4 \pi^3 d^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen $\frac{\pi}{3} c_4 < 1$ kann d unabhängig von $\varkappa$ und n so groß gewählt

Digitized by Google

werden, daß

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f \sin \varkappa x \, dx \right| < d$$

ausfällt. Somit sind die in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ stetigen n Funktionen

$$(1) \qquad F_\varkappa = \varkappa \alpha_\varkappa + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f\left(x, \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\nu} \sin \nu x, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cos \nu x\right) \sin \varkappa x \, dx$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

$$\text{für } \alpha_\varkappa = d, \quad |\alpha_\nu| \leqq d \qquad \nu \neq \varkappa \text{ positiv}$$
$$\text{für } \alpha_\varkappa = -d, \quad |\alpha_\nu| \leqq d \qquad \nu \neq \varkappa \text{ negativ},$$

woraus nach dem Brouwnschen Verschiebungssatz [3]) folgt, daß das Gleichungssystem $F_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n)$ mindestens ein Lösungssystem $\alpha_1 = a_1^{(n)}, \ldots \alpha_n = a_n^{(n)}$ besitzt. Sind mehrere vorhanden, so wird eines ausgezeichnet. Dabei ist nach der Besselschen Ungleichung

$$(2) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} (\varkappa a_\varkappa^{(n)})^2 \leqq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2 \, dx \leqq c_4 \frac{\pi^2}{6} d^2 + \frac{2}{\pi} c_5 = c_6,$$

wo c_6 nicht von n abhängt. Stellt man diese Betrachtung für $n = 1, 2, 3, \ldots$ an, so ergibt sich eine doppelt unendliche Folge

$$\begin{array}{ccccc} a_1^{(1)} & & & & \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & & & \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \ldots & a_n^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} .$$

Nach bekannten Schlüssen kann nun eine Teilfolge aus den Zeilen so ausgewählt werden, daß die Elemente der einzelnen Spalten jeweils gegen einen Grenzwert konvergieren. Bezeichnet man die derart entstandene Folge wieder mit $a_\varkappa^{(n)}$, so ist $\lim_{n \to \infty} a_\varkappa^{(n)} = a_\varkappa$, und für jedes feste m gilt

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} (\varkappa a_\varkappa)^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{\varkappa=1}^{m} (\varkappa a_\varkappa^{(n)})^2 \leqq c_6.$$

Daher konvergiert

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (\varkappa a_\varkappa)^2.$$

3) Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl (Mathematische Annalen 70).

Digitized by Google

Setzt man jetzt

$$\psi'(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \varkappa x; \qquad \psi_n'(x) = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa^{(n)} \cos \varkappa x,$$

so ist $\psi'(x)$ zufolge der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe eine stetige Funktion.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Funktion

$$\psi(x) = \int_0^x \psi'(z)\, dz$$

eine Lösung der Aufgabe ist. Für $n > m$ gilt nämlich

$$|\psi'(x) - \psi_n'(x)| \leqq \left| \sum_{\varkappa=1}^{m} (a_\varkappa - a_\varkappa^{(n)}) \cos \varkappa x \right| + \left| \sum_{\varkappa=m+1}^{\infty} a_\varkappa \cos \varkappa x \right| + \left| \sum_{\varkappa=m+1}^{n} a_\varkappa^{(n)} \cos \varkappa x \right|$$

$$\leqq \sum_{\varkappa=1}^{m} |a_\varkappa - a_\varkappa^{(n)}| + \left\{ \sum_{\varkappa=m+1}^{\infty} (\varkappa a_\varkappa)^2 \sum_{\varkappa=m+1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{\varkappa=m+1}^{n} (\varkappa a_\varkappa^{(n)})^2 \sum_{\varkappa=m+1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus entnimmt man, gemäß (2), daß zunächst m, und wegen $a_\varkappa^{(n)} \to a_\varkappa$ sodann n so groß gewählt werden kann, daß $\psi_n'(x)$ gleichmäßig gegen $\psi'(x)$ strebt. Daraus folgt nun die gleichmäßige Konvergenz von

$$\psi_n(x) = \int_0^x \psi_n'(z)\, dz = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{a_\varkappa^{(n)}}{\varkappa} \sin \varkappa x$$

gegen

$$\psi(x) = \int_0^x \psi'(z)\, dz = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{a_\varkappa}{\varkappa} \sin \varkappa x.$$

Aus der Definition von ψ_n, ψ_n' und der $a_\varkappa^{(n)}$ als Lösungen der Gleichung $F_\varkappa = 0$ ergibt sich nach (1)

$$0 = \varkappa a_\varkappa^{(n)} + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x, \psi_n(x), \psi_n'(x)) \sin \varkappa x\, dx \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

und im Limes $n \to \infty$

$$0 = \varkappa a_\varkappa + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x, \psi(x), \psi'(x)) \sin \varkappa x\, dx \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots),$$

woraus durch Integration nach Teilen

$$a_\varkappa = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^x f(z, \psi(z), \psi'(z))\, dz \cos \varkappa x\, dx$$

Digitized by Google

folgt. Die Funktionen $\psi'(x)$ und $\int_0^x f(z, \psi(z), \psi'(z))\,dz$ haben also in Bezug auf das im Intervall $<0, \pi>$ vollständige Funktionensystem $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos \varkappa x$ dieselben Fourierkoeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d. h. es wird

$$\psi'(x) = \int_0^x f(z, \psi(z), \psi'(z))\,dz - \frac{a_0}{2},$$
$$\psi''(x) = f(x, \psi(x), \psi'(x)).$$

Da außerdem $\psi(0) = \psi(\pi)$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

2. Aus Satz 1 ergeben sich leicht weitere Gleichungstypen, für welche die Randwertaufgabe lösbar ist. Da die beliebige Randbedingung

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

wie unter 1. durch lineare Transformation in

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

verwandelt werden kann, soll im folgenden nur diese zugrunde gelegt werden.

Satz 2: Für $0 \leqq x \leqq \pi$, $y \leqq 0$ und alle y' sei

$$0 \leqq f(x, y, y') \leqq c_7 |y| + c_8,$$

wobei die positive Konstante $c_7 < \sqrt{\frac{3}{\pi}}$ ist.

Dann hat die Randwertaufgabe

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$$

stets eine Lösung.

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist etwa

$$f = \tfrac{1}{2} \sin y' e^y + 1.$$

Zum Beweise setze man

$$f_1(x, y, y') = \begin{cases} f(x, y, y') & \text{für } y \leqq 0 \\ f(x, 0, y') & \text{für } y > 0. \end{cases}$$

Offenbar genügt $f_1(x, y, y')$ den Voraussetzungen zu Satz 1, und es ist durchweg $f_1(x, y, y') \geqq 0$.

Somit gibt es eine Lösung $\psi_1(x)$ von

$$\psi_1''(x) = f_1(x, \psi_1(x), \psi_1'(x)),$$
$$\psi_1(0) = \psi_1(\pi) = 0. \tag{3}$$

Digitized by Google

Aus $f_1 \geqq 0$ folgt $\psi_1'' \geqq 0$ für $0 \leqq x \leqq \pi$ was wegen (3) $\psi_1(x) \leqq 0$ nach sich zieht.

Da für $y \leqq 0$ nun $f_1 = f$ ist, löst $\psi_1(x)$ auch die ursprüngliche Aufgabe, w. z. b. w.

Ganz analog ergibt sich

Satz 3: Für $0 \leqq x \leqq \pi$, $y \geqq 0$ und alle y' sei

$$0 \geqq f(x, y, y') \geqq -c_9 y + c_{10}$$

mit $0 < c_9 < \sqrt{\frac{3}{\pi}}$. Dann hat die Randwertaufgabe

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

stets eine Lösung.

Weiter gilt, wenn jeweils die Voraussetzungen in bezw. vor den eckigen Klammern zusammengehören

Satz 4: Für $0 \leqq x \leqq \pi$, alle y und y' sei $f(x, y, y')$ nach unten [oben] beschränkt, also $f \underset{[\leqq]}{\geqq} c_{11}$. Für $0 \leqq x \leqq \pi$, alle y' und $y < 0$ $[y > 0]$ sei

$$f(x, y, y') \leqq c_{12}|y| + c_{13} \qquad 0 < c_{12} < \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$
$$[f(x, y, y') \geqq -c_{12} y + c_{13}].$$

Dann hat die Randwertaufgabe

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

stets eine Lösung.

Der Beweis wird unter den ersten Voraussetzungen geführt, für die 2ten verläuft er ebenso. Die Funktion

$$f_1(x, z, z') = f\left(x, z + \frac{c_{11}}{2}(x^2 - \pi x),\ z' + c_{11}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - c_{11}$$

erfüllt in x, z, z' offenbar die Annahmen zu Satz 2.

Somit hat die Gleichung

$$z'' = f_1(x, z, z')$$

eine Lösung $z(x)$, die den Randbedingungen $z(0) = z(\pi) = 0$ genügt. Wie man unmittelbar erkennt, löst

$$y(x) = z(x) + \frac{c_{11}}{2}(x^2 - \pi x)$$

die ursprüngliche Aufgabe.

3. Über die Eindeutigkeit der Lösung kann folgender Satz ausgesprochen werden:

$f(x, y, y')$ sei für $0 \leqq x \leqq \pi$ alle y und y' stetig und

Digitized by Google

mit stetigen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ versehen. Ferner sei

$$\left|\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}\right| \leqq \alpha, \quad \left|\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}\right| \leqq \beta$$

wobei die Konstanten α, β der Bedingung

$$\alpha + \beta < 1$$

genügen. Dann hat die Aufgabe

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

nicht mehr als eine Lösung.

Ein Beispiel für eine Differentialgleichung mit genau einer Lösung der Randwertaufgabe ist hiernach in Rücksicht auf Satz 1

$$y'' = w(x) \cos y \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

wobei für die stetige Funktion $w(x)$ gilt $|w(x)| < \frac{1}{2}$.

Zum Beweise des Eindeutigkeitssatzes setze man die Differenz von zwei etwa vorhandenen Lösungen y und y_1

$$y_1(x) - y(x) = \psi(x).$$

Dann ist $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ und

$$\begin{aligned}\psi''(x) &= f(x, y_1, y_1') - f(x, y, y') \\ &= f(x, y + \psi, y' + \psi') - f(x, y, y') \\ &= \psi(x) \frac{\partial f(x, y + \vartheta\psi, y' + \vartheta_1\psi')}{\partial y} + \psi'(x) \frac{\partial f(x, y + \vartheta\psi, y' + \vartheta_1\psi')}{\partial y'},\end{aligned}$$

$$0 < \vartheta < 1, \quad 0 < \vartheta_1 < 1.$$

Bezeichnet man die rechte Seite zur Abkürzung mit $g(x, \psi, \psi')$, so wird

$$\psi'' = g(x, \psi, \psi'); \quad \psi(0) = \psi(\pi) = 0.$$

Die Fourierkoeffizienten von $\psi'(x)$ in Bezug auf das System $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x$, nämlich

$$a_\varkappa = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi' \cos \varkappa x \, dx = \frac{-2}{\pi} \int_0^\pi \psi'' \frac{\sin \varkappa x \, dx}{\varkappa}$$

genügen den Gleichungen

$$\varkappa a_\varkappa = \frac{-2}{\pi} \int_0^\pi g(x, \psi, \psi') \sin \varkappa x \, dx \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$a_0 = 0.$$

Digitized by Google

Zufolge der Vollständigkeit des Systems $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \varkappa x$ erhält man

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (\varkappa a_\varkappa)^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g^2 \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\psi \frac{\partial f}{\partial y} + \psi' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)^2 dx$$

$$\leqq \frac{2}{\pi} \left(\alpha^2 \int_0^\pi \psi^2 \, dx + 2\alpha\beta \int_0^\pi |\psi| |\psi'| \, dx + \beta^2 \int_0^\pi \psi'^2 \, dx \right)$$

oder, wegen

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi^2 \, dx = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\frac{a_\varkappa}{\varkappa} \right)^2 \leqq \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa^2, \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi'^2 \, dx = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa^2$$

und der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (\varkappa a_\varkappa)^2 \leqq (\alpha + \beta)^2 \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa^2.$$

Weil nun $\alpha + \beta < 1$ ist, kann diese Ungleichung nur mit $a_\varkappa = 0$ ($\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$) bestehen, d. h. $\psi(x)$ muß identisch verschwinden. Somit ist, wie behauptet, $y = y_1$.

Wendet man den Satz auf die lineare Gleichung

$$y'' + \alpha y = h(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

an, so liefert er, da ja $\frac{\partial f}{\partial y} = -\alpha$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ ist, die wohlbekannte Tatsache, daß die Randwertaufgabe für $|\alpha| < 1$ eindeutig lösbar ist. Dem entnimmt man, daß die Schranke 1 für $\alpha + \beta$ nicht vergrößert werden kann, da dies bereits für die lineare Aufgabe nicht möglich ist.

Digitized by Google

Eine Bemerkung über schlichte Minimalabbildungen [1]).

Von Stefan Bergmann in Berlin.

Ist B ein einfach zusammenhängender Bereich, der den Koordinatenanfangspunkt im Innern enthält, und $f(z)$ die Funktion, die ihn auf einen Kreis vom Radius ϱ abbildet (Kreisabbildungsfunktion), sodaß

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1 \tag{1}$$

ist, so kann die Funktion $f(z)$ auch dadurch gekennzeichnet werden, daß sie diejenige in B reguläre analytische Funktion ist, die bei Festhaltung der Normierung (1) dem Integral:

$$\iint_B |f'(z)|^2 \, d\omega \qquad (d\omega = dx\,dy = \text{Flächenelement}) \tag{2}$$

den kleinsten Wert erteilt (Minimalfunktion). Beweist man nun direkt, wie es in meiner Dissertation geschehen ist [2]), die Existenz dieser Minimalfunktion ohne den Riemannschen Abbildungssatz heranzuziehen, so wäre es wünschenswert ohne Benutzung des Riemannschen Satzes zu zeigen daß die Minimalfunktion den Bereich B auf das Innere eines Kreises abbildet, und so einen neuen Beweis des Kreisabbildungssatzes zu erhalten.

In dieser Richtung wurde von mir in der oben genannten Arbeit folgendes gezeigt:

Unter der Voraussetzung, daß die Minimalfunktion $f(z)$ den Bereich B *schlicht* auf einen Sternbereich (mit dem Koordinatenanfangspunkt als Zentrum) abbildet, der durch eine rektifizierbare Jordankurve K begrenzt ist, wird die Frage der Identität der Minimal- und Kreisabbildungsfunktion durch den folgenden Hilfssatz entschieden:

Hilfssatz 1: *Ist $R(\varphi)$ reell und periodisch mit der Periode 2π und gilt für sämtliche $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$*

$$\int_0^{2\pi} [R(\varphi)]^{k+2} e^{ik\varphi} \, d\varphi = 0, \tag{3}$$

so ist $R(\varphi)$ eine Konstante.

1) Vorgetragen in der 274. Sitzung am 29. April 1931.

2) Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. Math. Annalen **86** (1922) S. 238—271; siehe auch Bochner, „Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen". M. Z. **14** (1922) S. 180—207.

Digitized by Google

Die Relationen (3) sind nämlich erfüllt, wenn φ und $R(\varphi)$ die Polarkoordinaten der Punkte der Begrenzung K des sternförmigen Minimalbereichs bedeuten [3]).

Setzt man nun

$$t = Re^{i\varphi}$$

so ist das Bestehen von (3) mit

$$\int_K [R(t)]^2 t^{k-1} dt = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4, \ldots) \tag{3a}$$

gleichbedeutend, wo die Integration sich über die Berandung K des Minimalbereiches erstreckt. Es ist nämlich:

$$\int_K R^2 t^{k-1} dt = i \int_0^{2\pi} R^{k+2} e^{ik\varphi} d\varphi + \int_0^{2\pi} R^{k+1} e^{ik\varphi} dR$$

$$= i \int_0^{2\pi} R^{k+2} e^{ik\varphi} d\varphi - \frac{ik}{k+2} \int_0^{2\pi} R^{k+2} e^{ik\varphi} d\varphi = \frac{2i}{k+2} \int_0^{2\pi} R^{k+2} e^{ik\varphi} d\varphi.$$

Es genügt deshalb, den folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz 2: *Ist für alle z im Außengebiet einer geschlossenen Kurve C*

$$\int_C \frac{g(t)dt}{t-z} = 0, \tag{4}$$

und $g(t)$ für alle Punkte der Kurve C reell, so ist $g(t)$ eine Konstante [4]).

Die Bedingung (4) läßt sich nämlich auch in der Form

$$\int_C g(t) t^n dt = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots) \tag{4a}$$

schreiben, sodaß die Wahl $g(t) = [R(t)]^2$ auf den Hilfssatz 1 zurückführt.

Andererseits folgt der Hilfssatz 2 unmittelbar aus den Ergebnissen einer Arbeit von Plemelj [5]). Nach dieser ist nämlich

3) Vgl. die erste in der Fußbemerkung 2) zitierte Arbeit S. 245.

4) Auf die Bedeutung dieses Hilfssatzes für verschiedene Fragen, die mit der Entwicklung mach Orthogonalfunktionen (im Komplexen) zusammenhängen (z. B. Kreisabbildungssatz, Lösbarkeit der Randwertaufgabe u. a.) hat Herr Hammerstein in einem Vortrag hingewiesen. Diesem Vortrage verdanke ich die Anregung zu der vorliegenden Note.

5) J. Plemelj, Ein Ergänzungssatz zu Cauchyscher Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend. Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XIX (1908), S. 205—210. Den Hinweis auf die Arbeit von Plemelj im Zusammenhange mit dem Beweis des Hilfssatzes 2 verdanke ich Herrn A. Pleßner.

Digitized by Google

(4) die hinreichende (und notwendige) Bedingung, damit die im Innengebiet von C durch

$$G(z) = \int_C \frac{g(t)\,dt}{t-z}$$

gegebene Funktion $G(z)$ bei beliebiger auf C vorgegebener (stetiger) Belegung $g(t)$ die Randwerte $g(t)$ annimmt, d. h. daß

$$\lim_{z \to t} G(z) = g(t)$$

ist. Wird nun $g(t)$ als reell vorausgesetzt, so muß die Funktion $G(z)$, die dann reelle Randwerte besitzt, eine Konstante sein und dasselbe gilt a fortiori für $g(t)$.

Digitized by Google

Über die analytischen Zylinder[1]).

Von O. Mühlendyck in Berlin.

Man kann die analytischen Zylinder in folgende Familien einteilen:

1. Unebene Zylinder, deren Erzeugende euklidische Geraden sind.
2. Unebene Zylinder, deren Erzeugende Minimalgeraden sind.
3. Euklidische Ebenen.
4. Minimalebenen.

Die euklidischen Ebenen sind zueinander kongruent, ebenso die Minimalebenen. Für die Zylinder der beiden andern Familien sollen die natürlichen Gleichungen aufgestellt werden. Das ist einfach für die Zylinder der ersten Familie. Man braucht nur den Zylinder durch eine zu den Erzeugenden senkrechte Ebene zu schneiden. Die natürliche Gleichung der Schnittkurve ist dann auch die natürliche Gleichung des Zylinders. Nicht so einfach liegt die Sache bei den Zylindern der zweiten Familie.

Es liege ein Zylinder der zweiten Familie vor. Er enthält außer den Minimalgeraden eine Schar krummer Minimallinien, die zueinander kongruent sind. Wir greifen eine der krummen Minimallinien heraus, sie habe in Vektordarstellung die Gleichung

$$x = x(t). \tag{1}$$

Die Richtung der Erzeugenden des Zylinders sei gegeben durch den Minimalvektor

$$m = \text{konst}. \tag{2}$$

Es sollen folgende Bezeichnungen gebraucht werden:

$$\begin{cases} (pq)\text{: inneres Produkt der Vektoren } p, q, \\ [pq]\text{: äußeres Produkt der Vektoren } p, q, \\ (pqr)\text{: Determinante der Vektoren } p, q, r. \end{cases} \tag{3}$$

Wir errichten auf unserm Zylinder in den Punkten der Minimalkurve $x = x(t)$ die Normalen. Die Normalen orientieren wir.

1) Vorgetragen in der 272. Sitzung am 25. Februar 1931.

Digitized by Google

Der Einheitsvektor der zum Punkt x gehörigen orientierten Normale ist gegeben durch

$$u = \frac{[mx']}{\sqrt{-(mx')^2}}. \tag{4}$$

Die Striche deuten die Ableitung nach dem Parameter t an, die Bedeutung der Klammern ist durch (3) gegeben. Die Orientierung der Normale muß rational erklärt werden. Das geschieht durch die Festsetzung, daß

$$\sqrt{-(mx')^2} = -i(mx') \tag{5}$$

sein soll. Setzen wir (5) in (4) ein, so ergibt sich

$$u = \frac{i[mx']}{(mx')}. \tag{6}$$

Die Normalen $x = x(t)$, $u = u(t)$ bilden eine windschiefe Regelfläche mit isotroper Richtebene. Die windschiefen Regelflächen mit isotroper Richtebene habe ich in einer Arbeit behandelt, die demnächst in Crelles Journal[2]) erscheint. Ich führte für diese Regelflächen einen natürlichen Parameter ein, zu dem man auf folgende Weise gelangt: man bildet das Moment zweier benachbarter Erzeugenden der Regelfläche und integriert die Quadratwurzel aus dem Moment. Entsprechend bilden wir jetzt das Moment der benachbarten Normalen x, u und $x + x'\,dt$, $u + u'\,dt$ und erhalten hierfür den Ausdruck

$$\frac{(mx'x'')}{(mx')}\,dt^2,$$

wo die Striche wieder die Ableitungen nach t andeuten und die Bedeutung der Klammern aus (3) zu entnehmen ist. Integrieren wir die Quadratwurzel aus dem Moment, so erhalten wir den natürlichen Parameter

$$\tau = \int \sqrt{\frac{(mx'x'')}{(mx')}}\,dt, \tag{7}$$

der bis auf das Vorzeichen und eine additive Konstante bestimmt ist. Indem wir über den positiven Fortschreitungssinn des Parameters τ entscheiden, orientieren wir, wie wir sagen wollen, unsern Zylinder. Die Orientierung nehmen wir vor, damit die Invariante A, die wir nachher aufstellen, einwertig wird.

Wir legen jetzt den natürlichen Parameter τ zugrunde, setzen demgemäß die Gleichung der auf dem Zylinder gelegenen krummen

2) Crelles Journal 164 (1931) S. 128.

Digitized by Google

Minimallinie in der Form an:

$$x = x(\tau). \tag{8}$$

Striche deuten von jetzt an die Ableitungen nach dem natürlichen Parameter τ an. Aus (7) folgt nunmehr die Beziehung

$$(mx'x'') = (mx'). \tag{9}$$

Für die windschiefen Regelflächen mit isotroper Richtebene führte ich in der oben erwähnten Arbeit ein besonderes begleitendes Dreibein ein. Dasselbe Dreibein benutzen wir jetzt. Wir ordnen jedem Punkt x der Minimalkurve $x = x(\tau)$ drei Vektoren zu: den Einheitsvektor u der zum Punkt x gehörigen orientierten Normale des Zylinders (s. o.), den Minimalvektor $v = u'$, der zu den Erzeugenden des Zylinders parallel ist, und den Minimalvektor $w = -x'$. So erhalten wir zu jedem Punkt x der Minimalkurve $x = x(\tau)$ ein begleitendes Dreibein

$$u = \frac{i[mx']}{(mx')}, \quad v = -\frac{im}{(mx')}, \quad w = -x'. \tag{10}$$

Die Vektoren u, v, w erfüllen die Bedingungen

$$\begin{cases} (uu) = 1, \quad (vv) = (ww) = 0, \quad (uv) = (uw) = 0, \\ (vw) = i, \quad (uvw) = 1. \end{cases} \tag{11}$$

Durch die Bedingungen (11) ist das Dreibein gekennzeichnet hinsichtlich der Bewegungsgruppe.

Die Vektoren u' und u'' sind zu den Erzeugenden des Zylinders parallel. Bilden wir das Verhältnis von u'' und u', so erhalten wir unter Beachtung von (9) die Invariante

$$A = \frac{(u''\omega)}{(u'\omega)} = \frac{(u''x')}{(u'x')} = -\frac{(mx'')}{(mx')}, \tag{12}$$

wo ω ein willkürlicher Hilfsvektor ist. Die Invariante A ist einwertig, da wir unsern Zylinder „orientiert" haben (s. o).

Unter Zuhilfenahme der Invariante A lassen sich die Ableitungen der Vektoren u, v, w nach dem natürlichen Parameter τ als lineare Funktionen der Vektoren u, v, w ausdrücken. Es ergeben sich die Ableitungsformeln:

$$u' = v, \quad v' = Av, \quad w' = -iu - Aw. \tag{13}$$

Ist die Invariante A als Funktion von τ gegeben und hat man auf Grund des Systems linearer Differentialgleichungen (13) die Vektoren u, v, w als Funktionen von τ gefunden:

$$u = u(\tau), \quad v = v(\tau), \quad w = w(\tau), \tag{14}$$

Digitized by Google

so ergibt sich aus (10)

$$x = -\int w(\tau)\, d\tau \tag{15}$$

als Gleichung der auf dem Zylinder gelegenen krummen Minimallinie. Die Richtung der Erzeugenden des Zylinders ist durch $v = v(\tau)$ gegeben. Durch Angabe der Invariante A als analytischer Funktion des natürlichen Parameters τ ist somit der orientierte Zylinder bestimmt, und zwar ist er, abgesehen von Bewegungen eindeutig bestimmt. Die Gleichung

$$A = A(\tau) \tag{16}$$

ist mithin die natürliche Gleichung unseres orientierten Zylinders.

Digitized by Google

Inhalt der Jahrgänge XI—XXX[1])

der Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

	Jahrgang	Seite
Abraham, M., Ein Problem der Elektrostatik	XVIII	13—16
Anér, H., Zur Formentheorie der sechswertigen Resolventen	XIII	68—80
Apt, F., Nicht differentiierbare Funktionen und tangentenlose Kurven. (Geschichte und Problem.)	XIX	85—88
Baruch, A., Nachruf auf Eugen Jahnke	XXI	30—39
Beck, H., Zur Geometrie der Minimalebene	XII	14—30
— Berichtigung hierzu	XV	78
Bergmann, S., Über Hermitesche Formen, die zu einem Bereich gehören	XXVI	178—184
— Eine Bemerkung über schlichte Minimalabbildungen	XXX	11—13
Bieberbach, L., Hermann Amandus Schwarz	XXI	47—52
— Über einen Riemannschen Satz aus der Lehre von der konformen Abbildung	XXIV	6—9
Blaschke, W., Aufgaben der Differentialgeometrie im Großen	XV	62—69
Bochner, S., Über Fourier-Reihen von fastperiodischen Funktionen	XXVI	49—65
Böhmer, P. E., Über mehrdeutige periodische Funktionen	XII	32—35
— Über die Zylinderfunktionen	XIII	30—36
v. Bortkiewicz, L., Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen über die Knabenquote bei Zwillingsgeburten	XVII	8—14
— Zur Arithmetik der Verhältniswahl	XVIII	17—24
— Das Laplacesche Ergänzungsglied und Eggenbergers Grenzberichtigung zum Wahrscheinlichkeitsintegral	XVIII	37—42
— Variationsbreite und mittlerer Fehler	XXI	3—11
— Über eine verschiedenen Fehlergesetzen gemeinsame Eigenschaft	XXII	21—32
Brauer, A., und Zeitz, H., Über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre	XXIX	116—125
Burg, R., Welche Zahlen geben in umgekehrter Ziffernfolge ein Vielfaches ihres Wertes?	XV	8—18
Cauer, W., Ein Satz über zwei zusammenhängende Hurwitzsche Polynome	XXVII	25—31
Dziobek, O., Über allgemeine Determinantentransformationen	XII	76—82
— Eine Formel der Substitutionstheorie	XVI	64—67
Fladt, K., Über eine elementare, rein geometrische Proportionenlehre	XXVI	163—167
Fleck, A., Relationen und zahlentheoretische Eigenschaften von Reihen, welche aus einer andern Reihe durch Auslassung von Gliedern entstehen	XIII	2—6
— Über gewisse mit der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(n)$ verwandte Funktion $\varphi_k(m)$	XIII	161—169
— Mnemotechnisch-einfache Berechnung des Kalenders mit den Festtagen	XIV	43—50
— Über gewisse allgemeine zahlentheoretische Funktionen, insbesondere eine der Funktion $\mu(m)$ verwandte Funktion $\mu_k(m)$	XV	3—8

1) Die Anfertigung des Inhaltsverzeichnisses hat dankenswerterweise Frau Annemarie Jacobsthal ausgeführt.

Digitized by Google

	Jahrgang	Seite
Fleck, A., Über Teilbarkeit gewisser Faktoriellen durch andere und ihren Zusammenhang mit gewissen Gleichungen und Reihen	XIX	34—41
— Über die aus Trigonalzahlen statt aus den natürlichen Zahlen den Binomialkoeffizienten entsprechend gebildeten Zahlen	XXI	53—58
— Über eine Erweiterung des Begriffs der komplexen Zahl	XXVI	113—123
Fraenkel, A., Axiomatische Begründung der geordneten Mengen	XXIV	29—37
Franck, P., Über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes	XIII	110—127
Fuchs, R., Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer Unbestimmtheitsstelle	XIII	169—175
— Zur Theorie der Luftkräfte. (Doppeldeckerrechnung.)	XXIII	46—49
Gaedecke, W., Über eine bemerkenswerte Relation beim Normalenproblem der Kegelschnitte	XV	119—123
— Über das Zentrum der mittleren Entfernungen gewisser Punktquadrupel auf den rationalen zirkularen Kurven 3. Ordnung mit Symmetrieachse	XVI	3—9
— Über das Zentrum der mittleren Entfernungen gewisser Punktsysteme der Ebene, die den Berührungspunkten paralleler Tangenten an höheren ebenen algebraischen Kurven entsprechen	XVI	70—73
Grüß, G., Über Gewebe auf Flächen in dreidimensionalen allgemeinen metrischen Räumen	XXVII	3—15
— Zur Begründung des Parallelismus von Levicivita	XXIX	103—115
Haentzschel, E., Über nationale Tetraeder	XII	101—108
— Theorie der Heronischen Parallelogramme	XIII	80—89
— Über die Gleichung $z^3 = x^3 + y^3$	XIII	92—96
— Die rationalen Vierecke des Inders Brahmagupta	XIV	23—31
— Über Sehnentangentenvierecke mit rationalen Maßzahlen der Seiten, der Diagonalen, der beiden Kreisradien und des Flächeninhalts, und über die durch die Ankumsche Methode aus ihnen hergeleiteten rationalen Tetraeder	XIV	85—94
— Bemerkungen zum Briefwechsel Fermats mit Jacques de Billy	XV	80—91
— Über die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2 + u^2$	XV	132—150
— Über die Lösung der Gleichung $\alpha x^4 + \beta y^4 = \gamma z^2$ in ganzen Zahlen	XVI	9—16
— Über Schließungsaufgaben, eine besondere Art von Fermatproblemen	XVI	85—92
— Über rationale Tetraeder mit kongruenten Seiten. (2. Mitteilung.)	XVII	37—39
— Bemerkung zur Fleckschen Lösung der Gleichung $z^3 = x^3 + y^3$	XVIII	32—33
— Bemerkung zum 8. Kapitel der unbestimmten Analytik in Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“	XVIII	33—36
— Nachruf auf Otto Dziobek	XIX	31—33
— Nachruf auf Georg Wallenberg	XXIV	38—41
— Eine stereometrische Aufgabe, als kubisches diophantisches Problem behandelt	XXV	18—21
Haenzel, G, Zur synthetischen Theorie der Mechanik starrer Körper	XXVI	126—162
— Ein neuer Satz über die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen	XXVII	16—19
— Über ganze rationale Funktionen dritten Grades und ihre Kovarianten	XXVII	20—24
— Über ganze rationale Funktionen	XXVIII	31—45
Hamburger, H., Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion	XX	4—9
— Über die Funktionalgleichung der L-Reihen	XX	10—13
Hamel, G., Zur Einsteinschen Gravitationstheorie	XIX	65—73
— Über die Mechanik der Drähte und Seile	XXV	3—8

Digitized by Google

	Jahrgang	Seite
Hamel, G., Felix Klein als Mathematiker	XXV	69—80
— Anwendung der elementaren Zahlentheorie auf die Theorie eines Chiffrierapparates	XXVI	94—110
Hammerstein, A., Begründung der Theorie der linearen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern mittels Variationsrechnung	XXIII	3—13
— Über die Approximation stetiger Funktionen durch Reihen, die nach Integralmittelwerten eines vollständigen Orthogonalsystems fortschreiten	XXV	9—17
— Nichtlineare Integralgleichungen und direkte Methoden der Variationsrechnung	XXVI	66—70
— Bemerkung zu vorstehender Arbeit	XXVI	177
— Eine Restabschätzung für das Ritzsche Verfahren bei gewissen Variationsproblemen mit Nebenbedingung	XXVI	171—177
— Die erste Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	XXX	3—10
Herzberger, M., Über einige Fragen der geometrischen Optik	XXVI	3—11
Hoecken, K., Die Rechenmaschine von Pascal bis zur Gegenwart, unter besonderer Berücksichtigung der Multiplikationsmechanismen	XIII	8—29
Hopf, E., Bemerkungen zum ersten Randwertproblem der Potentialtheorie im Raume	XXVI	43—48
— Eine Bemerkung zur Theorie der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus	XXVI	111—112
Jacobsthal, E., und Knopp, K., Bemerkungen über die Struktur linearer Punktmengen	XIV	121—129
Jacobsthal, E., Fibonaccische Polynome und Kreisteilungsgleichungen	XVII	43—51
— Zum Minkowskischen Satze über lineare Formen	XXII	33—37
— Eigenschaften einer speziellen Klasse monotoner Folgen	XXVI	32—42
Jaenichen, W., Über die Verallgemeinerung einer Gaussschen Formel aus der Theorie der Höheren Kongruenzen	XX	23—29
Jahnke, E., Émile Lemoine (1840—1912)	XI	57—62
— Das Orthogonalsystem der Lorentz-Transformation	XII	109—112
— Richard Güntsche (1861—1913)	XII	96—100
— Josef Herzog (1859—1915)	XIV	137—138
Jolles, St., Nachruf auf Paul Schafheitlin	XXIV	14—20
Jonas, H., Über eine neue partielle Differentialgleichung des Deformationsproblems und über die Bestimmung der Asymptotenlinien auf den Biegungsflächen der Flächen 2. Grades	XIII	52—61
— Über die Transformation der konjugierten Systeme und über den gemeinsamen Ursprung der Bianchischen Permutabilitätstheoreme	XIV	96—118
— Über eine mit den isothermen Flächen verwandte Klasse von Flächen und ihre Transformationen	XVII	24—34
— Über eine Klasse von Flächen, die ein Gegenstück zu den von Demoulin und Tzitzéica betrachteten R-Flächen bilden	XIX	18—30
— Über die Verbiegung der Paraboloide	XXI	70—81
— Über eine mit den Flächen 2. Grades zusammenhängende zweifach-unendliche Schar auf einander abwickelbarer algebraischer Flächen	XXII	49—63
— Über gewisse mit der Verbiegung des orthogonalen Hyperboloids zusammenhängende Flächen und über eine Biegungseigenschaft der Flächen $z = \Re\{f(x+iy)\}$	XXIV	54—80
— Über eine dritte geometrische Deutung der für die Affinsphären aufgestellten Transformationstheorie	XXVII	57—78
— Über neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren	XXIX	34—51

Digitized by Google

	Jahrgang	Seite
Knoblauch, J., Ein Bildnis Leonhard Eulers im Privatbesitz	XI	2—3
— Die Differentialgleichung der Flächen mit isometrischen Krümmungslinien	XI	50—56
— Über Bezeichnungen in der Mathematik	XIII	150—156
— Zur Theorie der geradlinigen Flächen	XIV	13—17
— Die Kennzeichen der Rotations- und Helicoidflächen	XIV	17—23
— Strahlensysteme und Differentialformen	XIV	79—84
Knopp, K., Über einige Transformationsgleichungen in der Zahlentheorie	XI	32—39
— Vergl. Jacobsthal und Knopp	XIV	121—129
— Über die Oszillationen einfach unbestimmter Reihen	XVI	45—50
— Eine einheitliche Erzeugungsart stetiger nirgends differentierbarer Funktionen (Auszug)	XVI	97—106
— Einige Bemerkungen zur Kummerschen und Markoffschen Reihentransformation	XIX	4—17
— Eine kurze Bemerkung über die Tragweite der Konvergenzkriterien zweiter Art	XIX	42—46
— Über eine Kroneckersche Konvergenzbedingung	XXIV	3—5
Koppe, M., Über orthogonale Axonometrie und Weisbachs Satz	XI	5—10
— Das Rechnen mit Kettenbrüchen	XV	168—175
— Berechnung der Logarithmen auf viele Stellen	XVI	30—44
Korn, A., Über die Entwicklungen nach Eigenfunktionen unsymmetrischer Kerne in der Theorie der linearen Integralgleichungen	XI	11—18
— Henri Poincaré (1854—1912)	XII	2—17
— Joseph Louis Lagrange. Zu seinem 100jährigen Todestage	XII	90—94
— Über die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie	XIII	61—65
— Über positivierende Funktionen	XV	107—114
— Über eine Methode der sukzessiven Näherungen zur Lösung linearer, gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen	XV	115—119
— Über eine Methode der sukzessiven Näherungen zur Lösung linearer, gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen (2. Mitteilung)	XVI	51—55
— Das mathematische Problem des gleichförmig bewegten Elektrons	XVII	3—8
— Emil Lampe	XVIII	4—12
— Über die Heavisidesche Methode zur Integration der Telegraphengleichung	XXVI	71—84
— Berichtigung hierzu	XXIX	125
— „Wellenmechanik“ und Wellenmechanik	XXVII	79—91
— Anwendung der Heavisideschen Methode zur Integration der Wärmeleitungsgleichung	XXVIII	46—54
— Verallgemeinerung von Iterationen für nicht ganze Iterationszahlen	XXVIII	55—60
— Über einige Integraleigenschaften der Besselschen Funktionen und eine Anwendung derselben	XXIX	22—31
— Berichtigung hierzu	XXIX	125
Kochschmieder, L., Über eine besondere äquianharmonische elliptische Funktion und ihre Verwendung in der Zahlentheorie	XXI	12—15
— Adolf Kneser	XXIX	78—102
Küpfmüller, K., Über eine besondere Art der Reihendarstellung von analytischen Funktionen	XX	32—42
Lampe, E., Über die Abhängigkeit der extremen Werte der Insolation von der Deklination der Sonne	XII	62—64
— Über eine elementare Schließungsaufgabe am gleichseitigen Dreieck	XII	72—76
— Zum Gedächtnis von Georg Hettner	XIV	2—7

Digitized by Google

	Jahrgang	Seite
Lampe, E., Über eine angenäherte Vielteilung eines Winkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal	XIV	8—12
— Zur hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von Karl Weierstraß	XV	36—58
— Angenäherte Kreisquadraturen	XV	150—158
— Über die zahlenmäßige Berechnung des Durchmessers eines Kreises, in den sich ein n-Eck mit vorgegebenen Seitenlängen $a_1, a_2, \ldots a_n$ einschreiben läßt	XV	159—168
— Merkstellen zur Geschichte der Mechanik	XVI	73—84
Lasker, E., Über eine Eigenschaft der Diskriminante	XV	176—178
— Begründung des Satzes, daß es in Wirklichkeit Prozesse gibt, die sich mit beliebig großer Geschwindigkeit fortpflanzen	XXVIII	61—70
Lemke, H., Über eine von R. Liouville untersuchte Differentialgleichung erster Ordnung	XVIII	26—31
Lichtenstein, L., Die Jacobische Bedingung bei zweidimensionalen regulären Variationsproblemen	XIV	119—121
— Bemerkungen über das Verfahren der sukzessiven Approximationen	XIV	130—136
— Über die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie	XV	92—96
— Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus. Das erste Randwertproblem. Beschränkte einfach oder mehrfach zusammenhängende ebene Gebiete allgemeinster Natur	XV	123—130
Lindner, P., Die Beziehungen der begrenzten Ableitungen mit komplexem Zeiger zu den Besselschen Funktionen und ihren Nullstellen	XI	3—5
Lötzbeyer, Ph., Die Berücksichtiung der politischen Arithmetik im mathematischen Unterricht und ihre Bedeutung für die staatsbürgerliche Bildung und Erziehung	XIII	37—51
Löwenheim, L., Potenzen im Relativkalkul und Potenzen allgemeiner endlicher Transformationen	XII	65—71
Lorey, W., Bestrebungen für eine Organisation des mathematischen Studiums in den ersten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts	XV	97—107
— Felix Kleins Persönlichkeit und seine Bedeutung für den mathematischen Unterricht	XXV	54—68
— Johann Heinrich Lambert	XXVIII	2—27
Meißner, W., Über die Lösungen der Kongruenz $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p^m$ und ihre Verwertung zur Periodenbestimmung mod p^x	XIII	96—107
Meyer, W. Fr., Über das Schließungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehnng zu den elliptischen Funktionen	XXVII	92—103
— Über ein neues Übertragungsprinzip in der projektiven Invariantentheorie	XXVIII	100—113
v. Mises, R., Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe	XXII	3—8
Mühlendyck, O., Zur Differentialgeometrie der regulären eindimensionalen Somenmannigfaltigkeiten	XXIV	44—53
— Über eine Abbildung	XXV	22—24
— Über eine Familie dreidimensionaler Somenmannigfaltigkeiten	XXVI	12—17
— Beitrag zur Differentialgeometrie der regulären dreidimensionalen Somenmannigfaltigkeiten	XXVI	18—29
— Über die analytischen Zylinder	XXX	14—17
Müller, R., Carl Färber †	XI	25—30
Müntz, Ch. H., Über den Gebrauch willkürlicher Funktionen in der analytischen Zahlentheorie	XXIV	81—93
Neiß, F., Relativ Abelsche Zahlkörper	XIX	74—84
Obrechkoff, N., Über die Konvergenz von Reihen mit positiven Gliedern	XX	52—55

Digitized by Google

	Jahrgang	Seite
Ostrowski, A., Über das Hadamardsche Singularitätenkriterium in der Theorie der Taylorschen und Dirichletschen Reihen	XXVII	32—47
Popoff, K., Über einige Reihenentwicklungen	XX	43—51
Prandtl, L., Klein und die angewandten Wissenschaften	XXV	81—87
Rademacher, H., Zur Theorie der Minkowskischen Stützebenenfunktion	XX	15—19
— Über den Konvergenzbereich der Eulerschen Reihentransformation	XXI	16—24
Reißner, H., Über eine Fragestellung zur Struktur der elektrischen Ladung	XVII	40—43
— Die allgemeine Relativitätstheorie und die Weylsche Erweiterung	XIX	47—64
— Beitrag zum Erddruckproblem	XXIII	14—45
— Elektron und Kern als Punktladungen	XXIV	21—28
— Ebene Potentialströmungen in rotierenden offenen Kammern	XXVIII	78—85
Remak, R., Theorie der Wabenzellen und Minkowskischer Satz über das Produkt inhomogener Linearformen	XX	56—58
Rothe, E., Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen	XXVIII	71—77
Rothe, R., Zum Problem des Talwegs	XIV	51—68
— Zur Erinnerung an Johannes Knoblauch	XV	19—28
— Bericht über den gegenwärtigen Stand der Herausgabe der Mathematischen Werke von Karl Weierstraß	XV	59—62
— Über die Treffwahrscheinlichkeit einer Scheibe	XV	69—78
— Zur Lösung des Hauptproblems der äußeren Ballistik	XVI	92—97
— Mitteilung über die Bestimmung einer Geschoßflugbahn mit großer Schußweite	XVII	35—36
— Gerhard Hessenberg	XXV	26—44
— Über den Mittelwertsatz und die Taylorsche Formel	XXVI	85—93
Sadowsky, M., Einige Randwertprobleme der Elastizitätstheorie in zwei Dimensionen. Bemerkungen zur Methode der Airyschen Spannungsfunktion	XXVIII	86—99
Salkowski, E., Biegungsregelflächen von Flächen zweiter Ordnung	XII	83—89
— Hessenberg als darstellender Geometer	XXV	45—52
— Affinminimalflächen und Gewindekurven	XXVIII	114—123
Schafheitlin, P., Bemerkungen über die allgemeinere hypergeometrische Reihe $G(\alpha, \beta, \delta; \gamma, \varepsilon; x)$	XI	20—25
— Eine bisher ungedruckte Jugendarbeit von Leonhard Euler aus den Handschriften der Universitätsbibliothek in Basel	XXI	40—44
— Eine bisher unbekannte Rede von Leonhard Euler (mit Reproduktion der ersten Seite der Handschrift)	XXIV	10—13
Scheffers, G., Über zwei mit einem Flächenpunkte verknüpfte Flächen zweiter Ordnung	XIV	68—79
— Über die Fehlerregel	XV	29—34
— Projektion der Kugel	XXIX	18—21
Schur, I., Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen speziellen arithmetischen Progressionen	XI	40—50
— Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie	XXII	9—20
— Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Reihen	XXIX	3—13
Study, E., Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik	XII	36—60
— Berichtigung dazu	XII	94
Stübler, E., Wirkung des Windes auf die Bahn eines Geschosses	XVII	51—62
Szász, O., Ein Grenzwertsatz über Potenzreihen	XXI	25—29
Szegö, G., Über die Randwerte analytischer Funktionen	XX	20—22

Digitized by Google

	Jahrgang	Seite
Szegö, G., Über die Nullstellen von Polynomen, die in einem Kreise gleichmäßig konvergieren	XXI	59—64
— Über eine Extremalaufgabe aus der Theorie der schlichten Abbildungen	XXII	38—47
— Berichtigung hierzu	XXIII	64
— Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe	XXIII	50—64
Volterra, V., Les problèmes qui ressortent du concept de fonctions de lignes	XIII	130—150
Wallenberg, G., Anwendung eines Satzes von Poincaré aus der Theorie der linearen Differenzengleichungen auf die Zahlenreihe des Fibonacci	XIV	32—40
— Über Riccatische Differenzengleichungen	XVI	17—28
— Berichtigung hierzu	XVI	63
— Über Riccatische Differenzengleichungen zweiter Ordnung	XVI	57—63
— Zur Theorie der Riccatischen und Schwarzschen Differenzengleichung	XVII	14—22
Weinstein, A., Ein einfaches Kriterium für die Konvergenz der Neumannschen Reihe	XXVI	168—170
Weiss, E. A., Über die Parameterdarstellung einer von C. Segre betrachteten Kongruenz (4, 4) mittels Thetafunktionen ($p = 2$)	XXVII	48—56
— Neue geometrische Deutung der Apolaritätsbeziehung zwischen zwei binären kubischen Formen	XXIX	14—17
— E. Study. Ein Nachruf	XXIX	52—77
Weiss, F., Über mathematische Begriffsbildung	XIII	156—161
Weltzien, C., Die n-te Wurzel aus einer homogenen linearen Substitution von 3 Veränderlichen	XXII	48
Zacharias, M., Asymptoten und Brennpunkte der Kegelschnitte in der nichteuklidischen Geometrie	XXI	65—69
Zeitz, H., Siehe Brauer und Zeitz	XXIX	116—125
Zühlke, P., Nachruf auf Paul Lindner	XVI	55—57

Digitized by Google

Mitglieder-Verzeichnis.

A. Persönliche Mitglieder.

Die mit einem Stern versehenen Mitglieder haben sich durch einmalige Zahlung nach § 4 der Satzung abgelöst.

Ackermann-Teubner, Hofrat Dr. Dr.-Ing. E. h. A., Domherr, Leipzig, Poststr. 3.
Apt, Studienrat Dr. Fr., Berlin-Neukölln, Pflügerstr. 59 I.
Aschert, Bankdirektor a. D. H., Berlin W., Derfflinger Str. 3.
Baldus, Prof. Dr. R., Karlsruhe i. B., Mozartstr. 8.
Barneck, Privatdozent Dr. A., Berlin-Zehlendorf, Treibjagdweg 41.
Beck, Prof. Dr. H., Bonn, Lennéstr. 36.
Becker, Studienassessor W., Berlin-Neukölln, Fuldastr. 23 a.
Bergmann, Dipl.-Ing., Privatdozent Dr. Stefan, Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.
Bernays, Prof. Dr. P., Göttingen, Kirchweg 6 I.
Bernstein, Prof. Dr. F., Göttingen, Lotzestr. 33.
Betz, O., Korvettenkapitän a. D., Berlin-Schmargendorf, Salzbrunnerstr. 58/60.
Bieberbach, Prof. Dr. L., Berlin-Dahlem, Gelfertstr. 16.
Birkhoff, Prof. Dr. G. D., 984 Memorial Drive, Cambridge, Mass. (U.S.A.).
Blaschke, Studienrat G., Berlin-Charlottenburg, Bleibtreustr. 8—9.
Blaschke, Prof. Dr. W., Hamburg 37, Brahmsallee 76.
Blumenthal, Prof. Dr. O., Aachen, Rütscherstr. 38.
Bochner, Dr. S., München, Möhlstr. 12.
Böhler, Landmesser H., Berlin-Steglitz, Schloßstr. 49.
Böhmer, Prof. Dr. P. E., Dresden-A., Wallotstr. 22 II.
Boelk, Studienrat Dr. P., Berlin-Charlottenburg, Wallstr. 54.
Bollé, Dr. E., Berlin-Charlottenburg 2, Fraunhoferstr. 17.
Bornitz, Studienrat F., Berlin-Halensee, Schweidnitzer Str. 5.
Boß, Studienrätin A., Berlin N.W., Essenerstr. 20 IV, Portal II.
Brauer, Privatdozent Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 57.
v. Brill, Prof. Dr. A., Tübingen, Eugenstr. 3.
Brun, Prof. V., Trondhjem (Norwegen).
Burg, Oberstudiendirektor Dr. R., Berlin-Nikolassee, Lückhoffstr. 22.
Byk, Prof. Dr. A., Berlin W. 15, Pariserstr. 27.
Carathéodory, Prof. Dr. C., München, Rauchstr. 8.
Cauer, Dr.-Ing. W., Göttingen, Friedländerweg 35.
Cohn, Studienrat Dr. A., Berlin-Waidmannslust, Waidmannstr. 119.
Cohn-Vossen, Dr. Stephan, Köln-Delbrück, Waldhausstr. 9.
Cranz, GRR. Prof. Dr. C., Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 32 a.
Cremer, Privatdozent Dr. H., Köln, Eifelstr. 19 II bei Klein.
Degosang, Studienrat, Berlin-Karlshorst, Königswinterstr. 20.
Denizot, Prof. Dr. A., Posen, Physikalisches Institut der Universität.
Dingeldey, Prof. Dr. F., Darmstadt, Hoffmannstr. 41.
Dörge, Privatdozent Dr. K., Köln, Aduchtstr. 9.
Dreetz, Studienrat W., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 65.
Duarte, Prof. F. J., Genf (Schweiz), 5, rue Henri-Mussard.
Dubislav, Prof. Dr. W., Berlin-Friedenau, Bennigsenstr. 6. Port. 2.
Duffing, Oberingenieur G., Hamburg 23, Landwehrstr. 16.
Dumas, Prof. Dr. G., Béthusy-Lausanne, Cabrières Av. Mt Charmant (Schweiz).
Ebeling, Direktor Dr. phil. Dr.-Ing. E. h. A., Berlin-Charlottenburg 9, Schwarzburg-Allee 14.

Digitized by Google

Ehrlich, Studienrat L., Berlin NO. 55, Marienburger Str. 36.
Eisner, Regierungsbaumeister Dipl.-Ing. F., Berlin-Westend, Akazien-Allee 15.
Emde, Prof. Dr.-Ing. E. h. F., Stuttgart, Gänsheidestr. 35.
*Emmerich, A., Rudolstadt, Georgstr. 5.
Engel, Prof. Dr. Dr. h. c. F., Gießen, Ludwigsplatz 9.
Epstein, Prof. Dr. P., Frankfurt a. M., Eschersheim, Körberstr. 16.
Fejér, Prof. Dr. L., Budapest I, (Ungarn), Kritztina-körut 165.
Feigl, Privatdozent Dr. G., Berlin-Lankwitz, Kaiser Wilhelmstr. 139.
Finsler, Prof. Dr. P., Zürich (Schweiz), Schmelzbergstr. 27.
Fischer, Studienrat P. B., Berlin-Lichterfelde-W., Drakestr. 36 I.
Fladt, Studienrat Dr. K., Vaihingen a. F. bei Stuttgart, Christofstr. 18.
Fleck, San.-Rat Dr. A., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 22.
Föttinger, Prof. Dr.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg, Techn. Hochschule EB 205, Berliner Str. 171.
Fraenkel, Prof. Dr. A., Kiel, Forstweg 23.
*Franck, Dr. P., Hamburg, Wolfshagen 18 I.
Freundlich, Dr. E. F., Astrophysik. Observatorium, Potsdam, Telegraphenberg.
Fuchs, Prof. Dr. R., Berlin-Halensee, Ringbahnstr. 7.
Fujiwara, Prof. M., Universität Sendai (Japan).
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Wien XVIII, Messerschmidtgasse 45.
Galle, GRR. Prof. Dr. A., Potsdam, Neue Königstr. 103.
Gebhardt, Studienrat F., Berlin-Schlachtensee, Seestr. 44.
Geilen, Studienrat V., Marienburg, Langgasse 6.
Grammel, Prof. Dr. phil. Dr. techn. h. c. R., Stuttgart, Bobserwaldstr. 16.
Gruschke, Oberingenieur Dr. G., Berlin-Wilmersdorf, Hildegardstr. 24.
Grüß, Privatdozent Dr.-Ing. G., Berlin NW. 87, Tile Wardenbergstr. 28.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Berlin-Tempelhof, Sachsenring 22.
Haenzel, Privatdozent Dr.-Ing. G., Berlin-Wittenau, Straße 140, No. 16.
Hamburger, Prof. Dr. H., Köln a. Rh., Alter Burgen-Wall 18.
Hamel, Prof. Dr. G., Berlin W. 30, Eisenacherstr. 35.
Hammerstein, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 9.
*Haniel, Maler F., Düsseldorf, Goldsteinstr. 27.
Happel, Prof. Dr. H., Breslau XVI, (Zimbel), Friedrich Ebertstr. 37.
Hausdorff, Prof. Dr. F., Bonn a. Rh., Hindenburgstr. 61.
Haußner, GHR. Prof. Dr., Jena, Stoystr. 1.
Heegaard, Prof. Dr. P., Lilleaker, box 105, Norwegen.
Heegner, Dr. K., Berlin-Steglitz, Elisenstr. 7 (Landhaus).
Hellinger, Prof. Dr. E., Frankfurt a. M., Marbachweg 339.
Hensel, GRR. Prof. Dr. K., Marburg (Lahn), Breiter Weg 7.
Hertwig, GRR. Prof. Dr.-Ing. E. h., Berlin-Charlottenburg 2, Kurfürstenallee, Baracke 15.
Herzberger, Dr. M., Jena, Blumenstr. 5.
Hinrichs, Dr., Berlin-Schöneberg, Wexstr. 61 I, bei Tuscher.
Hirsch, Dr. K., Berlin-Wilmersdorf, Bingerstr. 7 pt.
Hoecken, Oberingenieur K., Berlin-Friedenau, Wielandstr. 19 III.
Hoheisel, Prof. Dr. G., Breslau 10, Weinstr. 26.
Hoff, Prof. Dr.-Ing., Berlin-Johannisthal, Sternplatz 9.
Hoffmann, Oberstudiendirektor Prof. Dr. C., Ravensburg (Württ.), Schützenstr. 19.
Holtze, Studienrat i. R. Dipl.-Ing. H., Naumburg/Saale, Jägerplatz 16.
Holzer, Dr. L., Assistent a. d. Technischen Hochschule in Graz.
Hopf, Privatdozent Dr. E., Berlin-Steglitz, Kühlebornstr. 20.
Hopf, Prof. Dr. H., Zürich (Schweiz), Schlössli-Gasse 2.
Hurwitz, Frl. Dr. Lotte, Studienrat, Berlin-Wilmersdorf, Sigmaringerstr. 23.
v. Ignatowsky, Dr. W., Leningrad, Nabereschnaja 9—oe, Janwarja No. 32. Wohnung 8.
Jacobsthal, Prof. Dr. E., Berlin-Zehlendorf, Am Fischtal 2a.
Jacobsthal, Oberstudiendirektor Dr. W., Berlin-Wilmersdorf, Hindenburgstr. 36.
Jaenichen, Studienrat Dr. W., Berlin-Zehlendorf-West, Niklasstr. 33.
Jochmann, Studienrat, Berlin-Lichterfelde, Hindenburgdamm 95a.
Jolles, GRR. Prof. Dr. St., Berlin-Halensee, Kurfürstendamm 130.

Digitized by Google

Jonas, Studienrat Dr. H. J., Berlin-Steglitz, Klingsorstr. 3.
Kahlau, Studienreferendar R., Berlin-Baumschulenweg, Scheiblerstr. 28.
v. Kármán, Dr. Th. ordentl. Professor an der Techn. Hochschule Aachen.
Keller, Dr. Ott-Heinrich, Mathematisches Seminar an der Techn. Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Knopp, Prof. Dr. K., Tübingen, Neckarhalde 56.
Koebe, Prof. Dr. P., Leipzig, Fockestr. 9.
Koebke, Oberingenieur Dr. E., Berlin-Charlottenburg 5, Lietzensee-Ufer 1.
Koepsel, Dr. A., Berlin-Friedenau, Kaiserallee 99/100.
Köhler, Studienrat O., Berlin-Tempelhof, Hohenzollernkorso 34 g.
Kopff, Prof. Dr. A., Berlin-Dahlem, Altensteinstr. 40.
Korn, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 25.
*Koschmieder, Prof. Dr. L., Brünn C. S. R., Landwirtschaftsgasse 36.
Krafft, Prof. Dr. M., Marburg/Lahn, Savignystr. 7.
Kramer, Studiendirektor Dr., Alt-Döbern N.-L., Staatl. Aufbauschule.
v. Krbek, Dr. F., Astrophysikalisches Observatorium, Budapest I (Ungarn) Sválhegy, Koukoly-Tuege Miklós-úk.
Kreuter, Oberregierungsrat G., Berlin-Friedenau, Odenwaldstr. 26.
Kubota, Prof. T., Sendai (Japan). College of Science Imp. Univ.
v. Kuhl, Fräulein Dr. H., Studienassessorin, Berlin-Steglitz, Breitestr. 36.
Kullrich, Oberstudiendirektor i. R. Dr. E., Berlin-Tempelhof, Gäßnerweg 37.
Küpfmüller, Prof. K., Danzig-Langfuhr, Pommersche Chaussee 2.
Landau, Prof. Dr. E., Göttingen, Herzberger Landstr. 48.
Lasker, Dr. E., Berlin-Wilmersdorf, Aschaffenburgerstr. 6 a.
Lechner, Dr. G., Berlin-Eichkamp, Königsweg 114.
Lemke, Studienrat Dr. H., Berlin-Wilmersdorf, Wegenerstr. 10/11.
Levi-Civita, Prof. Dr. T., Rom 25 (Italien), Via Sardegna 50.
Levin, cand.-ing. V., Berlin-Neukölln, Thüringer Str. 1.
Lichtenstein, Prof. Dr. Dr.-Ing. L., Leipzig, Großgörschenstr. 3.
Lietzmann, Oberstudiendirektor Dr. W., Göttingen, Calsowstr. 18.
Löwner, Prof. Dr. K., Prag X, Palackého t. 68.
Loewy, Prof. Dr. A., Freiburg i. B., Reichsgrafenstr. 14.
Lorenz, Dr. P., Berlin-Reinickendorf-Ost, Seestr. 63.
Lorey, Prof. Dr. W., Oberstudiendirektor der öff. Handelslehranstalt u. Dozent am Inst. f. Versicherungswissenschaft d. Universität Leipzig, Fockestr. 7.
Loria, Prof. Dr. G., Genua (Italien), Piazza Manin 41.
Ludwig, Prof. Dr. W., Dresden-A., Kaitzerstr. 21.
Mann, Prof. Dr.-Ing. L., Breslau, Hobrechtufer 15.
Martens, Prof. Dr. F. F., Berlin NW. 87, Hansa-Ufer 4.
Matthée, Direktor der staatlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht, Berlin NW. 40, Invalidenstr. 57—62.
*Meder, Prof. A., Riga, Schulenstr. 19 W. 3.
Mehmke, Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. R., Degerloch-Stuttgart, Löwenstr. 102.
Meier, Zivilingenieur E., Taubenmühle bei Leichholz (Neumark).
Metzner, Ministerialrat Prof. Dr., Berlin-Dahlem, Königin Luisestr. 12.
Meyer, GRR. Prof. Dr. F., Königsberg (Pr.), Villenkolonie Maraunenhof, Hoverbeckstr. 13.
Meyer-Wülfing, Dr. phil., Berlin-Schöneberg, Nymphenburgerstr. 10.
Moeske, Studienrat P., Berlin-Pankow, Hartwigstr. 29.
Mühlendyck, Dr. O., Berlin-Wilmersdorf, Gieselerstr. 26, Port. 2.
Müller, Prof. Dr. Conrad H., Hannover, Brahmsstr. 4.
Müntz, Prof. Dr. Ch., Leningrad, Krassnyeh Zorj 73 qn. 47.
Munzer, Fräulein Studienrätin Edith, Berlin-Wilmersdorf, Weimarische Str. 27 III
Nachtsheim, Studienrat A., Berlin-Wilmersdorf, Mannheimerstr. 9 a.
Nakajima, S., Taihoku Imperial University, Taiwan (Japan).
Nakamura, K., Zürich 7, Gladbachstr. 65, Pension Jörg.
Neiß, Privatdozent Dr. F., Berlin-Charlottenburg 5, Friedrich Karlplatz 16.
Neugebauer, Patentingenieur H., Berlin-Lichterfelde-Ost, Luisenstr. 12.
v. Neumann, Privatdozent Dr. Joh., Berlin W. 10, Hohenzollernstr. 23/24.
Obrechkoff, Prof. Dr. N., ord. Prof. a. d. Univ. Sofia, S. Stefanosstr. 4.
Oseen, Prof. C. W., Upsala (Schweden).
*Ostrowski, Prof. Dr. A., Basel (Schweiz), Arlesheimer Str. 7 I.

Digitized by Google

Papperitz, GRR. Prof. Dr. E., Freiberg i. S., Leipzigerstr. 8.
Peters, Prof. Dr., Berlin-Lichterfelde, Weddigenweg 25.
*Peters, Studienrat J., Köln-Nippes, Niehler Kirchweg 147.
Pfeiffer, Prof. Dr. F., Stuttgart, Pflaumstr. 84.
Pfeiffer, Prof. Dr. G. W., Kiew (Ukraine), Leninstr. 59/5.
Piefke, Studienrat Walter, Adresse unbekannt.
Pollaczęk, Dr. F., Reichspostzentralamt, Berlin-Tempelhof, Schönebergerstr. 11—15.
Pollaczek, Frau Privatdozent Dr. H., Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.
Prandtl, Prof. Dr., Göttingen, Calsowstr. 15.
Prange, Prof. Dr. G., Hannover, Alleestr. 15.
Prüfer, Prof. Dr. H., Münster, Marientalstr. 36.
Rademacher, Prof. Dr. H., Breslau, Tiergartenstr. 123.
Rehbock, Dr. F., Bonn, Gneisenaustr. 10.
Reißner, Prof. Dr.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg, Grolmanstr. 4—5
Remak, Privatdozent Dr. R., Berlin-Lichterfelde-West, Manteuffelstr. 23 I.
Rembs, Studienrat Dr. E., Berlin-Friedenau, Begasstr. 5 I.
Respondek, Patentanwalt Dr. G., Berlin-Zehlendorf-West, Goethestr. 48.
Rey-Pastor, Prof. Dr. J., Seminaro matematico de la Universidat, Buenos Aires-Péru 294.
Ribeiro, Luiz F., Pernambuco (Brasilien) Rua Augusta 456.
Riesz, Prof. Dr. F., Szeged (Ungarn), Dugonics-tér 13.
Riesz, Prof. Dr. M., Lund (Schweden), Universität.
Rogowski, Prof. Dr.-Ing. W., Aachen, Techn. Hochschule.
Rohrbach, H., Berlin-Charlottenburg 4, Mommsenstr. 57.
Roschlau, Studienrat F., Berlin-Lichterfelde, Tulpenstr. 4.
Rosenthal, Prof. Dr. A., Heidelberg, Blumenthalstr. 7.
Roßbach, Dipl.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg 1, Cauerstr. 33 III.
Rothe, Frau Dr. H., Breslau 16, Sternstr. 128.
Rothe, Prof. Dr. R., Berlin-Lichterfelde, Esmarchstr. 27.
Rühle, Studienreferendar A., Adresse unbekannt.
Ruhm, Prof. G., Bonn, Blücherstr. 26.
Sadowski, Privatdozent Dr.-Ing. M., 703 Delaware St. S. E. Minneapolis, Minn. U.S.A.
Salkowski, Prof. Dr. E., Neubabelsberg bei Berlin, Odinstr. 6.
Schauffler, R., Regierungsrat, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter im auswärtigen Amt, Berlin-Wilmersdorf, Wiesbadener Str. 58 e.
Scheffers, GRR. Prof. Dr. Dr. h. c. G., Berlin-Dahlem, Willdenowstr. 40.
Schings, Studienrat A., Solingen (Rhld.), Schlickerweg 8.
Schlegel, Studienrat M., Berlin-Friedenau, Goßlerstr. 24.
Schleusner, Dipl.-Ing. A., Berlin-Charlottenburg, Suarezstr. 60 II, l.
Schmeidler, Prof. Dr. W., Breslau, Novastr. 15.
Schmidt, Prof. Dr. Erhard, Berlin NW., Altonaerstr. 30.
Schnee, Prof. Dr. W., Leipzig, Universität.
Schneider, Studienrat Dr. E., Berlin-Steglitz, Mariendorfer Str. 24.
Schneider, Reichstagsstenograph R., Berlin-Steglitz, Fritschstr. 7.
Schnirelmann, Prof. Dr. L., Moskau, Ostozenka, 2 Satschatjersky per, No. 2 Wohnung No. 29.
Schotte, Studienrat Dr. V., Berlin W. 57, Elsholzstr. 3.
Schottky, Geheimrat Prof. Dr. F., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 12 a.
Schrutka, Edler von Rechtenstamm, Prof. Dr. L., Wien, Onno Kloppstr. 8.
Schülke, Oberstudiendirektor i. R. A., Berlin NW 87, Tile Wardenbergstr. 18.
Schur, Prof. Dr. I., Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.
Seliwanov, Prof. Dr. D., Klánovice u Prahy (C. S. R.), Černého ulice, č 21.
Shoda, K., Tokio-Koishikawa, Haramachi 126 (Japan).
Singer, Dr. O., Berlin NW. 87, Levetzowstr. 13 a.
Slaby, Dipl.-Ing. R., Berlin-Charlottenburg, Sophienstr. 33.
Sommer, Prof. Dr. J., Danzig-Langfuhr, Johannistal 2.
Spielrein, Prof. Dipl.-Ing. J., Moskau, Taganka, Nischnaja Raditschewa 10.
Stein, Dr. Joh., Altona a. E., Lessingstr. 30 p.
Steinbacher, Studienrat Dr. F., Berlin-Friedrichshagen, Waldowstr. 19.

Digitized by Google

Strelitz, Fräulein P., Berlin-Lichterfelde, Steglitzerstr. 50.
Süß, Prof. Dr. W., Greifswald, Karlsplatz 3.
Szász, Prof. Dr. O., Frankfurt a./M., Vom Rathstr. 21.
Szegö, Prof. Dr. G., Königsberg (Pr.), Cäcilienallee 9.
Tauber, Prof. Dr. A., Wien IV, Karlsgasse 18.
Thürmel, Oberingenieur Direktor Dr. E., Siemens u. Halske, A.-G., Wernerwerk, Berlin-Siemensstadt.
Timerding, Prof. Dr. H. E., Braunschweig, Kasernenstr. 23.
Timpe, Prof. Dr. A., Berlin-Schlachtensee, Dianastr. 21.
*Tietze, Prof. Dr. H., München, Universität.
Toeplitz, Prof. Dr. O., Bonn, Wittelsbacherring 1.
Trefftz, Prof. Dr. E., Dresden, Nürnberger Str. 31 I.
Tropfke, Oberstudiendirektor GStR. Dr. J., Berlin NW. 87, Zwinglistr. 2.
Tschakaloff, Prof. L., Sofia (Bulgarien), Boulevard Skobeleff 13.
Umlauf, Prof. Dr. K., Bergedorf, Bismarckstr. 33.
Unger, Dr. W., Berlin W., Friedrich Wilhelmstr. 26.
*Volterra, Prof. Dr. Vito, Senatore del Regno, Rom (Italien), Via in Lucina 17.
Wagner, Präsident a. D. Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. K. W., Berlin NW 87, Franklinstr. 1.
Walther, Prof. Dr. A., Darmstadt, Mathem. Institut der Techn. Hochschule.
Wehage, Fräulein Dr.-Ing. Dora, Berlin-Friedenau, Wagnerplatz 6.
Weinstein, Privatdozent Dr. A., Breslau, Mathematisches Seminar der Universität.
Weiß, Privatdozent Dr. E. A., Bonn a. Rh., Endenicher Allee 20.
Weiß, Studienrat H., Berlin-Lichterfelde, Rankestr. 70.
Wenk, Studienrat W., Berlin N. 58, Schönhauser Allee 60.
Weyl, Prof. Dr. H., Göttingen, Merkelstr. 3.
Willers, Prof. Dr. Fr., Freiburg (Sa.), Goethestr. 2.
Winkelmann, Prof. Dr. M., Jena, Hügelstr. 4.
Witt, Prof. Dr. G., Berlin NW. 21, Crefelderstr. 18.
Wolff, RR. Dr. Hans, Neubabelsberg, Luisenstr. 10.
Wolff, Dr. Th., Schriftsteller, Berlin-Friedenau, Kaiser-Allee 79.
Zacharias, Studienrat Dr. M., Berlin NW. 52, Melanchthonstr. 27.
Zastrow, K., Berlin-Tempelhof, Kaiser-Wilhelmstr. 61 a III.
Zeitz, Bankdirektor H., Berlin-Steglitz, Kantstr. 5.
Zühlke, Oberschulrat Prof. Dr. P., Cassel-Kirchditmold, Geröderweg 25.

Digitized by Google

B. Korporative Mitglieder.

Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft, Direktion, Berlin NW. 87. Huttenstr. 12—16.
Felten & Guilleaume Carlswerk A.-G., Köln-Mülheim.
Gesellschaft für drahtlose Telegraphie (Telefunken), Berlin SW. 11, Hallesches Ufer 10/12.
Siemens & Halske A.-G., Wernerwerk, Berlin-Siemensstadt.
Siemens-Schuckertwerke A.-G. Berlin-Siemensstadt.
Julius Springer, Verlagsbuchhandlung, Berlin W. 9, Linkstr. 23/24.
Carl Zeiss, Jena.
Elektrotechnischer Verein, E. V., Berlin-Charlottenburg 4, Bismarckstr. 33.
Mathematisches Seminar der Universität Berlin.
Institut für angewandte Mathematik an der Techn. Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg.
Institut für Technische Hydro- und Aerodynamik, sowie Strömungsmaschinen, Berlin-Charlottenburg, Techn. Hochschule EB 205.
Mathematisches Seminar der Universität Bonn.
Mathematisches Seminar der Universität Breslau, Breslau 1.
Mathematisches Seminar am Friedrichs-Polytechnikum, Cöthen (Anhalt).
Mathematisches Institut der Universität Göttingen.
Mathematisches Institut der Universität Jena.
Mathematisches Institut der Universität Leipzig, Talstr. 35.
Mathematisches Seminar der Universität Münster.
Mathematisches Seminar der Techn. Hochschule Dresden.
Mathematisches Seminar der Universität Marburg, Marburg/Lahn.
Bayerische Staatsbibliothek, München, Ludwigstr. 23.
Hauptbücherei der Technischen Hochschule, Stuttgart.
Bibliothek der Techn. Hochschule zu Berlin, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstr. 171.
Bibliothek der Sächsischen Technischen Hochschule, Dresden-A. 24, Bismarckplatz 18 II.
Bibliothek der Techn. Hochschule Fridericiana, Karlsruhe.
Universitätsbibliothek Tübingen, Tübingen.
Hochschulbibliothek Darmstadt.
Staats- und Universitätsbibliothek zu Hamburg, Hamburg 1, Speersort.
Universitätsbibliothek in München, München, Ludwigstr. 17 II.
Universitätsbibliothek in Basel.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXXI. JAHRGANG

1932

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

7) Alle Zuschriften, welche den Inhalt der Sitzungsberichte betreffen, sind zu richten an den derzeitigen Schriftleiter, Herrn **Prof. Dr. Ernst Jacobsthal, Berlin-Zehlendorf, Am Fischtal 2a.**

Mitteilungen:

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten entweder an den Schriftführer oder an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Oberinspektor M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 12a).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse und nicht an die Adresse des Schriftführers zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

EINUNDDREISSIGSTER JAHRGANG

1932

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Brelot, M., Über die Singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus . . .	46—54
Haenzel, G., Die Gerade-Kugel-Abbildung der linearen Strahlenkongruenz	12—16
— Euklidische Geometrie, nichteuklidische Geometrie und Raum — Zeitstruktur im Systeme Spinozas	55—67
Hamel, G., Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals dritter Gattung für große Werte des Moduls	17—22
Jonas, H., Über die Verwendung eines Spiegelungsprinzips zur Erzeugung der Guichardschen Transformation der auf Mittelpunktsflächen zweiten Grades abwickelbaren Flächen	23—42
Scheffers, G., Zum Nachweis der Schiebungsflächen	9—11
Zarankiewicz, K., Über eine Eigenschaft des Konvergenzkontinuums .	43—45
Zeitz, H., Neue Beweise einer elementaren Abschätzung der n-ten Primzahl	4— 8
277. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 28. Oktober 1931	1
278. „ am 25. November 1931	1
279. „ „ 16. Dezember „	1
280. „ „ 27. Januar 1932	2
281. „ „ 24. Februar „	2
282. „ „ 22. März „	2
283. „ „ 27. April „	2
284. „ „ 25. Mai „	2
285. „ „ 29. Juni „	3

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

277. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 28. Oktober 1931

Vorsitzender: Herr Fuchs, während der Wahl des 1. Vorsitzenden Herr E. Jacobsthal. Anwesend: 36 Mitglieder und Gäste.

A) Geschäftlicher Teil:

1. Nach dem Bericht des Kassenwartes und der Kassenprüfer wird dem Kassenwart Entlastung erteilt.

2. Neuwahl des Vorstandes und der Kassenprüfer. Nachdem Herr Fuchs durch Zettelwahl wiederum zum ersten Vorsitzenden gewählt ist und die übrigen Herren des Vorstandes durch Zuruf wiedergewählt worden sind, setzt sich der Vorstand folgendermaßen zusammen: R. Fuchs (1. Vorsitzender), E. Jacobsthal (2. Vorsitzender und Schriftführer), P. B. Fischer (Kassenwart). — Kassenprüfer werden wieder die Herren Singer und Zacharias.

3. Neuwahl zweier Mitglieder der Redaktionskommission. An die Stelle der ausscheidenden Herren Landau und Rothe treten die Herren Hamel und Toeplitz.

B) Wissenschaftlicher Teil:

Herr Dubislav: Bolzano als Grundlagenforscher und Vorläufer der exakten Logik.

278. Sitzung am 25. November 1931.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 58 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Scheffers: Die Mercatorsche Weltkarte als Gegenstand des Unterrichts.

279. Sitzung am 16. Dezember 1931.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Rembs: Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung.

Herr Zeitz: Neue Beweise einer elementaren Abschätzung der n-ten Primzahl.

Digitized by Google

280. Sitzung am 27. Januar 1932.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 26 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Keller: Über kompakte konvexe Mengen im Hilbertschen Raum.

Herr Apt: Über die Konstruktion von beliebigen reellen Dreiecken aus nur zwei Stücken.

281. Sitzung am 24. Februar 1932.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 34 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Scheffers: Zum Nachweis der Schiebungsflächen.

Herr Mühlendyck: Über die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden.

282. Sitzung am 22. März 1932.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 15 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Haenzel: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz und die Gerade-Kugel-Transformation.

Herr Hamel: Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals dritter Gattung für große Werte des Moduls.

283. Sitzung am 27. April 1932.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 61 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Feigl: Bericht über das Wesen und die Grundideen der modernen Topologie.

284. Sitzung am 25. Mai 1932.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 21 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Jonas: Über die Verwendung eines Spiegelungsprinzips zur Erzeugung der Guichardschen Transformation der auf Mittelpunktsflächen zweiten Grades abwickelbaren Flächen.

Herr Lorenz: Über Näherungsparabeln hohen Grades.

Die Redaktionskommission legt eine Note des Herrn K. Zarankiewicz vor: Über eine Eigenschaft des Konvergenzkontinuums.

Digitized by Google

285. Sitzung am 29. Juni 1932.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Zarankiewicz: Über die Zerschneidnng der zusammenhängenden Mengen.

Herr Brelot: Über die Singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus.

Die Redaktionskommission legt eine Note des Herrn G. Haenzel vor: Euklidische Geometrie — Nichteuklidische Geometrie im System des Benedictus de Spinoza.

Digitized by Google

Neue Beweise einer elementaren Abschätzung der n-ten Primzahl[1]).

Von H. Zeitz in Berlin.

Bezeichnet p_n die n-te Primzahl, und setzt man $P_n = p_1 p_2 \dots p_n$, so kann man mit Hilfe des Tschebyschef'schen Satzes leicht zeigen, daß für $n \geqq 4$

$$p_{n+1} < \sqrt{P_n} \tag{1}$$

ist. Herr E. Landau[2]) bewies die Ungleichung ohne Benützung dieses Satzes. Herr H. Bonse[3]) gab einen noch elementareren Beweis und zeigte zugleich, daß die schärfere Ungleichung

$$p_{n+1} < \sqrt[r]{P_n} \tag{2}$$

für $r = 3$ und 4 für alle hinreichend großen n gilt. Daß diese Methode sich auch für ein beliebiges r anwenden läßt, zeigte Herr Landau[4]), nachdem vorher schon Herr R. Remak[5]) auf anderem, ebenfalls elementarem Wege die Ungleichung (2) für ein beliebiges r und alle hinreichend großen n bewiesen hatte.

Die Ungleichungen (1) und (2) sollen hier auf neuen elementaren Wegen bewiesen werden.

Satz I: Setzt man, für $n \geqq 4$

$$m = [\sqrt{P_n}],$$

so ist mindestens eine der vier Zahlen

$$m-1, \quad m-2, \quad P_n-(m-1)^2 = d_1, \quad P_n-(m-2)^2 = d_2$$

---

1) Vorgetragen in der 279. Sitzung am 16. Dezember 1931.

2) Über einen zahlentheoretischen Satz. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 1 (1901) S. 138—142.

3) Über eine bekannte Eigenschaft der Zahl 30 und ihre Verallgemeinerung. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 12 (1907) S. 292—295. Vgl. hierzu auch H. Rademacher und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren. Berlin, Springer (1930) S. 151—157.

4) Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig, Teubner (1909), Bd. I S. 229—234.

5) Elementare Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft der Zahl 30. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 15 (1909) S. 186—193.

Digitized by Google

durch wenigstens eine Primzahl q

$$p_n < q < \sqrt{P_n}$$

teilbar.

Beweis: Ist $m-1$ oder $m-2$ durch q teilbar, so ist Satz I bewiesen. Man nehme also an, daß $m-1$ und $m-2$ nur durch Primzahlen $p \leqq p_n$ teilbar sind. Das Produkt dieser verschiedenen Primfaktoren von $m-1$ bezw. $m-2$ sei π_1 bezw. π_2. Dann folgt aus

$$d_1 = P_n - (m-1)^2$$
$$d_2 = P_n - (m-2)^2$$

daß d_1 durch π_1 und d_2 durch π_2 teilbar ist, daß aber $\frac{d_1}{\pi}$ und $\frac{d_2}{\pi_2}$ zu P_n teilerfremd sind.

Wegen $m^2+1 \leqq P_n \leqq m^2+2m$ ist

$$2m \leqq d_1 \leqq 4m-1$$
$$4m-3 \leqq d_2 \leqq 6m-4.$$

Daraus folgt für $n \geqq 4$, d. h. für $m \geqq 14$,

$$1 < \frac{d_1}{\pi_1} \leqq \frac{4m-1}{\pi_1}$$
$$1 < \frac{d_2}{\pi_2} \leqq \frac{6m-4}{\pi_2},$$

und da $\frac{d_1}{\pi_1}$ bezw. $\frac{d_2}{\pi_2}$ zu P_n teilerfremd waren, muß $\frac{d_1}{\pi_1}$ durch mindestens eine Primzahl $q_1 > p_n$ und analog $\frac{d_2}{\pi_2}$ durch mindestens eine Primzahl $q_2 > p_n$ teilbar sein.

Ist nun $\pi_1 > 3$, bezw. $\pi_2 > 5$, so ist Satz I bewiesen, da dann

$$q_1 \leqq \frac{d_1}{\pi_1} < m < \sqrt{P_n}$$

bezw.

$$q_2 \leqq \frac{d_2}{\pi_2} < m < \sqrt{P_n}$$

sein würde.

Es ist aber unmöglich, daß gleichzeitig $\pi_1 \leqq 3$ und $\pi_2 \leqq 5$ sein können, denn alsdann könnte π_1 nur 2 oder 3, π_2 nur 2, 3 oder 5 sein. Die gleichen Primzahlen — und nach der Voraussetzung nur diese — würden aber auch $m-1$ bezw. $m-2$ teilen.

Digitized by Google

Da nun $m-1$ und $m-2$ teilerfremde Zahlen sind, von denen die eine gerade, die andere ungerade sein muß, würde die Gleichung

$$(m-1)-1 = (m-2)$$

für einen der allein in Betracht kommenden drei Fälle

$$1)\quad 2^x - 1 = 3^y$$
$$2)\quad 2^x - 1 = 5^z$$
$$3)\quad 3^r - 1 = 2^s$$

eine Lösung mit ganzzahligen Exponenten besitzen müssen, die, wegen $m \geqq 14$, der Bedingung

$$(m-1) = 2^x \geqq 13, \quad \text{bezw. } (m-1) = 3^r \geqq 13$$

genügt. Daß dies nicht möglich ist, wird nachstehend bewiesen.

Fall 1) $2^x - 1 = 3^y$.

Ist y gerade, so ist $3^y + 1 \equiv 2 \pmod 8$.

Einzige Lösung $2^1 - 1 = 3^0$.

Für ein ungerades y ist $3^y + 1 \equiv 4 \pmod 8$.

Einzige Lösung $2^2 - 1 = 3^1$.

Fall 2) $2^x - 1 = 5^z$.

Ist z gerade, so ist $5^z + 1 \equiv 2 \pmod 8$.

Einzige Lösung $2^1 - 1 = 5^0$.

Bei ungeradem z ist $5^z + 1$ stets durch 6 teilbar, kann also nicht 2^x sein.

Fall 3) $3^r - 1 = 2^s$.

Es sei r gerade, also $r = 2t$. Dann ist

$$3^r - 1 = 3^{2t} - 1 = (3^t + 1)(3^t - 1) = 2^s.$$

Da beide Faktoren von $3^{2t} - 1$ Potenzen von 2 sein müssen, und ihre Differenz 2 beträgt, kann t nur 1, r nur 2 sein.

Einzige Lösung $3^2 - 1 = 2^3$.

Ist r ungerade, so ist $3^r - 1 \equiv 2 \pmod 8$.

Einzige Lösung $3^1 - 1 = 2^1$.

Damit ist Satz I bewiesen.

Satz II: Für jedes $r \geqq 1$ und $n \geqq r2^r + r$ ist

$$p_{n+1} < \sqrt[r]{P_n}.$$

Es wird zunächst bewiesen, daß für $n \geqq 1$

$$p_{n+1} < 2^{n+1} \tag{3}$$

ist.

Digitized by Google

Wäre $p_{n+1} > 2^{n+1}$, so würde die Anzahl A der positiven quadratfreien Zahlen, die $< 2^{n+1}$ sind,

$$A \leqq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

sein. Ferner ist die Anzahl B der nicht quadratfreien Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, 4 \ldots 2^{n+1}$

$$B \leqq \frac{1}{p_1^2} 2^{n+1} + \left[\frac{1}{p_2^2} 2^{n+1}\right] \cdots + \left[\frac{1}{p_n^2} 2^{n+1}\right] \leqq \left(\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} \cdots + \frac{1}{p_n^2}\right) 2^{n+1}.$$

Nun ist aber für jedes n

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} \cdots + \frac{1}{p_n^2} < \frac{1}{2}.$$

Denn es ist sogar, wie man leicht durch direkte Berechnung findet,

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} \cdots + \frac{1}{31^2} + \sum_{\nu=4}^{\infty} 2^\nu \frac{1}{(2^{\nu+1})^2}$$
$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{32} < \frac{1}{2}.$$

Folglich ist

$$B < \frac{1}{2} 2^{n+1} = 2^n,$$

und es würde also, wenn $p_{n+1} > 2^{n+1}$ wäre, die Anzahl der Zahlen

$$A + B < 2^{n+1}$$

sein. Das ist nicht möglich. Folglich muß $p_{n+1} < 2^{n+1}$ sein.

Für $n \geqq r 2^r + r$ ist

(4) $$P_n > 2^{(n+1)r}.$$

Beweis: Es sei P_{2^r} das Produkt der ersten 2^r-Primzahlen, Q_{n-2^r} das Produkt der darauf folgenden $n - 2^r$-Primzahlen. Dann ist also

$$P_n = P_{2^r} Q_{n-2^r}.$$

Da, abgesehen von der 2, jede Primzahl > 2 ist, ist

(5) $$P_{2^r} > 2^{2^r}.$$

Q_{n-2^r} stellt das Produkt von $n - 2^r$-Faktoren dar, von denen jeder $> 2^{r+1}$ ist, da bereits der kleinste dieser Faktoren, die Primzahl $p_{2^r+1} > 2^{r+1}$ ist. Es ist also

(6) $$Q_{n-2^r} > 2^{(r+1)(n-2^r)}$$

Digitized by Google

und demnach

$$P_n = P_{2^r} Q_{n-2^r} > (2^{2^r})(2^{(r+1)(n-2^r)}) = 2^{2^r+(r+1)(n-2^r)} = 2^{(n+1)r+n-(r2^r+r)}.$$

Da nun $n \geqq r2^r + r$ ist, so ist

$$P_n > 2^{(n+1)r} \tag{7}$$

und

$$\sqrt[r]{P_n} > 2^{n+1}. \tag{8}$$

Dann ist aber, da nach (3) $p_{n+1} < 2^{n+1}$ ist, für $n \geqq r2^r + r$

$$p_{n+1} < \sqrt[r]{P_n},$$

womit der Satz II bewiesen ist.

Im übrigen läßt sich statt der Schranke $n \geqq r2^r + r$ leicht eine bessere angeben.

Digitized by Google

Zum Nachweis der Schiebungsflächen [1]).

Von Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

Man pflegt die Flächen durch Kurvennetze zu erzeugen. Wenn es sich um Flächen handelt, die durch Kurvennetze von besonderer Art gekennzeichnet sind, kann es sein, daß sich die Aufgabe, diese Flächen zu bestimmen, nicht vollkommen deckt mit der Aufgabe, die Kurvennetze zu bestimmen. Dies soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden, durch die Beantwortung einer Frage, die in der Flächentheorie nur flüchtig, wenn überhaupt, gestreift zu werden pflegt.

Wird eine starre Kurve ohne Änderung ihrer Stellung irgendwie bewegt, so beschreibt sie eine Schiebungsfläche. Weil die Bahnen ihrer Punkte ebenfalls lauter kongruente und gleichgestellte Kurven sind, läßt sich jede Schiebungsfläche als solche auf zwei Arten erzeugen. Man kann nun fragen, welche Flächen überhaupt zwei Scharen von kongruenten Kurven haben. Diese Frage wird sich wohl nur schwer in voller Allgemeinheit beantworten lassen; sie soll hier nur unter derjenigen Einschränkung erörtert werden, die insbesondere bei den Schiebungsflächen gilt: Homologe Punkte aller Kurven der einen Schar sollen eine Kurve der andern Schar ausmachen. Anders gesagt, wenn die Fläche durch Bewegung einer Kurve der einen Schar entsteht, sollen die Bahnkurven die Kurven der andern Schar sein.

Daß sich nur die Schiebungsflächen ergeben, könnte man geneigt sein, so zu folgern: In den Elementarvierecken, die von unendlich benachbarten Kurven des Netzes gebildet werden, sind in diesem Falle die Gegenseiten immer durchaus gleichlang, d. h. sie unterscheiden sich auch nicht um unendlichkleine Größen von höherer Ordnung. Daraus schließt man auf vollkommene unendlichkleine Parallelogramme, also darauf, daß alle Punkte einer erzeugenden Kurve Schritt für Schritt gleichlange parallele Wege zurücklegen, so daß eine Schiebungsfläche hervorgeht. Der Fehler dieser Schlüsse besteht darin, daß sich die Richtungen der Gegen-

1) Vorgetragen in der 281. Sitzung am 24. Februar 1932.

Digitized by Google

seiten der Elementarvierecke unendlichwenig voneinander unterscheiden können. In der Tat kommt man zu einem etwas andern Ergebnisse, wenn man sich endlicher Größen bedient:

Kurven der einen Art seien $k_0, k_1, k_2, \ldots$ Zu Punkten $A_0, B_0, C_0, \ldots$ von k_0 sind Punkte $A_1, B_1, C_1, \ldots$ von k_1 homolog. Nach Voraussetzung gehören dann A_0 und A_1 einer Kurve der andern Schar an, ebenso B_0 und B_1, dann C_0 und C_1 usw. und zwar so, daß die Strecken A_0A_1, B_0B_1, $C_0C_1, \ldots$ gleichlang sind. Nun muß sich bekanntlich die Kurve k_0 in die kongruente Kurve k_1 entweder durch eine Schraubung oder durch eine Drehung oder durch eine Schiebung überführen lassen. Von der Schiebung dürfen wir absehen, da sie zu den uns schon bekannten Schiebungsflächen führt. Wenn aber eine Schraubung oder Drehung vorliegt, vermöge deren gewisse Punkte $A_0, B_0, C_0, \ldots$ in Punkte $A_1, B_1, C_1, \ldots$ derart übergehen, daß die Strecken A_0A_1, B_0B_1, $C_0C_1, \ldots$ gleichlang sind, müssen $A_0, B_0, C_0, \ldots$ von der Schraubungs- oder Drehungsachse denselben Abstand haben. Mithin müssen sich $A_0, B_0, C_0, \ldots$ auf einem Rotationszylinder um diese Achse befinden. Bei der Schraubung oder Drehung verlassen sie diesen Zylinder nicht, d. h. auch $A_1, B_1, C_1, \ldots$ müssen sich auf ihm befinden. Daher verlaufen k_0 und k_1 auf einem gemeinsamen Rotationszylinder. Ebenso ist für das Paar k_0, k_2 zu schließen, dann auch für das Paar k_0, k_3 usw. Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder sind es lauter verschiedene Rotationszylinder, oder sie fallen in einen zusammen. Im ersten Falle muß k_0 als eine allen diesen Zylindern angehörende Kurve eine Gerade sein. Dann sind alle Kurven $k_0, k_1, k_2, \ldots$ parallele Geraden, so daß eine allgemeine Zylinderfläche hervorgeht und die zweite Kurvenschar aus lauter kongruenten und gleichgestellten Kurven auf dieser Fläche besteht. Das ist ein wohlbekannter Sonderfall der Schiebungsflächen. Wenn dagegen jene Rotationszylinder in einen einzigen zusammenfallen, braucht k_0 keine Gerade zu sein; die gesuchte Fläche ist dann dieser Rotationszylinder. Jetzt aber darf man, obwohl auch dieser Zylinder zu den Schiebungsflächen gehört, doch nicht ohne weiteres sagen, daß man wieder auf den bekannten Sonderfall von Schiebungsflächen zurückgekommen wäre. Man ziehe nämlich auf einem Rotationszylinder durch einen Punkt zwei beliebige Kurven. Dann übe man diejenigen Schraubungen (oder Drehungen) um die Zylinderachse aus, vermöge deren der gewählte Punkt eine der beiden Kurven beschreibt. Dadurch wird die andere Kurve in lauter kongruente, aber nicht gleichgestellte Kurven übergeführt, und so gehen alle Kurven des Netzes hervor.

Digitized by Google

Wenn also ein Kurvennetz aus zwei Scharen von kongruenten Kurven derart bestehen soll, daß immer homologe Punkte der Kurven einer Schar auf einer Kurve der andern Schar liegen, braucht das Netz keineswegs aus Scharen von gleichgestellten Kurven zu bestehen. Als zugehörige Flächen ergeben sich allerdings trotzdem nur die Schiebungsflächen.

Digitized by Google

Die Gerade-Kugel-Abbildung der linearen Strahlenkongruenz [1]).

Von Gerhard Haenzel in Berlin.

1. Werden die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden q, r der gegebenen linearen Strahlenkongruenz C_r^q als ein Paar Gegenkanten des Koordinatentetraeders angesehen, etwa q als die Kante $x_1 = x_2 = 0$ und r als die Kante $x_3 = x_4 = 0$, so stellt sich die lineare Kongruenz C_r^q bei Benutzung homogener Linienkoordinaten p_{ik} durch $p_{12} = p_{34} = 0$ dar. Die den Linienkoordinaten aller Strahlen anhaftende Plückersche Fundamentalbeziehung ergibt für die Kongruenzstrahlen von C_r^q die Gleichung:

$$p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Nach Einführung der Transformation:

$$\varrho p_1 = p_{13} + p_{42}, \quad \varrho p_2 = -i(p_{13} - p_{42}), \quad \varrho p_3 = p_{14} + p_{23},$$
$$\varrho p_4 = p_{14} - p_{23}, \quad \varrho p_5 = p_{12} + p_{34}, \quad \varrho p_6 = -i(p_{12} - p_{34})$$

ist die lineare Kongruenz C_r^q durch $p_5 = p_6 = 0$ gekennzeichnet und die Fundamentalbeziehung nimmt für die Kongruenzstrahlen die Form an:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 = 0.$$

Deshalb ist bei Deutung von $\xi = \frac{p_1}{p_4}$, $\eta = \frac{p_2}{p_4}$, $\zeta = \frac{p_3}{p_4}$ als rechtwinklige kartesische Koordinaten die lineare Kongruenz auf die Einheitskugel abgebildet. Dabei geht jeder Kongruenzstrahl in einen Kugelpunkt, jede Regelschar zweiter Ordnung in einen Kugelkreis und jede in zwei Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung in zwei konjugiert imaginäre Strahlen der Kugel über. Andererseits führt die stereographische Projektion:

$$x = \frac{2\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{2\eta}{1-\zeta};$$

$$\xi = \frac{4x}{x^2+y^2+4}, \quad \eta = \frac{4y}{x^2+y^2+4}, \quad \zeta = \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4}$$

die Kugel in die Zahlenebene über. Insgesamt ist damit die lineare Kongruenz eineindeutig auf die Zahlenebene abgebildet

1) Vorgetragen in der 282. Sitzung am 22. März 1932.

Digitized by Google

und diese Abbildung[2]) drückt sich aus durch:

$$D)\begin{cases} x = -\dfrac{p_{13}+p_{42}}{p_{23}}, \quad y = \dfrac{i(p_{13}-p_{42})}{p_{23}}; \\ \varrho p_{13} = 2(x+iy), \quad \varrho p_{42} = 2(x-iy), \quad \varrho p_{14} = x^2+y^2, \quad \varrho p_{23} = -4, \end{cases}$$

so daß auch gilt:

$$z = x+iy = -\frac{2p_{13}}{p_{23}}, \quad \bar{z} = -\frac{2p_{42}}{p_{23}}, \quad z\bar{z} = -\frac{4p_{14}}{p_{23}}.$$

Eine aus Kongruenzstrahlen bestehende Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ ist bei der eingangs getroffenen Koordinatenwahl durch die Gleichungen bestimmt:

$$a_{13}p_{13}+a_{14}p_{14}+a_{42}p_{42}+a_{23}p_{23} = 0, \quad p_{12} = p_{34} = 0.$$

Ihre Trägerfläche R^2 ist einscharig in der Kongruenz enthalten und hat die Gleichung:

$$a_{13}x_1x_3+a_{14}x_1x_4+a_{42}x_4x_2-a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ entspricht in der Ebene der Kreis:

$$a_{14}(x^2+y^2)+2(a_{13}+a_{42})x+2i(a_{13}-a_{42})y-4a_{23} = 0,$$

dessen Gleichung bei reeller Darstellung auch geschrieben werden kann:

$$a_{14}z\bar{z}+2a_{13}z+2\bar{a}_{13}\bar{z}-4a_{23} = 0.$$

Die in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung hat als Bild den Punkt der Zahlenebene mit seinen beiden isotropen Geraden.

2. Bei der Abbildung der linearen Kongruenz auf die Ebene stellt jede ebene Kurve je eine einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelfläche dar. Die ∞^1 Berührungskreise der ebenen Kurve in einem Punkte P sind die Bilder der ∞^1 einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiter Ordnung, welche die zur Kurve gehörige Regelfläche längs des entsprechenden Kongruenzstrahles p berühren. Der Krümmungskreis der Kurve in P ist das Bild des längs p oskulierenden Hyperboloides der Regelfläche. Zwei einander in einem Punkte berührende Kurven der Bildebene gehen aus zweien einander längs eines Kongruenzstrahles berührenden Flächen hervor und umgekehrt.

3. Die zum Zwecke der stereographischen Projektion herangezogene Einheitskugel (Nr. 1) wird durch affine Dehnung in der Richtung der ξ-Achse in das Rotationsellipsoid

$$M^2 \qquad \xi^2+\eta^2+\frac{\zeta^2}{a^2} = 1$$

2) Derartige Abbildungen wurden eingehend untersucht und verwendet in der Abhandlung: H. Mohrmann, Über die Haupttangentenkurven auf den Netzflächen. Math. Annalen 73, S. 571—595.

Digitized by Google

verwandelt. Um seine beiden auf der ζ-Achse in den Abständen $\varepsilon = \pm\sqrt{a^2-1}$ gelegenen Brennpunkte als Mittelpunkte werden die Kugeln:

$$K_1 \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\varepsilon\zeta+(\varepsilon^2-r_1^2) = 0,$$
$$K_2 \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2+2\varepsilon\zeta+(\varepsilon^2-r_2^2) = 0$$

geschlagen, deren Radien r_1, r_2 den Bedingungen $r_2-r_1 = 2a$, $r_2 > r_1 > 0$ genügen. Die ∞^3 Kugeln, welche die Kugeln K_1 und K_2 gleichsinnig berühren, erfüllen die „Kugelkongruenz“ $[K_1 K_2]$ mit den „Leitkugeln“ K_1, K_2. Ihr ∞^2 Mittelpunkte liegen auf dem Rotationsellipsoid[3]) M^2, der „Mittelpunktsfläche“ der Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$.

Werden in der allgemeinen Kugelgleichung:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\alpha\xi-2\beta\eta-2\gamma\zeta+c = 0$$

in bekannter Weise $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, c$ als homogene Kugelkoordinaten benutzt, wo der Kugelradius ϱ der Gleichung:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\varrho^2-c = 0$$

genügt, so stellt sich die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ durch die beiden Gleichungen dar:

$$\varrho = \frac{4\varepsilon\gamma+(r_2^2-r_1^2)}{4a}, \qquad c = \frac{(\varrho-r_1)^2+(\varrho-r_2)^2}{2}-(\varepsilon^2+\varrho^2).$$

Ein gegebener Punkt auf der Mittelpunktsfläche M^2 der Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ ist je der Mittelpunkt einer Kongruenzkugel. Er geht durch affine Dehnung aus dem senkrecht unter ihm gelegenen Punkte der Einheitskugel hervor und somit durch anschließende stereographische Projektion aus einem Punkte der Zahlenebene (Nr. 1 u. 3). Demnach werden die Punkte der Ebene durch stereographische Projektion und affine Dehnung eineindeutig auf die Punkte der Mittelpunktsfläche M^2 und damit auf die Kugeln der Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ abgebildet. Hier folgt nun leicht:

„Die Abbildung der Ebene auf die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ führt eine gegebene ebene Kurve eineindeutig in eine einscharig in der Kugelkongruenz enthaltene Kugelhüllfläche über. Die Kreise der Ebene entsprechen den einscharig in der Kugelkongruenz enthaltenen Dupin-Zykliden. Die ∞^1 Berührungskreise einer ebenen Kurve in einem Punkte sind die Bilder der ∞^1 einscharig in der Kugelkongruenz enthaltenen Dupin-Zykliden, welche die zur Kurve gehörige Kugelhüll-

3) Jakob Steiner, Allgemeine Theorie über das Berühren u. Schneiden der Kreise u. Kugeln, aus dem Nachlaß herausgegeben von Fueter, Zürich u. Leipzig 1931, S. 232.

Digitized by Google

fläche längs einer Kreis-Krümmungslinie berühren. Zwei einander in einem Punkte berührende Kurven der Bildebene gehen aus zweien einander längs einer Kreis-Krümmungslinie berührenden Kugelhüllflächen hervor und umgekehrt".

4. Die Abbildung der Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ auf die xy-Ebene läßt sich nunmehr analytisch durch die folgenden Substitutionen zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten herstellen:

$$(II)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{4x}{x^2+y^2+4}, \quad \beta = \dfrac{4y}{x^2+y^2+4}, \quad \gamma = a\cdot\dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4}, \\ \varrho = \dfrac{\varepsilon(x^2+y^2-4)}{x^2+y^2+4} + \dfrac{r_1+r_2}{2}, \\ x = \dfrac{2\alpha}{1-\dfrac{\gamma}{\alpha}}, \quad y = \dfrac{2\beta}{1-\dfrac{\gamma}{\alpha}}. \end{cases}$$

5. Die geometrische Abbildung der linearen Kongruenz C_r^q auf die Ebene und die geometrische Abbildung der Ebene auf die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ schließen sich zur geometrischen „Geraden-Kugel-Abbildung der linearen Strahlenkongruenz C_r^q auf die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$" zusammen. Mit Rücksicht auf die in Nr. 1—3 abgeleiteten Sätze gilt:

„Durch die Gerade-Kugel-Abbildung der linearen Strahlenkongruenz C_r^q auf die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ geht jede einscharig in C_r^q enthaltene Regelfläche in eine einscharig in $[K_1 K_2]$ enthaltene Kugelhüllfläche über, zwei Regelflächen, die einander längs eines Kongruenzstrahles berühren, entsprechen zwei Kugelhüllflächen, die einander längs einer Kreis-Krümmungslinie berühren, insbesondere entsprechen die Regelflächen zweiter Ordnung den Dupin-Zykliden".

Eine allgemeine Regelfläche hat in jedem Punkte den durch diesen Punkt gehenden Regelstrahl s zur ersten Haupttangente; die zweiten Haupttangenten der Punkte von s fallen mit den Regelstrahlen des längs s oskulierenden Hyperboloides zusammen. Das oskulierende Hyperboloid einer einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelfläche längs eines Regelstrahles s geht aber in eine Dupin-Zyklide über, die mit der entsprechenden Kugelhüllfläche drei benachbarte Kongruenzkugeln von $[K_1 K_2]$ gemein hat. Den beiden Regelscharen des oskulierenden Hyperboloides entsprechen die beiden Hüllkugelscharen dieser Dupin-Zyklide. Die Berührungskreise dieser beiden Hüllkugelscharen mit ihrer Hüllfläche geben aber in jedem Punkte der letzteren die Hauptkrümmungsrichtungen an. Daraus folgt unmittelbar:

„Durch die Gerade-Kugel-Abbildung werden Haupttangentenkurven in Hauptkrümmungskurven verwandelt und umgekehrt".

Digitized by Google

6. Die Gleichungen (I) für die Abbildung der linearen Strahlenkongruenz C_r^q auf die Ebene und die Gleichungen (II) für die Abbildung der Ebene auf die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ ergeben zusammen die Darstellung der geometrischen Gerade-Kugel-Abbildung der linearen Strahlenkongruenz C_r^q auf die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ durch folgende Substitutionen:

$$\alpha = \frac{p_{13}+p_{42}}{p_{14}-p_{23}}, \quad \beta = \frac{p_{13}-p_{42}}{i(p_{14}-p_{23})}, \quad \gamma = \frac{a(p_{14}+p_{23})}{p_{14}-p_{23}},$$

$$\varrho = \frac{\varepsilon(p_{14}+p_{23})}{p_{14}-p_{23}} + \frac{r_1+r_2}{2}.$$

Wird als Mittelpunktsfläche der Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ nicht ein Rotationsellipsoid, sondern die Kugel von Radius 1 gewählt, so sind die Leitkugeln K_1, K_2 der Kugelkongruenz mit dieser Mittelpunktskugel konzentrisch und ihre Radien r_1, r_2 erfüllen die Bedingung: $r_2 - r_1 = 2$. Alle Kongruenzkugeln sind dann untereinander gleich und bedingt durch:

$$\varrho = \frac{r_1+r_2}{2}, \quad c = -r_1 . r_2 .$$

Alle einscharig in der Kugelkongruenz enthaltenen Dupin-Zykliden sind jetzt Rotationszykliden. Werden als homogene Koordinaten der Kugel $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ eingeführt durch:

$$\frac{m_1}{m_6} = \alpha, \quad \frac{m_2}{m_6} = \beta, \quad \frac{m_3}{m_6} = \gamma, \quad \frac{m_4}{m_6} = \varrho, \quad \frac{m_5}{m_6} = c,$$

wobei bekanntlich gilt:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 - m_5 m_6 = 0,$$

so stellt sich die Gerade-Kugel-Abbildung vereinfacht dar durch:

$$\begin{aligned}
\sigma m_1 &= p_{13}+p_{42} & \sigma' p_{13} &= m_1 + i m_2 \\
\sigma m_2 &= \frac{p_{13}-p_{42}}{i} & \sigma' p_{42} &= m_1 - i m_2 \\
\sigma m_3 &= p_{14}+p_{23} & \sigma' p_{14} &= m_3 + m_6 \\
\sigma m_4 &= \frac{r_1+r_2}{2}(p_{14}-p_{23}) & \sigma' p_{23} &= m_3 - m_6 \\
\sigma m_5 &= -r_1 r_2 (p_{14}-p_{23}) & p_{12} &= p_{34} = 0. \\
\sigma m_6 &= p_{14}-p_{23}
\end{aligned}$$

Anwendungen dieser Abbildungen auf die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, insbesondere ihre Verknüpfung mit der Polarentheorie der Kongruenz enthält meine im Jahresbericht der D. M. V. Band 42, S. 75—84 erschienene Abhandlung.

Digitized by Google

Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals dritter Gattung für große Werte des Moduls[1]).

Von Georg Hamel in Berlin.

Während es für die praktische Berechnung der vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung für Werte des Moduls, die nahe bei 1 liegen, gut konvergente Entwicklungen gibt (siehe z. B. bei Schwarz: Formeln und Lehrsätze, Nr. 40), nämlich

$$K \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = \mathfrak{K}' \operatorname{lognat}\left(\frac{4}{k'}\right) - 2\left[\frac{1}{1.2}\mathfrak{K}_1' + \frac{1}{3.4}\mathfrak{K}_2' + \frac{1}{5.6}\mathfrak{K}_3' + \cdots\right],$$

wo

$$k' = +\sqrt{1-k^2}, \quad \mathfrak{K}' = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k'^6 + \cdots$$

$$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{K}' - 1$$

$$\mathfrak{K}_2' = \mathfrak{K}' - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2$$

$$\mathfrak{K}_3' = \mathfrak{K}' - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k'^4 \text{ usw.},$$

scheinen entsprechende Entwicklungen für das elliptische Integral dritter Gattung

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}\, d\vartheta}{1+\lambda^2\sin^2\vartheta}$$

in der Literatur nicht zu existieren. Eine der Obigen entsprechende Entwicklung soll hier gegeben werden.

Wir setzen alle Größen als reell voraus, $k^2 \leqq 1$. Freilich gilt die Darstellung auch noch für einen großen Bereich komplexer k^2 und λ^2.

Wir nehmen, etwas abweichend von Legendre, die vorstehende Form des Integrals als Norm, sie hat den Vorteil, daß Π auch noch für $k^2 = 1$ existiert.

1) Vorgetragen in der 282. Sitzung am 22. März 1932.

Digitized by Google

Entwickelt man $\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}$ nach Potenzen von k^2, so konvergiert diese Reihe für $0 \leqq k^2 \leqq 1$. Man kann so eine Entwicklung bekommen, die zwar überall gültig ist, die für $k^2 = 1$ wie $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert, bei der man auch durch Verschärfungsmethoden eine Konvergenz wie $\sum \frac{1}{n^3}$ erreichen kann, die aber doch noch immer unbefriedigend ist. Wir werden ganz anders vorgehen.

§ 1.
Eine Differentialgleichung für Π und ihre Integration.

Differentiation von Π nach k^2 gibt

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\vartheta\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta}{(1+\lambda^2\sin^2\vartheta)(1-k^2\sin^2\vartheta)}.$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{-\frac{1}{2}\sin^2\vartheta}{(1+\lambda^2\sin^2\vartheta)(1-k^2\sin^2\vartheta)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(k^2+\lambda^2)}\left(\frac{1}{1+\lambda^2\sin^2\vartheta} - \frac{1}{1-k^2\sin^2\vartheta}\right).$$

Daher

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k^2} = \frac{1}{2(k^2+\lambda^2)}(\Pi - K).$$

Diese lineare Differentialgleichung erster Ordnung läßt sich ohne weiteres integrieren und ergibt

$$\Pi = -\sqrt{k^2+\lambda^2}\left(\int \frac{K\,dk^2}{2\sqrt{k^2+\lambda^2}^3} + C\right).$$

Ist k^2 klein, so wird man das Integral von $k^2 = 0$ an erstrecken, wodurch sich C wegen

$$\Pi_{k^2=0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{1+\lambda^2\sin^2\vartheta} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\lambda'} \text{ zu } C = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\lambda\lambda'}$$

bestimmt, womit sich die erste Formel

Digitized by Google

$$\Pi = \sqrt{k^2+\lambda^2}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\lambda\lambda'} - \frac{1}{2}\int_0^{k^2}\frac{K\,dk^2}{\sqrt{k^2+\lambda^2}^3}\right) \tag{1}$$

ergibt. Sie mag der Vollständigkeit halber hier stehen, dürfte aber nicht wesentlich mehr leisten als die direkte Entwicklung nach k^2. Wenn aber k^2 nahe bei 1 liegt, also $k'^2 = 1-k^2$ klein ist, wird man das Integral von $k^2 = 1$ oder $k'^2 = 0$ an erstrecken, und da

$$\Pi_{k^2=1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta\,d\vartheta}{1+\lambda^2\sin^2\vartheta} = \frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\lambda$$

ist, folgt die gesuchte Formel

$$\Pi = \sqrt{\lambda'^2-k'^2}\left(\frac{\operatorname{arctg}\lambda}{\lambda\lambda'} + \frac{1}{2}\int_0^{k'^2}\frac{K\,dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2-k'^2}^3}\right) \tag{2}$$

$(k'^2 = 1-k^2,\quad \lambda'^2 = 1+\lambda^2,\quad \text{daher}\quad \lambda^2+k^2 = \lambda'^2-k'^2).$

§ 2.
Die Reihenentwicklung.

In (2) werden wir die zu Anfang genannte Entwicklung von K einsetzen. Wir bekommen dann Integrale der Form

$$\int_0^{k'^2}\frac{k'^{2n}\,dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2-k'^2}^3} \quad \text{und} \quad \int_0^{k'^2}\frac{\log\text{nat}\,k'^2\,.\,k'^{2n}\,dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2-k'^2}^3},$$

die elementar ausführbar sind. Wir wollen die elementare Rechnung nicht ausführen. Da aber das Gesamtresultat doch wieder eine unendliche Reihe ist, so erscheint es einfacher, auch hier noch nach Potenzen von k'^2 zu entwickeln (resp. nach $\log\text{nat}\,k'^2\,.\,k'^{2n}$), was gestattet ist, da $\lambda'^2 = 1+\lambda^2 > 1$, $k'^2 < 1$ und oft sogar in den Anwendungen $\frac{k'^2}{\lambda'^2}$ als sehr klein angenommen werden kann. Rechnet man hingegen die vorstehenden Integrale elementar in geschlossener Form aus, so zeigt es sich, daß (beim ersten) das Integral die Form $\frac{1}{\sqrt{\lambda'^2-k'^2}}$ mal einer rationalen Funktion von

Digitized by Google

k'^2 und λ'^2 hat, vermindert um den Wert dieses Ausdruckes für $k'^2 = 0$, und daß infolge dieser Gestalt das Kleinwerden mit großem λ' nicht zum Ausdruck kommt.

Mit Hilfe von

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda'^2 - k'^2}^3} = \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{-\frac{3}{2}}{\nu} \frac{k'^{2\nu}}{\lambda'^{2\nu}}$$

$$= \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{3.5\ldots(2\nu+1)}{2.4\ldots 2\nu} \frac{k'^{2\nu}}{\lambda'^{2\nu}}$$

$$\left(\text{unter } \frac{3.5\ldots(2\nu+1)}{2.4\ldots 2\nu} \text{ für } \nu = 0 \text{ ist 1 verstanden}\right),$$

wird

$$\int_0^{k'^2} \frac{k'^{2n}\, dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2 - k'^2}^3} = \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{3.5\ldots(2\nu+1)}{2.4\ldots 2\nu} \cdot \frac{1}{n+\nu+1} \cdot \frac{k'^{2(n+\nu+1)}}{\lambda'^{2\nu}}$$

und daher wegen

$$\mathfrak{K}' = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{1.3\ldots 2\mu-1}{2.4\ldots 2\mu}\right)^2 k'^{2\mu} \quad \left(\text{wo der Koeffizient für } \mu = 0 \text{ auch 1 sei!}\right)$$

$$\int_0^{k'^2} \frac{\mathfrak{K}'\, dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2 - k'^2}^3}$$

$$(3) \quad = \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1.3\ldots(2\mu-1)}{2.4\ldots 2\mu}\right)^2 \cdot \frac{3.5\ldots 2\nu+1}{2.4\ldots 2\nu} \cdot \frac{1}{\mu+\nu+1} \cdot \frac{k'^{2(\mu+\nu+1)}}{\lambda'^{2\nu}}$$

$$= \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'^{2(n+1)}}{n+1} \cdot p_n\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right),$$

wo

$$(4) \quad p_n\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{3.5\ldots 2\nu+1}{2.4\ldots 2\nu} \cdot \left(\frac{1.3\ldots 2n-2\nu-1}{2.4\ldots 2n-2\nu}\right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda'^{2\nu}}$$

ein Polynom $n$ter Ordnung in $\frac{1}{\lambda'^2}$ ist.

Nennen wir das vorstehende Integral $\mathfrak{L}(k'^2)$ und beachten, daß es für $k'^2 = 0$ null wird, so bekommen wir weiter

Digitized by Google

$$\int_0^{k'^2} \frac{\log \text{nat}\, k'^2\, \mathfrak{R}' dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2 - k'^2}}$$

$$= \log \text{nat}\, k'^2 \,.\, \mathfrak{Q}(k'^2) - \int_0^{k'^2} \frac{\mathfrak{Q}(k'^2)\, dk'^2}{k'^2}$$

$$= \log \text{nat}\, k'^2\, \mathfrak{Q}(k'^2) - \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'^{2(n+1)}}{(n+1)^2} \cdot p_n\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'^{2(n+1)}}{n+1} \cdot p_n\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right)\left(\log \text{nat}\, k'^2 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Daher wird der Hauptbestandteil unseres Integrals

$$\int_0^{k'^2} \frac{\mathfrak{R}' \log \text{nat}\, \frac{4}{k'}\, dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2 - k'^2}^3}$$

(5)

$$= \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'^{2(n+1)} \cdot p_n\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right)}{n+1} \left[\log \text{nat}\, \frac{4}{k'} + \frac{1}{2(n+1)}\right].$$

Die anderen Bestandteile ergeben sich aus (3) und (4) leicht. Da $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ ... gleich $\mathfrak{R}'$ sind bis auf die fehlenden Anfangsglieder, nämlich

$$\mathfrak{R}_\sigma' = \sum_{\mu=\sigma}^{\infty} \left(\frac{1.3 \ldots 2\mu - 1}{2.4 \ldots 2\mu}\right)^2 . k'^{2\mu},$$

so wird

(6)

$$\int_0^{k'^2} \frac{\mathfrak{R}_\sigma' dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2 - k'^2}^3} = \frac{1}{\lambda'^3} \cdot \sum_{n=\sigma}^{\infty} \frac{k'^{2(n+1)}}{n+1} \cdot p_{n-\sigma,\sigma}\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right),$$

wo

(7)

$$p_{n-\sigma,\sigma} = \sum_{\nu=0}^{n-\sigma} \frac{3.5 \ldots 2\nu + 1}{2.4 \ldots 2\nu} \cdot \left(\frac{1.3 \ldots 2n - 2\nu - 1}{2.4 \ldots 2n - 2\nu}\right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda'^{2\nu}},$$

ein Polynom $(n-\sigma)$ten Grades in $\frac{1}{\lambda'^2}$ ist, das aus p_n durch Fortlassen der σ letzten Glieder entsteht.

Aus den Formeln (5), (6), (7) ergibt sich durch Zusammenfassung

Digitized by Google

$$\int_0^{k^2} \frac{K\,dk'^2}{\sqrt{\lambda'^2 - k'^2}^3}$$

(8)
$$= \frac{1}{\lambda'^3}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'^{2(n+1)}}{n+1}\, p_n\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right)\cdot\left[\log \text{nat}\,\frac{4}{k'} + \frac{1}{2(n+1)}\right]\right.$$
$$\left. - 2\cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{(2\sigma-1).2\sigma}\cdot \sum_{n=\sigma}^{\infty} \frac{k'^{2(n+1)}}{n+1}\, p_{n-\sigma,\sigma}\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right)\right\},$$

womit in Verbindung mit Formel (2) das gesteckte Ziel erreicht ist. Die Polynome p sind durch (4) und (7) erklärt.

Digitized by Google

Über die Verwendung eines Spiegelungsprinzips zur Erzeugung der Guichardschen Transformation der auf Mittelpunktsflächen zweiten Grades abwickelbaren Flächen [1])

Von H. Jonas.

1. *Einleitung.* — Bekanntlich ist die nach Guichard benannte Transformation G_k der verbogenen Flächen zweiten Grades das Ergebnis der Zusammensetzung zweier Bianchi-Transformationen B_k, B_k' mit derselben Konstanten k, aber von verschiedener Klasse [2]). Sie ist geometrisch ausgezeichnet durch das besondere Verhalten des *permanenten* konjugierten Systems, d. h. desjenigen, das bei der Abwicklung auf die F^2 wieder in ein solches übergeht. Die bei der Operation G_k einander zugeordneten permanenten konjugierten Netze der gegebenen und der transformierten Biegungsfläche sind nämlich gleichzeitig *harmonisch* (im Guichardschen Sinne) zu der von den Schnittlinien der Tangentialebenen gebildeten Strahlenkongruenz; das bedeutet: die Developpablen dieser Kongruenz entsprechen den beiden Netzen, deren gleichnamige Tangenten sich überdies in den Brennpunkten der Strahlen treffen. Analoge Verhältnisse gelten für die korrespondierenden Netze auf der Fläche zweiten Grades, die, als Ganzes betrachtet, durch den Prozeß in sich selber übergeführt wird. Diese letztere Tatsache ist der Ausgangspunkt für eine direkte Herleitung der Transformation G_k, die sich so als Spezialfall einer allgemeinen harmonischen Transformation für isometrische Flächenpaare darstellt [3]). Die Auflösung der auf diesem Wege gewonnenen Operation G_k in zwei Bianchi-Transformationen gestaltet sich nicht ganz einfach [4]). Man scheint sich bis jetzt damit begnügt zu haben, für das Kompositum $B_k B_k'$ die Eigenschaften der Guichardschen Transformation zu bestätigen [5]).

1) Vorgetragen in der 284. Sitzung am 25. Mai 1932.

2) Bianchi, Sulle trasformazioni di Guichard delle superficie applicabili sulle quadriche. Acc. Linc. Rend. (5) 20_1 (1911), S. 145.

3) S. dazu Eisenhart, Transformations of surfaces applicable to a quadric. Amer. Math. Soc. Trans. 20 (1919), S. 323.

4) Auf diesen Punkt gedenke ich bei anderer Gelegenheit einzugehen.

5) Vgl. dazu auch § XI der Abh. von Calapso, Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni. Annali di Mat. (3) 19 (1912), S. 61 und 129.

Digitized by Google

Wir werden nun zur Erzeugung der Operation G_k ein zunächst ganz allgemein gehaltenes Transformationsverfahren benutzen, das mannigfaltiger Anwendungen fähig ist[6]). Es bietet, abgesehen von den neuen geometrischen Eigentümlichkeiten der Transformation G_k, die dabei zutage treten, den beachtenswerten Vorteil, daß man den zugehörigen analytischen Apparat gleich in einer Form erhält, aus der sich zwanglos die Zerspaltung in zwei selbständige Operationen ergibt. Damit wird dann auch der Zugang zur Bianchi-Transformation B_k erschlossen. Auf einen weiteren Vorzug dieser Methode sei hingewiesen. Die Einführung der durch die charakteristische Konstante k innerhalb der konfokalen Schar definierten Hilfsfläche, wie man weiß, eine der wesentlichen Grundlagen der Bianchischen Theorie, erscheint in den nachfolgenden Entwicklungen nicht mehr, wie bei Bianchi selber, als ein für den besonderen Zweck erdachtes Prinzip, sondern knüpft sich erst an eine Integration, bei der k als Konstante auftritt.

Ich bemerke noch, daß die in Art. 3 für die Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids gegebene Darstellung sich bereits in einer voraufgegangenen Arbeit findet, in der ich im Anschluß an ein Problem allgemeinen Charakters ein anderes Beispiel behandelt habe, wo die Zerlegung eines komplizierteren Transformationsprozesses in Bianchi-Transformationen gelingt[7]).

2. *Das Spiegelungsprinzip.* — Wir betrachten ein im Raume bewegtes, von zwei Variablen α, β abhängiges rechtwinkliges Dreikant $\triangle(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$, das als gleichstimmig mit dem Dreikant der Koordinatenachsen x, y, z vorausgesetzt sei, und bezeichnen mit $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ die Koordinaten seines Scheitelpunkts M[8]). Es gelten dann Differentialrelationen von der Form:

$$(1)\qquad \begin{cases} X^{(1)}_\alpha = r X^{(2)} - q X^{(3)}, & X^{(1)}_\beta = r' X^{(2)} - q' X^{(3)}, \\ X^{(2)}_\alpha = p X^{(3)} - r X^{(1)}, & X^{(2)}_\beta = p' X^{(3)} - r' X^{(1)}, \\ X^{(3)}_\alpha = q X^{(1)} - p X^{(2)}, & X^{(3)}_\beta = q' X^{(1)} - p' X^{(2)}. \end{cases}$$

Die *Rotationen* p, q, r, p', q', r' genügen den bekannten Bedingungen:

$$(2)\qquad p_\beta - p'_\alpha = qr' - rq', \quad q_\beta - q'_\alpha = rp' - pr', \quad r_\beta - r'_\alpha = pq' - qp'.$$

6) Das Prinzip umfaßt insbesondere auch den Fall der Ribaucourschen Transformation einer auf ihre Krümmungslinien bezogenen Fläche.

7) Jonas, Die Ribaucoursche Transformation der sphärisch-elliptischen Geometrie als Transformationsprinzip im euklidischen Raume. Math. Ann. **107** (1932), S. 420.

8) Die neun Richtungskosinus sind $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$; $X^{(2)}, Y^{(2)}, Z^{(2)}$; $X^{(3)}, Y^{(3)}, Z^{(3)}$. — Auf die vektorielle Natur einer in x geschriebenen Formel wird im folgenden nicht besonders hingewiesen; die analogen Beziehungen in y und in z sind jedes-

Digitized by Google

Wir setzen:

$$(3)\quad x_\alpha^{(0)} = l X^{(1)} + m X^{(2)} + n X^{(3)}, \qquad x_\beta^{(0)} = l' X^{(1)} + m' X^{(2)} + n' X^{(3)}.$$

Die sechs Koeffizienten l, m, n, l', m', n', Projektionen der zur Fläche (M) tangentialen Vektoren $x_\alpha^{(0)}, \ldots$ und $x_\beta^{(0)}, \ldots$ auf die bewegten Achsen, nennen wir mit Darboux *Translationen*. Als Integrabilitätsbedingung für (3) erhält man:

$$(4)\quad \begin{cases} l_\beta - l'_\alpha = mr' - nq' - (m'r - n'q), \\ m_\beta - m'_\alpha = np' - lr' - (n'p - l'r), \\ n_\beta - n'_\alpha = lq' - mp' - (l'q - m'p). \end{cases}$$

Zur Transformation der durch (3) definierten Fläche (M) bedienen wir uns einer mit den Parametern α, β veränderlichen Ebene ε, deren Gleichung im bewegten System

$$(5)\quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 1$$

lauten möge. Die Größen λ, μ, ν, denen die Rolle der *transformierenden Funktionen* zufällt, sind also die reziproken Werte der (algebraischen) Achsenabschnitte. Wir spiegeln den Punkt M an der Ebene ε und erhalten M_1:

$$(6)\quad x_1^{(0)} = x^{(0)} + \frac{2}{N}(\lambda X^{(1)} + \mu X^{(2)} + \nu X^{(3)}),$$

wobei

$$(7)\quad N = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

ist, und damit die transformierte Fläche (M_1). Mit M_1 verbinden wir das gleichfalls durch Spiegelung aus $\triangle$ hervorgehende rechtwinklige Dreikant $\triangle_1(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)})$, wählen aber bei letzterem, damit es gleichstimmig ausfällt, den Richtungssinn der Achsen so, daß auf ε korrespondierende Achsen von $\triangle$ und $\triangle_1$ mit entgegengesetzten Enden zusammenstoßen. Es wird dann

$$x_1^{(0)} - \frac{1}{\lambda} X_1^{(1)} = x^{(0)} + \frac{1}{\lambda} X^{(1)} \text{ usw.},$$

und man findet leicht die (gleicherweise in Y und Z gültige) orthogonale Substitution mit der Determinante $+1$:

$$(8)\quad \begin{cases} X_1^{(1)} = \frac{1}{N}[(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2) X^{(1)} + 2\lambda\mu X^{(2)} + 2\lambda\nu X^{(3)}], \\ X_1^{(2)} = \frac{1}{N}[2\lambda\mu X^{(1)} + (\mu^2 - \lambda^2 - \nu^2) X^{(2)} + 2\mu\nu X^{(3)}], \\ X_1^{(3)} = \frac{1}{N}[2\lambda\nu X^{(1)} + 2\mu\nu X^{(2)} + (\nu^2 - \lambda^2 - \mu^2) X^{(3)}]. \end{cases}$$

mal hinzuzufügen. Partielle Differentiationen werden durch Buchstabenindizes angedeutet.

Digitized by Google

Um nun zunächst die Rotationen $p_1, \ldots$ von $\triangle_1$ zu berechnen, entnehmen wir $p_1 = \sum (X_1^{(2)})_\alpha X_1^{(3)}$ aus dem für den Index 1 geschriebenen System (2). Mit Benutzung von (8) ergibt sich:

$$p_1 = -p + \frac{2\lambda}{N}(p\lambda + q\mu + r\nu) + \frac{2}{N}(\mu_\alpha \nu - \nu_\alpha \mu).$$

Wir führen zur Abkürzung die Größen

(9) $$S = p\lambda + q\mu + r\nu, \quad S' = p'\lambda + q'\mu + r'\nu$$

ein und haben dann die beiden folgenden Formelgruppen:

(10)
$$\begin{cases} p_1 = -p + \frac{2\lambda}{N} S + \frac{2}{N}(\mu_\alpha \nu - \nu_\alpha \mu), \\ q_1 = -q + \frac{2\mu}{N} S + \frac{2}{N}(\nu_\alpha \lambda - \lambda_\alpha \nu), \\ r_1 = -r + \frac{2\nu}{N} S + \frac{2}{N}(\lambda_\alpha \mu - \mu_\alpha \lambda), \\ p_1' = -p' + \frac{2\lambda}{N} S' + \frac{2}{N}(\mu_\beta \nu - \nu_\beta \mu), \\ q_1' = -q' + \frac{2\mu}{N} S' + \frac{2}{N}(\nu_\beta \lambda - \lambda_\beta \nu), \\ r_1' = -r' + \frac{2\nu}{N} S' + \frac{2}{N}(\lambda_\beta \mu - \mu_\beta \lambda), \end{cases}$$

Schreibt man analog zu (3):

(11) $$(x_1^{(0)})_\alpha = l_1 X_1^{(1)} + m_1 X_1^{(2)} + n_1 X_1^{(3)}, \quad (x_1^{(0)})_\beta = l_1' X_1^{(1)} + m_1' X_1^{(2)} + n_1' X_1^{(3)},$$

so findet man, indem man (6) differentiiert, die Werte der transformierten Translationen:

(12a) $$l_1 = -l + \frac{2\lambda}{N} T - \frac{2}{N}(\lambda_\alpha + q\nu - r\mu) \text{ usw.},$$

(12b) $$l_1' = -l' + \frac{2\lambda}{N} T' - \frac{2}{N}(\lambda_\beta + q'\nu - r'\mu) \text{ usw.}$$

(mit leicht zu übersehender zyklischer Vertauschung), wobei

(13) $$T = l\lambda + m\mu + n\nu, \quad T' = l'\lambda + m'\mu + n'\nu$$

ist. Wir fügen die bemerkenswerten Relationen hinzu, die man erhält, wenn man aus (10) und (12) die Ableitungen von λ, μ, ν eliminiert:

(14)
$$\begin{cases} p_1 + m_1 \nu - n_1 \mu = p - (m\nu - n\mu), \\ q_1 + n_1 \lambda - l_1 \nu = q - (n\lambda - l\nu), \\ r_1 + l_1 \mu - m_1 \lambda = r - (l\mu - m\lambda), \end{cases}$$

(15) $$p_1' + m_1' \nu - n_1' \mu = p' - (m'\nu - n'\mu) \text{ usw.}$$

Digitized by Google

Zum Schluß dieser vorbereitenden Entwicklungen werde die *Enveloppe (E) der spiegelnden Ebenen* ε bestimmt. Ihr laufender Punkt E habe im bewegten System $\triangle$ die Koordinaten $\xi^{(E)}, \ldots$, so daß

$$x^{(E)} = x^{(0)} + \xi^{(E)} X^{(1)} + \eta^{(E)} X^{(2)} + \zeta^{(E)} X^{(3)} \tag{16}$$

wird. Die Bedingung $\sum dx^{(E)}(\lambda X^{(1)} + \mu X^{(2)} + \nu X^{(3)}) = 0$ liefert, wenn man sich zunächst auf die Variable α beschränkt, bei Berücksichtigung von (1), (3), (13) die Gleichung

$$\lambda \xi_\alpha^{(E)} + \mu \eta_\alpha^{(E)} + \nu \zeta_\alpha^{(E)} + T + \begin{vmatrix} \xi^{(E)}, & \eta^{(E)}, & \zeta^{(E)} \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ p, & q, & r \end{vmatrix} = 0,$$

die man, indem man die daneben geforderte Beziehung

$$\lambda \xi^{(E)} + \mu \eta^{(E)} + \nu \zeta^{(E)} = 1 \tag{17}$$

differentiiert, auf die folgende Form bringt:

$$\xi^{(E)}(\lambda_\alpha + q\nu - r\mu) + \eta^{(E)}(\mu_\alpha + r\lambda - p\nu) + \zeta^{(E)}(\nu_\alpha + p\mu - q\lambda) = T.$$

Macht man von (12a) Gebrauch und fügt die analoge Relation sowie (17) hinzu, so hat man zur Ermittlung von $\xi^{(E)}, \eta^{(E)}, \zeta^{(E)}$ die drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} (l_1 + l)\,\xi^{(E)} + (m_1 + m)\,\eta^{(E)} + (n_1 + n)\,\zeta^{(E)} &= 0, \\ (l_1' + l')\,\xi^{(E)} + (m_1' + m')\,\eta^{(E)} + (n_1' + n')\,\zeta^{(E)} &= 0, \\ \lambda \xi^{(E)} + \mu \eta^{(E)} + \nu \zeta^{(E)} &= 1. \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die inverse Transformation, die von (M_1), $\triangle_1$ zu (M), $\triangle$ führt, einen völlig gleichartigen Prozeß bildet; die transformierenden Funktionen sind dabei $-\lambda, -\mu, -\nu$.

3. *Die Darstellung der Biegungsflächen des einschaligen Hyperbolodis.* — Eine Fläche $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ möge auf der vom Punkte P beschriebenen Biegungsfläche (x, y, z) *rollen*; $\triangle(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ sei das mit der Fläche $(\mathfrak{x}, \ldots)$ bewegte Dreikant der Koordinatenachsen. Wir gehen von der Ortsfläche *(Rollfläche)* des Scheitels $M(x^{(0)}, \ldots)$ aus und beachten, daß $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die relativen Koordinaten von P inbezug auf $\triangle$ sind. Es wird also:

$$x = x^{(0)} + \mathfrak{x} X^{(1)} + \mathfrak{y} X^{(2)} + \mathfrak{z} X^{(3)}. \tag{19}$$

Da nun

$$dx = X^{(1)} d\mathfrak{x} + X^{(2)} d\mathfrak{y} + X^{(3)} d\mathfrak{z} \tag{20}$$

sein soll, so folgt mit Benutzung von (1) und (3):

$$\mathfrak{y} r - \mathfrak{z} q = l, \quad \mathfrak{y} r' - \mathfrak{z} q' = l' \text{ usw.} \tag{21}$$

Digitized by Google

Beiläufig sei erwähnt, daß, wenn $\triangle$ im Verein mit den Translationen $l, \ldots, l', \ldots$ zur Definition eines isometrischen Flächenpaares $(x, \ldots)$, $(\mathfrak{x}, \ldots)$ dienen soll, Rotationen und Translationen den drei Bedingungsgleichungen

$$lp + mq + nr = 0, \quad l'p' + m'q' + n'r' = 0,$$
$$lp' + mq' + nr' + l'p + m'q + n'r = 0$$

genügen müssen. Die sechs Gleichungen (21) sind dann vereinbar und bestimmen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$.

Um die nächstfolgenden Entwicklungen abzukürzen, verwende ich einen Satz aus der Kinematik des Rollens aufeinander abwickelbarer Flächen, den man bei Bianchi[9]) findet: Rollt eine Fläche auf einer Biegungsfläche, so ist eine asymptotische Tangente der einen Fläche stets *kinematisch-konjugiert* zu der Tangente an diejenige Asymptotenlinie der anderen, die den entgegengesetzten Windungssinn besitzt. Wird angenommen, daß die Asymptotenlinien $\alpha =$ konst., $\beta =$ konst. der Biegungsfläche $(x, \ldots)$ bezüglich mit den Asymptotenlinien $u =$ konst., $v =$ konst. der rollenden Fläche $(\mathfrak{x}, \ldots)$ im Windungssinn (Vorzeichen der Torsion) übereinstimmen, so besagt das insbesondere: Schreitet der Berührungspunkt in der durch $\beta =$ konst. definierten Richtung fort, so erfolgt die infinitesimale Drehung um die Tangente der Kurve $u =$ konst. Danach bestehen also die Proportionen:

$$(22) \qquad p : q : r = \mathfrak{x}_v : \mathfrak{y}_v : \mathfrak{z}_v, \quad p' : q' : r' = \mathfrak{x}_u : \mathfrak{y}_u : \mathfrak{z}_u.$$

Die Fläche $(\mathfrak{x}, \ldots)$ sei jetzt das *einschalige Hyperboloid* $\mathfrak{H}$:

$$(23) \qquad \frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} - \frac{\mathfrak{z}^2}{c^2} = 1, \qquad (a > b)$$

das wir mit Rücksicht auf die Realitätsverhältnisse vor den übrigen Mittelpunktsflächen zweiten Grades bevorzugen. Es werde vorläufig in der bekannten Weise auf die Parameter u, v der Erzeugenden bezogen:

$$(24) \qquad \mathfrak{x} = a\frac{1+uv}{u+v}, \quad \mathfrak{y} = b\frac{u-v}{u+v}, \quad \mathfrak{z} = c\frac{1-uv}{u+v}.$$

Aus (22) und (24) schließt man, daß die Rotationen p, q, r und p', q', r', die als Funktionen der asymptotischen Parameter α, β von $(x, \ldots)$ aufzufassen sind, die *quadratischen Relationen*

$$(25) \qquad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{r^2}{c^2} = 0, \quad \frac{p'^2}{a^2} + \frac{q'^2}{b^2} - \frac{r'^2}{c^2} = 0$$

9) Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale, 3. Aufl., 2 (1923), S. 121.

Digitized by Google

erfüllen. Die aus (24) hergeleiteten Formeln

$$\mathfrak{y}\mathfrak{z}_v - \mathfrak{z}\mathfrak{y}_v = -abc\frac{\mathfrak{x}_v}{a^2}, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{z}_u - \mathfrak{z}\mathfrak{y}_u = abc\frac{\mathfrak{x}_u}{a^2} \quad \text{usw.}$$

gehen infolge von (24) in

$$(26) \qquad \mathfrak{y}r - \mathfrak{z}q = -abc\frac{p}{a^2}, \quad \mathfrak{y}r' - \mathfrak{z}q' = abc\frac{p'}{a^2} \quad \text{usw.}$$

über. Nach (21) wird dann:

$$(27) \qquad l = -abc\frac{p}{a^2}, \ \ldots, \quad l' = abc\frac{p'}{a^2}, \ \ldots,$$

so daß wir für die *Ortsfläche des Mittelpunkts M* die folgende Darstellung erhalten:

$$(28) \quad x^{(0)} = abc\int\Big[\Big(-\frac{p}{a^2}X^{(1)} - \frac{q}{b^2}X^{(2)} + \frac{r}{c^2}X^{(3)}\Big)d\alpha + \Big(\frac{p'}{a^2}X^{(1)} + \frac{q'}{b^2}X^{(2)} - \frac{r'}{c^2}X^{(3)}\Big)d\beta\Big].$$

Die infolge von (25) vereinbaren Gleichungen (26) liefern für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Ausdrücke:

$$(29) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = a^2(qr'-rq')t, \quad \mathfrak{y} = b^2(rp'-pr')t, \quad \mathfrak{z} = -c^2(pq'-qp')t, \\ t = -\dfrac{1}{abc\Big(\dfrac{pp'}{a^2} + \dfrac{qq'}{b^2} - \dfrac{rr'}{c^2}\Big)}. \end{cases}$$

Daß (23) erfüllt ist, bestätigt man am einfachsten, indem man p, q, r aus dem ersten oder p', q', r' aus dem zweiten Gleichungstripel (26) eliminiert. Die vom Punkte $P(x, \ldots)$ beschriebene *Biegungsfläche des Hyperboloids* ist durch (19) gegeben:

$$(30) \qquad x = x^{(0)} + \mathfrak{x}X^{(1)} + \mathfrak{y}X^{(2)} + \mathfrak{z}X^{(3)}.$$

Zu den Differentialrelationen (3) treten noch die Integrabilitätsbedingungen für (28), die auch durch die Spezialisierung (27) aus (4) hervorgehen:

$$\begin{cases} p_\beta + p'_\alpha = a^2\Big(\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\Big)(qr' + rq'), \quad q_\beta + q'_\alpha = b^2\Big(-\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}\Big)(rp' + pr'), \\ r_\beta + r'_\alpha = -c^2\Big(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\Big)(pq' + qp'). \end{cases}$$

Führt man die Konstanten

$$A = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\Big), \quad B = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\Big), \quad C = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\Big)$$

Digitized by Google

ein, so lassen sich die Systeme (3) und (31) durch das folgende ersetzen:

$$(33)\quad \begin{cases} p_\beta = a^2(Cr'.q - Bq'.r), & p'_\alpha = a^2(Cr.q' - Bq.r'), \\ q_\beta = b^2(Ap'.r - Cr'.p), & q'_\alpha = b^2(Ap.r' - Cr.p'), \\ r_\beta = -c^2(Bq'.p - Ap'.q), & r'_\alpha = -c^2(Bq.p' - Ap.q'). \end{cases}$$

Als unmittelbare Folge ergibt sich:

$$(34)\quad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-\frac{r^2}{c^2}\right)=0, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p'^2}{a^2}+\frac{q'^2}{b^2}-\frac{r'^2}{c^2}\right)=0.$$

Hiernach haben die den Rotationen auferlegten quadratischen Relationen (25) die Bedeutung von Anfangsbedingungen, die bei der Integration des Systems (33) zu berücksichtigen sind.

Es ist also gezeigt, daß *ein Lösungssystem von* (33), (25) *eine Biegungsfläche des einschaligen Hyperboloids* (23) *definiert.* Man überzeugt sich leicht davon, daß nun auch tatsächlich die den Variablen α und β entsprechenden Drehungsvektoren p, q, r und p', q', r' (im festen Bezugssystem $pX^{(1)}+qX^{(2)}+rX^{(3)}, \ldots$ und $p'X^{(1)}+q'X^{(2)}+r'X^{(3)}, \ldots$) die Richtungen der *Erzeugenden g und g' des rollenden Hyperboloids* bestimmen, die mit den Tangenten ihrer Biegungslinien zur Deckung kommen. Daß auf der Biegungsfläche $(x, \ldots)$ das Netz (α, β) aus den Asymptotenlinien besteht, folgt bereits aus dem vorangestellten kinematischen Satz. Der Deutlichkeit halber soll indessen dieser Nachweis besonders geführt werden.

Wir ermitteln dazu in dem Ansatz

$$(35)\quad \xi_\alpha = \Phi p + \Psi p', \quad \eta_\alpha = \Phi q + \Psi q', \quad \zeta_\alpha = \Phi r + \Psi r'$$

die beiden Koeffizienten Φ und Ψ, indem wir die Relationen (29) nach α differentiieren und die drei erhaltenen Gleichungen

$$t_\alpha(qr'-rq')+t(q_\alpha r'-r_\alpha q')+t(qr'_\alpha-rq'_\alpha) = \Phi\frac{p}{a^2}+\Psi\frac{p'}{a^2} \quad \text{usw.}$$

einmal mit p', q', r', ein zweites Mal mit p, q, r multipliziert addieren. Es ergibt sich so:

$$(36)\qquad \Phi = abct^2.(p'_\alpha, p, p'), \qquad \Psi = abct^2.(p_\alpha, p, p'),$$

wobei die Klammern dreireihige, mittels der Buchstaben p, q, r gebildete Determinanten bedeuten. Nach (20) und (35) wird:

$$x_\alpha = \Phi(pX^{(1)}+qX^{(2)}+rX^{(3)})+\Psi(p'X^{(1)}+q'X^{(2)}+r'X^{(3)}).$$

Differentiation nach α liefert mit Benutzung von (1) und (2):

$$\begin{aligned} x_{\alpha\alpha} = {} & \Phi_\alpha(pX^{(1)}+qX^{(2)}+rX^{(3)})+\Psi_\alpha(p'X^{(1)}+q'X^{(2)}+r'X^{(3)}) \\ & +\Phi(p_\alpha X^{(1)}+q_\alpha X^{(2)}+r_\alpha X^{(3)})+\Psi(p_\beta X^{(1)}+q_\beta X^{(2)}+r_\beta X^{(3)}). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Richtungskosinus der Flächennormalen von $(x, \ldots)$ sind, wie ersichtlich, proportional den Größen Ξ, H, Z, gegeben durch:

$$\Xi = (qr' - rq')\,X^{(1)} + (rp' - pr')\,X^{(2)} + (pq' - qp')\,X^{(3)}.$$

Wir bilden die Summe

$$\sum \Xi x_{\alpha\alpha} = \Phi.(p_\alpha, p, p') + \Psi.(p_\beta, p, p'), \tag{37}$$

deren Verschwinden wir bestätigen müssen. Aus (31) folgern wir an Hand der Relationen (25):

$$(p_\beta + p'_\alpha, p, p') = 0,$$

also $(p_\beta, p, p') = -(p'_\alpha, p, p')$; unter Berücksichtigung der Ausdrücke (35) erhält man aus (37) dann $\sum \Xi x_{\alpha\alpha} = 0$. Danach sind auf der Biegungsfläche $(x, \ldots)$ die Kurven $\beta =$ konst. Asymptotenlinien; Gleiches gilt von den Kurven $\alpha =$ konst.

4. *Herleitung der Transformation G_k aus dem Spiegelungsprinzip.* — Es ist klar, daß, wenn die in Art. 2 dargelegte Methode, auf die Ortsfläche $(M; x^{(0)}, \ldots)$ des Mittelpunkts angewendet, eine Fläche $(M_1; x_1^{(0)}, \ldots)$ derselben Art und damit eine neue Biegungsfläche $(P_1; x_1, \ldots)$ des Hyperboloids (23) ergeben soll, *die gesuchte Transformation geometrisch dadurch charakterisiert ist, daß gleichnamige Achsen der auf der gegebenen uud auf der transformierten Biegungsfläche rollenden Hyperboloide sich treffen.* Damit tritt eine meines Wissens bisher nicht bemerkte Eigenschaft der Operation G_k an den Anfang der Betrachtung [10]).

Von besonderem Interesse ist nun der Umstand, daß man nur die zu (27) analoge Formelgruppe

$$l_1 = -abc\frac{p_1}{a^2}, \ldots, \quad l'_1 = abc\frac{p'_1}{a^2}, \ldots \tag{38}$$

anzusetzen braucht, um das Spiegelungsprinzip in dem beabsichtigten Sinne zu spezialisieren. Als unmittelbare, ohne Rechnung zu übersehende Folge ergibt sich unter der Voraussetzung, daß der Bedingung angepaßte transformierende Funktionen λ, μ, ν existieren, das Bestehen der Differentialrelationen (33) auch für den Index 1. Die Gleichungen (14) verwandeln sich durch (27)

10) Nur erwähnt sei die Tatsache, daß das Hyperboloid auch auf der anderen Seite der Biegungsfläche in jeweils zur Tangentialebene symmetrischer Orientierung rollen kann, wobei dann aber für die Netze (α, β) und (u, v) die Zuordnung ihrer Tangenten als kinematisch-konjugierter Richtungen wechselt. Wir bemerken dazu, daß die Spiegelung der Punkte M an den Tangentialebenen als der Grenzfall $k = 0$ der Transformation G_k aufzufassen ist, bei dem die Biegungsfläche selber ungeändert bleibt.

Digitized by Google

und (38) in:

$$(39)\qquad \begin{cases} p_1 - p = abc\left(\dfrac{q_1+q}{b^2}\nu + \dfrac{r_1+r}{c^2}\mu\right), \\ q_1 - q = abc\left(-\dfrac{r_1+r}{c^2}\lambda - \dfrac{p_1+p}{a^2}\nu\right), \\ r_1 - r = abc\left(\dfrac{p_1+p}{a^2}\mu - \dfrac{q_1+q}{b^2}\lambda\right). \end{cases}$$

Multipliziert man der Reihe nach mit $\frac{p_1+p}{a^2}$, $\frac{q_1+q}{b^2}$, $-\frac{r_1+r}{c^2}$ und addiert dann, so folgt mit Benutzung von (25):

$$\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{q_1^2}{b^2} - \frac{r_1^2}{c^2} = 0.$$

Ebenso bestätigt man für den Index 1 die andere Relation (25).

Wir lösen jetzt die Gleichungen (39) nach p_1, q_1, r_1 auf, setzen

$$(40)\qquad 1 - a^2\lambda^2 - b^2\mu^2 + c^2\nu^2 = D$$

und finden:

$$(41\,a)\qquad \begin{cases} p_1 = -p + \dfrac{2}{D}\left[p + abc\left(\dfrac{q}{b^2}\nu + \dfrac{r}{c^2}\mu\right) - a^2\lambda S\right], \\ q_1 = -q + \dfrac{2}{D}\left[q + abc\left(-\dfrac{r}{c^2}\lambda + \dfrac{p}{a^2}\nu\right) - b^2\mu S\right], \\ r_1 = -r + \dfrac{2}{D}\left[r + abc\left(\dfrac{p}{a^2}\mu - \dfrac{q}{b^2}\lambda\right) + c^2\nu S\right], \\ S = p\lambda + q\mu + r\nu. \end{cases}$$

Entsprechend wird:

$$(41\,b)\qquad \begin{cases} p_1' = -p' + \dfrac{2}{D}\left[p' - abc\left(\dfrac{q'}{b^2}\nu + \dfrac{r'}{c^2}\mu\right) - a^2\lambda S'\right] \text{ usw.}, \\ S' = p'\lambda + q'\mu + r'\nu. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke führen wir, indem wir (27) und (38) berücksichtigen, in die Relationen (12 a, b) ein[11]). Um den so erhaltenen Differentialgleichungen für λ, μ, ν gleich ihre endgültige Gestalt zu geben, schreiben wir (für den Augenblick nur als Abkürzung):

$$(42)\qquad \frac{D}{N} = k. \qquad (N = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$

11) Die Relationen (10) sind dann gleichfalls erfüllt, da sie ja ihrerseits auch eine Folge von (12 a, b) und (14), (15) vorstellen.

Digitized by Google

Das System lautet dann:

$$(43)\quad \begin{cases} \lambda_\alpha = \dfrac{abc}{k}\left[-\lambda W + \dfrac{p}{a^2}\right] + \dfrac{1}{k}[(\ b^2+k)\mu r - (-c^2+k)\nu q], \\ \mu_\alpha = \dfrac{abc}{k}\left[-\mu W + \dfrac{q}{b^2}\right] + \dfrac{1}{k}[(-c^2+k)\nu p - (\ a^2+k)\lambda r], \\ \nu_\alpha = \dfrac{abc}{k}\left[-\nu W - \dfrac{r}{c^2}\right] + \dfrac{1}{k}[(\ a^2+k)\lambda q - (\ b^2+k)\mu p], \\ W = \dfrac{a^2+k}{a^2}p\lambda + \dfrac{b^2+k}{b^2}q\mu + \dfrac{c^2-k}{c^2}r\nu, \\ \lambda_\beta = \dfrac{abc}{k}\left[\ \lambda W' - \dfrac{p'}{a^2}\right] + \dfrac{1}{k}[(\ b^2+k)\mu r' - (-c^2+k)\nu q'] \text{ usw.}, \\ W' = \dfrac{a^2+k}{a^2}p'\lambda + \dfrac{b^2+k}{b^2}q'\mu + \dfrac{c^2-k}{c^2}r'\nu. \end{cases}$$

Multipliziert man die ersten drei dieser Gleichungen bezüglich mit $(a^2+k)\lambda$, $(b^2+k)\mu$, $(-c^2+k)\nu$, so ergibt sich durch Addieren:

$$(44)\qquad (a^2+k)\lambda\lambda_\alpha + (b^2+k)\mu\mu_\alpha - (c^2-k)\nu\nu_\alpha = 0.$$

Das bedeutet aber $\left(\dfrac{D}{N}\right)_\alpha = 0$; da ebenso $\left(\dfrac{D}{N}\right)_\beta = 0$ wird, folgt $\dfrac{D}{N} = k = \text{konst.}$

Damit wird k zur *charakteristischen Konstanten der Transformation*, die wir, vorläufig im Sinne einer neuen Definition, G_k nennen. Die totalen Differentialgleichungen (43), jetzt also mit $k = \text{konst.}$, erweisen sich auf Grund der Formeln (33), an deren Stelle man übrigens vorteilhafter (2) und (32) verwendet, als unbeschränkt integrabel [12]). Ergänzt wird das System (43) durch die aus (42) hervorgehende endliche Relation

$$(45)\qquad (a^2+k)\lambda^2 + (b^2+k)\mu^2 - (c^2-k)\nu^2 = 1,$$

die, wie aus dem Bestehen der Gleichung (44) und einer analogen bezüglich der Variablen β ersichtlich ist, die Bedeutung einer Anfangsbedingung hat. Bei gegebenem k hängt das Lösungssystem λ, μ, ν von *zwei* willkürlichen Konstanten ab. Die transformierte Fläche $(M_1; x_1^{(0)}, \ldots)$ und die neue Biegungsfläche $(P_1; x_1, \ldots)$ erhält man an Hand von (6) und (30):

$$(46)\qquad x_1^{(0)} = x^{(0)} + \frac{2}{N}(\lambda X^{(1)} + \mu X^{(2)} + \nu X^{(3)}),\ ^{13})$$

12) Die erforderliche Rechnung vereinfacht sich, wenn man die am Schluß des Art. aufgestellte homogene Form der Differentialgleichungen zugrunde legt.

13) Wir können, von (34) ausgehend, unsere Transformation auf diejenigen

Digitized by Google

(47) $$x_1 = x_1^{(0)} + \mathfrak{x}_1 X_1^{(1)} + \mathfrak{y}_1 X_1^{(2)} + \mathfrak{z}_1 X_1^{(3)};$$

dabei berechnen sich die Ausdrücke $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$, die das Gesetz der Abwicklung auf das Hyperboloid darstellen, nach den für den Index 1 zu schreibenden Formeln (29) aus den Werten (41a, b) der transformierten Rotationen.

Wird noch

(48) $$\lambda = \frac{\mathfrak{x}_k}{a^2+k}, \quad \mu = \frac{\mathfrak{y}_k}{b^2+k}, \quad \nu = -\frac{\mathfrak{z}_k}{c^2-k}$$

gesetzt, so geht (45) in

(49) $$\frac{\mathfrak{x}_k^2}{a^2+k} + \frac{\mathfrak{y}_k^2}{b^2+k} - \frac{\mathfrak{z}_k^2}{c^2-k} = 1$$

über, und man erkennt: *Die spiegelnde Ebene ε ist Tangentialebene einer von dem rollenden Hyperboloid mitgeführten, durch die Konstante k bestimmtem konfokalen Fläche zweiten Grades.* Die Realität der Transformation verlangt $k > -a^2$. Wir beschränken aber, damit auch die Zerlegung in Bianchi-Transformationen reell ausfällt, k auf das Intervall

$$-b^2 < k < c^2,$$ [14])

so daß die Fläche (49) wieder ein *einschaliges Hyperboloid* $\mathfrak{H}_k$ wird.

Die Operation G_k läßt sich in eine Form bringen, die ganz den bekannten Darstellungen der Ribaucour-Transformation für spezielle Flächenklassen (isotherme Flächen, Flächen von konstanter Krümmung u. a.) entspricht. Wir können nämlich die Differentialgleichungen (43) durch ein lineares und homogenes System für vier Funktionen $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\varrho}$ ersetzen:

$$\bar{\lambda}_\alpha = \frac{abc}{k}\frac{p}{a^2}\bar{\varrho} + \frac{1}{k}[(b^2+k)\bar{\mu}r - (-c^2+k)\bar{\nu}q], \quad \bar{\mu}_\alpha = \cdots, \quad \bar{\nu}_\alpha = \cdots,$$ [15])

$$\bar{\lambda}_\beta = -\frac{abc}{k}\frac{p'}{a^2}\bar{\varrho} + \frac{1}{k}[(b^2+k)\bar{\mu}r' - (-c^2+k)\bar{\nu}q'] \quad \bar{\mu}_\beta = \cdots, \quad \bar{\nu}_\beta = \cdots,$$

Lösungssysteme von (33) und die zugehörigen, durch die Quadraturen (29) definierten Flächen ausdehnen, für die statt der Relationen (25) die allgemeineren $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{r^2}{c^2} = \varphi(\alpha)$, $\frac{p'^2}{a^2} + \frac{q'^2}{b^2} - \frac{r'^2}{c^2} = \psi(\beta)$ gelten, wobei nicht verschwindendes $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ sich durch geeignete Wahl der Parameter α und β auf $+1$ oder -1 reduzieren läßt. Daß man die Bianchi-Transformation gleichfalls auf diese Flächenklasse übertragen kann, ist aus den nachfolgenden Entwicklungen nicht ohne weiteres zu ersehen und soll gelegentlich besonders gezeigt werden.

14) Auf die *singulären* Transformationen für $k = -b^2$ und $k = c^2$ gehen wir hier nicht ein.

15) Die vorzunehmenden Vertauschungen der Buchstaben übersieht man leicht mit Hilfe von (43).

Digitized by Google

$$\bar{\varrho}_\alpha = \frac{abc}{k}\left(\frac{a^2+k}{a^2}p\bar{\lambda} + \frac{b^2+k}{b^2}q\bar{\mu} + \frac{c^2-k}{c^2}r\bar{\nu}\right),$$

$$\bar{\varrho}_\beta = -\frac{abc}{k}\left(\frac{a^2+k}{a^2}p'\bar{\lambda} + \frac{b^2+k}{b^2}q'\bar{\mu} + \frac{c^2-k}{c^2}r'\bar{\nu}\right).$$

Dazu kommt an Stelle von (45) die ebenfalls homogene quadratische Relation:

$$(a^2+k)\bar{\lambda}^2 + (b^2+k)\bar{\mu}^2 - (c^2-k)\bar{\nu}^2 = \bar{\varrho}^2.$$

Es wird dann:

$$\lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\varrho}}, \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\varrho}}, \quad \nu = \frac{\bar{\nu}}{\bar{\varrho}}.$$

5. *Geometrische Eigenschaften der Transformation G_k.* — Wir bestimmen die Punkte A und B, in denen die Erzeugenden g und g' des rollenden Hyperboloids $\mathfrak{H}$, gleichzeitig also die Tangenten ihrer auf der Biegungsfläche $(x, \ldots)$ liegenden Biegungslinien, die spiegelnde Ebene ε treffen. Die relativen Koordinaten inbezug auf $\triangle$ seien $\xi^{(A)}, \ldots$ und $\xi^{(B)}, \ldots$. Der Ansatz $\xi^{(A)} = \mathfrak{x} + hp, \ldots$ liefert auf Grund der Bedingung (5):

$$h = \frac{1}{S}[1 - (\mathfrak{x}\lambda + \mathfrak{y}\mu + \mathfrak{z}\nu)],$$

wobei wieder $S = p\lambda + q\mu + r\nu$ ist. Damit wird

$$\xi^{(A)} = \frac{1}{S}[p - (\mathfrak{z}p - \mathfrak{x}r)\nu + (\mathfrak{x}q - \mathfrak{y}p)\mu]$$

und mit Benutzung von (26):

$$(50) \qquad \begin{cases} \xi^{(A)} = \dfrac{1}{S}\left[p + abc\left(\dfrac{q}{b^2}\nu + \dfrac{r}{c^2}\mu\right)\right], \\ \eta^{(A)} = \dfrac{1}{S}\left[q + abc\left(-\dfrac{r}{c^2}\lambda - \dfrac{p}{a^2}\nu\right)\right], \\ \zeta^{(A)} = \dfrac{1}{S}\left[r + abc\left(\dfrac{p}{a^2}\mu - \dfrac{q}{b^2}\lambda\right)\right], \end{cases}$$

ebenso:

$$(51) \qquad \xi^{(B)} = \frac{1}{S'}\left[p' - abc\left(\frac{q'}{b^2}\nu + \frac{r'}{c^2}\mu\right)\right] \text{ usw.}$$

Zu (50) analog gebildete Ausdrücke für den Index 1, in denen gemäß der Bemerkung am Schluß von Art. 2 an die Stelle von λ, μ, ν die entgegengesetzten Werte treten, geben im Dreikant $\triangle_1$ die relativen Koordinaten des Punktes A_1, in dem die Tangente g_1

Digitized by Google

der transformierten Biegungsfläche $(x_1, \ldots)$ die Ebene ε trifft:

$$\xi_1^{(A_1)} = -\frac{1}{S_1}\left[p_1 - abc\left(\frac{q_1}{b^2}\nu + \frac{r_1}{c^2}\mu\right)\right], \qquad S_1 = p_1\lambda + q_1\mu + r_1\nu.$$

Aus (39) folgt zunächst $S_1 = S$, dann aber weiter $\xi_1^{(A_1)} = \xi^{(A)}, \ldots$. Eine einfache Überlegung lehrt jetzt, daß die auf ε gelegenen Punkte A und A_1 zusammenfallen. Wir haben damit den Satz: *Für zwei durch die Transformation G_k verbundene Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids treffen sich die Tangenten g und g_1, g' und g_1' der verbogenen Erzeugenden*[16]. Überdies ist klar, daß *die Schnittlinie s ihrer Tangentialebenen, nämlich die Verbindungslinie der Punkte $A(g \times g_1)$ und $B(g' \times g_1')$, in ε enthalten ist.*

Wir bedenken ferner, daß zusammen mit $\triangle$ und $\triangle_1$ die auf den beiden Biegungsflächen rollenden Hyperboloide stets symmetrisch inbezug auf ε liegen, und gelangen auf Grund des gewonnenen Ergebnisses zu der folgenden Konstruktion: *Man lege durch den Punkt P der gegebenen Biegungsfläche die Erzeugenden g und g' des rollenden Hyperboloids $\mathfrak{H}$ bis zu ihren Schnittpunkten A und B mit ε und ziehe dann die beiden anderen durch A und B gehenden Erzeugenden γ, γ' von $\mathfrak{H}$ bis zu ihrem Schnittpunkt Π; durch Spiegelung von Π an der* Ebene ε *erhält man den Punkt P_1 der transformierten Biegungsfläche.*

Wir betrachten die Enveloppe (E) der Ebenen ε. Die erste der Gleichungen (18) läßt sich mit Benutzung von (27) und (38) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{p_1 + p}{a^2}\xi^{(E)} + \frac{q_1 + q}{b^2}\eta^{(E)} - \frac{r_1 + r}{c_2}\zeta^{(E)} = 0.$$

Setzen wir die aus (41 a) entnommenen Ausdrücke

$$(52) \qquad p_1 + p = \frac{2}{D}\left[p + abc\left(\frac{q}{b^2}\nu + \frac{r}{c^2}\mu\right) - a^2\lambda S\right], \ldots$$

16) Es stoßen also diejenigen Tangenten zusammen, die zu *entsprechenden* asymptotischen Richtungen kinematisch-konjugiert sind. Man kann übrigens allgemeiner zeigen, daß zu korrespondierenden, d. h. durch denselben Wert von $\frac{d\beta}{d\alpha}$ definierten Fortschreitungsrichtungen auf den beiden Biegungsflächen solche Tangenten kinematisch-konjugiert sind, die einander treffen. Hierher gehört dann auch die eingangs erwähnte harmonische Beziehung der permanenten konjugierten Netze, auf deren Erörterung wir verzichten. — Ich bemerke noch, daß ich die in dem Satze ausgesprochene Eigenschaft der Transformation G_k für den besonderen Fall der Biegungsflächen des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids bereits früher mitgeteilt habe; s. Jonas, Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloide iperbolice equilatero. Annali di Mat. (4) 2 (1924-25), S. 161, daselbst § 5, 4.

Digitized by Google

ein und berücksichtigen (50) sowie die dritte Gleichung (18), so ergibt sich:

$$\frac{\xi^{(A)}}{a^2}\xi^{(E)}+\frac{\eta^{(A)}}{b^2}\eta^{(E)}-\frac{\zeta^{(A)}}{c^2}\zeta^{(E)}=1.$$

Die entsprechende Beziehung gilt für B. Demnach liegt E auf der Schnittlinie $P\Pi$ der beiden in A und B konstruierten Tangentialebenen von $\mathfrak{H}$. Wir können sagen: *E ist der Pol des Tangentialebenenschnitts s der beiden Biegungsflächen inbezug auf den Kegelschnitt, in dem die Ebene ε das rollende Hyperboloid $\mathfrak{H}$ schneidet. Ein Lichtstrahl PE wird von der Enveloppe (E) durch P_1 (bzw. in der zu EP_1 entgegengesetzten Richtung) reflektiert.*

Dazu kommt die weitere bemerkenswerte Tatsache: *Die Verbindungslinie korrespondierender Punkte P und P_1 der Biegungsflächen geht durch den Punkt K, in dem ε das von $\mathfrak{H}$ mitgeführte konfokale Hyperboloid $\mathfrak{H}_k$ berührt*[17]).

Zum Beweise beachten wir, daß die Richtungskosinus von g_1 in $\triangle$ den Größen

$$-p_1+\frac{2S}{N}\lambda,\quad -q_1+\frac{2S}{N}\mu,\quad -r_1+\frac{2S}{N}\nu$$

proportional sind; man erkennt dies, wenn man $p_1X_1^{(1)}+q_1X_1^{(2)}+r_1X_1^{(3)}$ mit Hilfe von (8) durch $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ ausdrückt. Aus (52) und (50) folgt dann unter Berücksichtigung von (42):

$$p-\left(-p_1+\frac{2S}{N}\lambda\right)=\frac{2S}{D}[\xi^{(A)}-(a^2+k)\lambda].$$

Nach (48) sind aber $\mathfrak{x}_k=(a^2+k)\lambda,\ \ldots$ die relativen Koordinaten des Berührungspunktes K von ε und $\mathfrak{H}_k$. Demnach wird die dreireihige Determinante

$$\left(\mathfrak{x}_k-\xi^{(A)},\ p,\ -p_1+\frac{2S}{N}\lambda\right)=0.$$

Das bedeutet: K liegt in der Ebene der beiden in A zusammenstoßenden Geraden g und g_1. Ebenso ist K in der durch g', g_1'

17) Es handelt sich hier um die folgende Eigenschaft der Flächen zweiten Grades: *Verbindet man zwei Punkte P und Π einer F^2 mit dem Punkte K, in dem eine durch die reziproke Polare von $P\Pi$ gelegte Ebene ε die damit zugleich bestimmte Fläche der konfokalen Schar berührt, so ist ε eine Symmetrieebene des Geradenpaares KP, $K\Pi$.* Einen geometrischen Beweis gewinnt man aus dem Umstand, daß die Normale der konfokalen Fläche durch den Pol von ε bezüglich der ursprünglichen F^2 geht. Durch diesen Pol geht auch die Gerade $P\Pi$. Die Strahlen KP und $K\Pi$ werden dann durch ε und die Normale harmonisch getrennt.

Digitized by Google

bestimmten Ebene enthalten. Die Schnittlinie PP_1 beider Ebenen geht also tatsächlich durch K.

6. *Die Zerlegung der Operation* G_k. — Wir beziehen jetzt das bewegte Hyperboloid $\mathfrak{H}_k$ auf die Parameter σ, τ seiner Erzeugenden und verstehen unter σ und τ insbesondere diejenigen Funktionen von α, β, durch die der jeweilige Berührungspunkt K der spiegelnden Ebene ε gegeben ist. Die Größen

$$(53) \qquad a_k = \sqrt{a^2+k}, \quad b_k = \sqrt{b^2+k}, \quad c_k = \sqrt{c^2-k}$$

nehmen wir positiv an[18]). Entsprechend der für $\mathfrak{H}$ benutzten Darstellung (24) schreiben wir die relativen Koordinaten von K inbezug auf $\triangle$:

$$(54) \qquad \mathfrak{x}_k = a_k \frac{1+\sigma\tau}{\sigma+\tau}, \quad \mathfrak{y}_k = b_k \frac{\sigma-\tau}{\sigma+\tau}, \quad \mathfrak{z}_k = c_k \frac{1-\sigma\tau}{\sigma+\tau}.$$

Nach (48) ist dann:

$$(55) \qquad \lambda = \frac{1}{a_k}\frac{1+\sigma\tau}{\sigma+\tau}, \quad \mu = \frac{1}{b_k}\frac{\sigma-\tau}{\sigma+\tau}, \quad \nu = -\frac{1}{c_k}\frac{1-\sigma\tau}{\sigma+\tau}.$$

Durch Differentiation folgert man hieraus die Formeln:

$$-\frac{2(1-\tau^2)\sigma_\alpha}{(\sigma+\tau)^2} = a_k\lambda_\alpha + b_k c_k(\mu_\alpha\nu - \nu_\alpha\mu),$$
$$-\frac{2(1-\sigma^2)\tau_\alpha}{(\sigma+\tau)^2} = a_k\lambda_\alpha - b_k c_k(\mu_\alpha\nu - \nu_\alpha\mu)$$

und analoge bezüglich der Variablen β. Werden rechts die Ausdrücke (43) für die Ableitungen von λ, μ, ν eingetragen und λ, μ, ν dann selber wieder durch (55) ausgedrückt, so ergibt sich:

$$(56) \quad \begin{cases} d\sigma = \dfrac{abc}{2k}\Big\{\Big[A_k\dfrac{p}{a}(1-\sigma^2) + B_k\dfrac{q}{b}2\sigma - C_k\dfrac{r}{c}(1+\sigma^2)\Big]d\alpha \\ \qquad\qquad + \Big[A_k'\dfrac{p'}{a}(1-\sigma^2) + B_k'\dfrac{q'}{b}2\sigma - C_k'\dfrac{r'}{c}(1+\sigma^2)\Big]d\beta\Big\}, \end{cases}$$

$$(57) \quad \begin{cases} d\tau = \dfrac{abc}{2k}\Big\{\Big[-A_k'\dfrac{p}{a}(1-\tau^2) + B_k'\dfrac{q}{b}2\tau + C_k'\dfrac{r'}{c}(1+\tau^2)\Big]d\alpha \\ \qquad\qquad + \Big[-A_k\dfrac{p'}{a}(1-\tau^2) + B_k\dfrac{q'}{b}2\tau + C_k\dfrac{r'}{c}(1+\tau^2)\Big]d\beta\Big\}; \end{cases}$$

18) Durch Vorzeichenwechsel in ungerader Anzahl (1 oder 3) werden die Scharen der Erzeugenden und damit die *Klassen* der Bianchi-Transformation vertauscht.

Digitized by Google

dabei haben die Konstanten $A_k, \ldots, A'_k, \ldots$ die Werte:

$$(58)\quad \begin{cases} A_k = \dfrac{b_k c_k}{bc} + \dfrac{a_k}{a}, \quad B_k = \dfrac{a_k c_k}{ac} + \dfrac{b_k}{b}, \quad C_k = \dfrac{a_k b_k}{ab} + \dfrac{c_k}{c}, \\ A'_k = \dfrac{b_k c_k}{bc} - \dfrac{a_k}{a}, \quad B'_k = \dfrac{a_k c_k}{ac} - \dfrac{b_k}{b}, \quad C'_k = \dfrac{a_k b_k}{ab} - \dfrac{c_k}{c}. \end{cases}$$

Auf diese Weise ist das System (43), (45) auf *zwei voneinander unabhängige totale Differentialgleichungen vom Riccatischen Typus* zurückgeführt; aus σ und τ erhält man λ, μ, ν mittels (55).

7. *Die eingeschalteten Biegungsflächen und die Bianchi-Transformation.* — Es seien g_σ und g_τ die beiden durch σ bzw. τ bestimmten (also den Scharen σ bzw. τ = konst. angehörigen) Erzeugenden von $\mathfrak{H}_k$, die durch K gehen und in der Ebene ε liegen. Wir wollen beweisen: *Die Punkte* $\bar{P}(\bar{x}, \ldots)$ *und* $\bar{\bar{P}}(\bar{\bar{x}}, \ldots)$, *in denen die Geraden* g_σ *und* g_τ *des von* $\mathfrak{H}$ *mitgeführten konfokalen Hyperboloids* $\mathfrak{H}_k$ *den Tangentialebenenschnitt* s *der beiden durch die Transformation* G_k *verbundenen Biegungsflächen* $(x, \ldots)$, $(x_1, \ldots)$ *treffen, beschreiben zwei weitere Biegungsflächen desselben Hyperboloids. Mit der ursprünglichen Biegungsfläche* $(x, \ldots)$ *hängen die eingeschalteten Flächen* $(\bar{x}, \ldots)$ *und* $(\bar{\bar{x}}, \ldots)$ *durch Bianchi-Transformationen* B_k, B'_k *von verschiedener Klasse zusammen, die den Lösungen* σ *und* τ *der Riccatischen Differentialgleichungen* (56), (57) *entsprechen; aus* $(x_1, \ldots)$ *gehen sie durch Transformationen* B'_k, B_k *(mit vertauschten Klassen) hervor.* Damit wird u. a. ausgesagt: *Eine jede Seite des windschiefen Vierecks* $P\bar{P}P_1\bar{\bar{P}}$ *ist gemeinsame Tangente der beiden Biegungsflächen, deren korrespondierende Punkte sie verbindet.*

Wir betrachten also die Ortsfläche des Schnittpunkts $\bar{P}$ von g_σ und s, bestimmen aber $\bar{\bar{P}}$, was auf das Gleiche hinausläuft, als Schnittpunkt von g_σ mit der Tangentialebene von $(x, \ldots)$. Auf diese Weise wird die durch σ definierte Bianchi-Transformation auch unabhängig von der Operation G_k eingeführt. Zur Festlegung des Punktes $\bar{P}$ auf g_σ diene der noch zu ermittelnde Wert τ' des Parameters der anderen durch ihn hindurchgehenden Erzeugenden von $\mathfrak{H}_k$. Danach wird:

$$(59)\quad \begin{cases} \bar{x} = x^{(0)} + a_k \dfrac{1+\sigma\tau'}{\sigma+\tau'} X^{(1)} + b_k \dfrac{\sigma-\tau'}{\sigma+\tau'} X^{(2)} + c_k \dfrac{1-\sigma\tau'}{\sigma+\tau'} X^{(3)} \\ \quad = x^{(0)} + \dfrac{a_k}{a} \bar{\xi} X^{(1)} + \dfrac{b_k}{b} \bar{\eta} X^{(2)} + \dfrac{c_k}{c} \bar{\delta} X^{(3)}, \end{cases}$$

wobei, wie sich alsbald herausstellen wird, durch

$$(60)\qquad \bar{\xi} = a\frac{1+\sigma\tau'}{\sigma+\tau'}, \quad \bar{\eta} = b\frac{\sigma-\tau'}{\sigma+\tau'}, \quad \bar{\delta} = c\frac{1-\sigma\tau'}{\sigma+\tau'}$$

Digitized by Google

die isometrische Abbildung des Hyperboloids auf die neue Fläche $(\bar{x}, \ldots)$ gegeben ist. Damit $\bar{P}$ in der Tangentialebene von $(x, \ldots)$ liegt, muß

$$\frac{a_k}{a^2}\xi\bar{\xi} + \frac{b_k}{b^2}\eta\bar{\eta} - \frac{c_k}{c^2}\zeta\bar{\zeta} = 1, \quad \text{d. i.} \tag{61}$$

$$\frac{a_k}{a^2}\xi(1+\sigma\tau') + \frac{b_k}{b^2}\eta(\sigma-\tau') - \frac{c_k}{c^2}\zeta(1-\sigma\tau') = \sigma+\tau' \tag{62}$$

sein; diese Relation bestimmt τ'.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{a_k}{a^2}\xi(1-\sigma^2) + \frac{b_k}{b^2}\eta 2\sigma - \frac{c_k}{c^2}\zeta(1+\sigma^2) = 2w, \tag{63}$$

$$\frac{a_k}{a^2}\xi(1-\tau'^2) - \frac{b_k}{b^2}\eta 2\tau' - \frac{c_k}{c^2}\zeta(1+\tau'^2) = 2w' \tag{64}$$

und stellen die zur Umformung von $d\bar{x}$ erforderlichen Formelgruppen auf:

$$\left\{\begin{aligned} -abc\frac{p}{a^2} - \left(\frac{b_k}{b}\bar{\eta}r - \frac{c_k}{c}\bar{\zeta}q\right) &= -\frac{k}{w}\sigma_\alpha\frac{\xi}{a^2}, \\ -abc\frac{q}{b^2} - \left(\frac{c_k}{c}\bar{\zeta}p - \frac{a_k}{a}\bar{\xi}r\right) &= -\frac{k}{w}\sigma_\alpha\frac{\eta}{b^2}, \\ abc\frac{r}{c^2} - \left(\frac{a_k}{a}\bar{\xi}q - \frac{b_k}{b}\bar{\eta}p\right) &= \frac{k}{w}\sigma_\alpha\frac{\zeta}{c^2}, \end{aligned}\right. \tag{65a}$$

$$abc\frac{p'}{a^2} - \left(\frac{b_k}{b}\bar{\eta}r' - \frac{c_k}{c}\bar{\zeta}q'\right) = -\frac{k}{w}\sigma_\beta\frac{\xi}{a^2} \quad \text{usw.} \tag{65b}$$

Um in (65a) die Proportionalität der links stehenden Ausdrücke mit $\frac{\xi}{a^2}, \ldots$ (d. h. mit $qr'-rq', \ldots$) zu bestätigen, hat man diese einmal mit p, q, r und einmal mit p', q', r' zu multiplizieren und das Verschwinden der beiden Summen zu zeigen. Die erste Bedingung ist unmittelbar erfüllt, die zweite erweist sich an Hand von (29) als mit (61) identisch. Um den Proportionalitätsfaktor zu ermitteln, multipliziert man die drei Gleichungen mit $a_k(1-\sigma^2)$, $b_k 2\sigma$, $c_k(1+\sigma^2)$, addiert und findet mit Benutzung von (56) und (63) seinen Wert $-\frac{k}{w}\sigma_\alpha$. In analoger Weise verifiziert man (65b).

Multipliziert man die entsprechenden Seiten der Gleichungen (63) und (64) und subtrahiert die beiderseits ins Quadrat erhobene Relation (62), so ergibt sich die folgende für den Nachweis der Isometrie grundlegende Formel:

$$k\left(\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}\right) + \frac{4ww'}{(\sigma+\tau')^2} = 0. \tag{66}$$

Digitized by Google

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir mittels (28), (2) und (65):

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} d\bar{x} = &\Big[-\frac{k}{w}\Big(\frac{\mathfrak{x}}{a^2}X^{(1)}+\frac{\mathfrak{y}}{b^2}X^{(2)}-\frac{\mathfrak{z}}{c^2}X^{(3)}\Big)\\ &+\Big(\frac{a_k}{a}\bar{\mathfrak{x}}_\sigma X^{(1)}+\frac{b_k}{b}\bar{\mathfrak{y}}_\sigma X^{(2)}+\frac{c_k}{c}\bar{\mathfrak{z}}_\sigma X^{(3)}\Big)\Big]d\sigma\\ &+\Big[\frac{a_k}{a}\bar{\mathfrak{x}}_{\tau'}X^{(1)}+\frac{b_k}{b}\bar{\mathfrak{y}}_{\tau'}X^{(2)}+\frac{c_k}{c}\bar{\mathfrak{z}}_{\tau'}X^{(3)}\Big]d\tau', \end{aligned}\right.$$

und erhalten nach einigen Reduktionen, bei denen von (63), (64), schließlich von (66) Gebrauch zu machen ist:

$$\sum d\bar{x}^2-\sum d\bar{\mathfrak{x}}^2 = \frac{k}{w^2}\Big[k\Big(\frac{\mathfrak{x}^2}{a^4}+\frac{\mathfrak{y}^2}{b^4}+\frac{\mathfrak{z}^2}{c^4}\Big)+\frac{4ww'}{(\sigma+\tau')^2}\Big]d\sigma^2 = 0.$$

$(\bar{x}, \ldots)$ ist also Biegungsfläche des durch (60) *dargestellten Hyperboloids.*

Um zu zeigen, daß *$P\bar{P}$ auch die neue Biegungsfläche $(\bar{x}, \ldots)$ berührt*, lösen wir die Gleichungen (62), (63), (64) nach $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ auf. Wir finden:

$$(68)\qquad \frac{a_k}{a}\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}+w\bar{\mathfrak{x}}_\sigma+w'\bar{\mathfrak{x}}_\tau \quad \text{usw.}$$

Diese Beziehungen multiplizieren wir mit $\frac{a_k}{a}, \ldots$ und verwandeln sie in:

$$(69)\qquad \mathfrak{x} = \frac{a_k}{a}\bar{\mathfrak{x}}+w\Big(-\frac{k}{w}\frac{\mathfrak{x}}{a^2}+\frac{a_k}{a}\bar{\mathfrak{x}}_\sigma\Big)+w'\frac{a_k}{a}\bar{\mathfrak{x}}_\tau \quad \text{usw.}$$

Aus (30), (59), (67) folgern wir mit Hilfe von (69):

$$x = \bar{x}+w\frac{\partial\bar{x}}{\partial\sigma}+w'\frac{\partial\bar{x}}{\partial\tau'},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Demnach geht die durch σ bestimmte Biegungsfläche $(\bar{x}, \ldots)$ aus $(x, \ldots)$ durch eine Bianchi-Transformation B_k hervor[19]).

Nehmen wir jetzt wieder an, daß bereits das Ergebnis der Operation G_k, die Biegungsfläche $(x_1, \ldots)$ vorliege, so ist ohne Rechnung zu ersehen, daß auch $\bar{P}P_1$ gemeinsame Tangente der von $\bar{P}$ und P_1 beschriebenen Flächen $(\bar{x}, \ldots)$ und $(x_1, \ldots)$ ist. $\bar{P}$ liegt auf dem Tangentialebenenschnitt s, also in der Tangentialebene von $(x_1, \ldots)$. Überdies erhellt aus (67), daß g_σ Tangente der verbogenen Erzeugenden $\sigma = \text{konst.}$ auf $(\bar{x}, \ldots)$ ist. Die durch $\bar{P}P$ und g_σ, d. i. durch $\bar{P}P$ und K gelegte Ebene ist daher die Tan-

19) Erinnert sei an die Korrespondenz der Asymptotenlinien, die hier nicht von neuem bewiesen werden soll.

Digitized by Google

gentialebene von $(\bar{x}, \ldots)$. Diese enthält aber, nämlich auf PK (s. den Schluß von Art. 5) den Punkt P_1.

Bei der zwischen $(x, \ldots)$ und $(\bar{x}, \ldots)$ vermittelnden Bianchi-Transformation B_k ist die Gerade g_σ von $\mathfrak{H}_k$, die der rechtsgewundenen oder, wie wir lieber sagen wollen, *ersten* Schar angehört, vor der anderen durch $\bar{P}$ gehenden Erzeugenden $g_{\tau'}$ ausgezeichnet: g_σ ist, wie eben festgestellt wurde, Tangente an die Kurve $\sigma =$ konst. der Bianchischen Transformierten $(\bar{x}, \ldots)$, die sich infolgedessen als der eine Brennflächenmantel der von der Gesamtheit der Geraden g_σ gebildeten Normalenkongruenz darstellt[20]). *Die Zugehörigkeit dieser ausgezeichneten Erzeugenden von $\mathfrak{H}_k$ zur ersten oder zur zweiten Schar kennzeichnet die Klasse B_k bzw. B_k' der Bianchi-Transformation.* Es ist klar, daß die zweite eingeschaltete Biegungsfläche $(\bar{\bar{x}}, \ldots)$, Ort der Schnittpunkte von s und g_τ, mit $(x, \ldots)$ durch eine Transformation B_k' verbunden ist. Man erkennt ferner, daß unter Vertauschung der Klassen von $(x_1, \ldots)$ zu $(\bar{x}, \ldots)$ eine Transformation B_k', zu $(\bar{\bar{x}}, \ldots)$ eine B_k führt, Dies folgt aus dem Umstande, daß zusammen mit dem rollenden Hyperboloid $\mathfrak{H}$ auch das mitgeführte konfokale $\mathfrak{H}_k$ an der Ebene ε gespiegelt wird, auf dem Spiegelbild aber g_σ Erzeugende der zweiten, g_τ Erzeugende der ersten Schar wird. Ohne Beweis sei angemerkt, daß die inverse Bianchi-Transformation der gleichen Klasse angehört.

Das am Anfang dieses letzten Artikels angekündigte Ziel der Untersuchung ist hiermit erreicht. Wir sprechen das Ergebnis noch in der folgenden Fassung aus: *Die aus dem Spiegelungsprinzip gewonnene Transformation G_k der auf das einschalige Hyperboloid abwickelbaren Flächen liefert die vierte, den viergliedrigen Zyklus Bianchischer Transformationen in Sinne des Vertauschbarkeitssatzes schließende Biegungsfläche für den besonderen Fall, daß die gegebene Fläche zwei Transformationen B_k und B_k' mit derselben Konstanten, aber von verschiedener Klasse unterworfen wird.* Damit ist auch die Identität unserer Operation G_k mit der Guichardschen Transformation bestätigt.

---

20) $g_{\tau'}$ liegt, wie man aus (66) entnehmen kann, spiegelbildlich inbezug auf die Tangentialebene von $(x, \ldots)$ zur Tangente der Kurve $\tau' =$ konst. von $(\bar{x}, \ldots)$.

Digitized by Google

Über eine Eigenschaft des Konvergenzkontinuums [1]).

Von K. Zarankiewicz in Warschau.

Es sei S eine zusammenhängende Menge; eine Untermenge N von S heißt Zerschneidungsmenge von S, falls die Menge $S-N$ nicht mehr zusammenhängend ist. Besteht die Menge N nur aus einem einzigen Punkte p, so nennt man ihn — einen Zerschneidungspunkt von S. Ein Kontinuum K, welches in S enthalten ist, heißt Konvergenzkontinuum von S, wenn in S eine Folge von Kontinuen $\{K_n\}$ wo $n = 1, 2, 3, \ldots$ enthalten ist, so daß folgendes gilt:

(1) $$K_n . K_m = 0 \qquad (n \neq m)$$

(2) $$K . K_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3) $$K = \lim K_n$$ [2]).

Man weiß, daß die Menge der Zerschneidungspunkte von S, welche auf einem Konvergenzkontinuum von S gelegen sind, höchstens abzählbar ist [3]). Der Zweck dieser Note ist, die folgende Verschärfung dieses Satzes zu beweisen:

Satz: *Ist S ein beliebiges Kontinuum (in einem separablen topologischen Raume gelegen) und K ein Konvergenzkontinuum von S, so existiert auf K eine höchstens abzählbare Menge P, so daß weder $K-P$ noch irgendeine Untermenge von $K-P$ eine Zerschneidungsmenge von S ist.*

Beweis. Wir bezeichnen mit M_x die zusammenhängenden Komponenten der Menge $S-K$, wobei jedem Index x eine und nur eine solche Komponente entspricht. Jede der Mengen M_x (die zueinander fremd sind) besitzt mindestens einen Häufungspunkt, der auf K liegt; für jede Menge M_x wird ein solcher Punkt ausgewählt und mit p_x bezeichnet. Offenbar ist jede Menge $M_x + p_x$ zusammenhängend. Ferner sei M die Vereinigungsmenge derjenigen Mengen M_x, welche Punkte mit der Menge $\sum K_n$ gemeinsam haben, und P' die Menge aller Punkte p_x auf K, die für die Mengen M_x des Systems M, ausgewählt sind. Da alle Mengen M_x fremd und

1) Vorgelegt in der 284. Sitzung am 25. Mai 1932.

2) Siehe C. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes.* Fund. Math. IX, S. 127.

3) l. c. S. 139.

Digitized by Google

zusammenhängend sind, so ist offenbar die Menge P' höchstens abzählbar.

Ich behaupte, daß die Menge $M+P'$ zusammenhängend ist. Nehmen wir an, daß dies nicht der Fall wäre; dann würde die Menge $M+P'$ in zwei getrennte nicht leere Mengen A und B zerfallen. In mindestens einer von den beiden Mengen A und B (wir können wegen der Symmetrie der Voraussetzungen annehmen, daß das in A der Fall ist) treten dann unendlichviele K_n auf; somit enthält A nach (3), weil sie relativ abgeschlossen ist, alle Punkte von K, die zu der Menge $M+P'$ gehören, also $P' \subset A$. Folglich enthält jede Menge M_x+p_x einen Punkt, nämlich p_x, der zu der Menge A gehört; weil aber M_x+p_x zusammenhängend ist, muß $M_x+p_x \subset A$ sein für jedes M_x aus dem System M; dann ist aber $M+P' \subset A$, und die Menge B müßte leer sein, was der Annahme, daß $M+P'$ nicht zusammenhängend ist, widerspricht.

Die Mengen M_x, die nicht in M vorkommen, sind offenbar in ihrer Summe abgeschlossen. Nach einem Satze von mir[4]) bilden diejenigen der Mengen M_x, welche keine Häufungsmengen (Limites in Hausdorffschen Sinne) der übrigbleidenden Mengen M_x sind, höchstens eine abzählbare Familie, deren Vereinigungsmenge wir mit M^* bezeichnen wollen. Die Vereinigungsmenge derjenigen Mengen M_x, welche Häufungsmengen der anderen (nicht in $M+M^*$ vorkommenden) Mengen sind, bezeichnen wir mit M^{**}. Es sei ferner P'' die Menge aller Punkte p_x, welche für die Mengen M_x, die in M^* vorkommen, ausgewählt sind und $\mathfrak{P}$ irgendeine abzählbare in der Menge M^{**} dichtliegende Menge. Mit P''' bezeichnen wir die Menge derjenigen p_x Punkte, welche für solche Mengen M_x aus dem System M^{**} ausgewählt sind, die die Punkte der Menge $\mathfrak{P}$ enthalten. Dann ist jede Menge M_x aus M^{**} als Limes von solchen Mengen M_x aus M^{**} darstellbar, für welche die p_x Punkte in der Menge P''' auftreten.

Die beiden Mengen P'' und P''' sind offenbar höchstens abzählbar, also ist auch die Menge $P'+P''+P'''$, welche wir kurz P nennen wollen, höchstens abzählbar.

Ich behaupte, daß weder $K-P$ noch eine beliebige Untermenge von $K-P$ eine Zerschneidungsmenge für S ist. Es sei U eine beliebige (echte oder unechte) Untermenge von $K-P$. Betrachten wir die Menge $S-U$; es gilt identisch:

$$S-U = S-(K-P)+(K-U) = M+P'+M^*+P''+M^{**}+P'''+(K-U).$$

4) C. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes.* Fund. Math. IX, S. 129.

Digitized by Google

Die Menge $M+P'$ ist, wie wir schon bewiesen haben, zusammenhängend, und wegen (3) jeder Punkt von K, also umsomehr von $P''+P'''$, ist Häufungspunkt von $M+P'$, da die Menge $M+P'$ alle K_n enthält. Deswegen ist die Summe aller zusammenhängenden Mengen M_x+p_x, wo $p_x \subset P''+P'''$, und der Menge $M+P'$ noch eine zusammenhängende Menge[5]). Da die Mengen M_x, die in M^{**} vorkommen, und deren p_x Punkte nicht zu P''' gehören, stets Häufungsmengen derjenigen M_x Mengen aus M^{**} sind, für welche die p_x Punkte in P''' enthalten sind, so ist, nach Hausdorff, die Menge $M+P'+M^*+P''+M^{**}+P'''$ ebenfalls zusammenhängend. Fügt man dieser Menge noch die Menge $K-U$, welche aus lauter Häufungspunkten von $M+P'$ besteht, hinzu, so erhält man eine zusammenhängende Menge, nämlich die Menge $S-U$, womit unser Satz bewiesen ist.

5) F. Hausdorff, *Mengenlehre,* II. Aufl., S. 152.

Digitized by Google

Über die Singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus[1]).

Von M. Brelot (Paris).

I.

1. Man weiß, daß die analytischen Funktionen in der Umgebung eines singulären Punktes seit langem sehr viel studiert wurden; es ist also etwas erstaunlich, daß die damit verwandte Frage der *Punktsingularitäten der Potentialfunktionen* so lange vernachlässigt wurde; nur in den letzten Jahren wurde, wie das plötzliche Erscheinen von vielen diesbezüglichen Artikeln zeigt, ziemlich allgemein Interesse an einigen sehr einfachen, entsprechenden Sätzen rege, die bis dahin fast unbekannt geblieben waren. Es wurden viele Beweise gegeben, man entwickelte die Frage weiter, und Singularitäten auf Punktmengen wurden studiert. Ich werde über das Wesentliche einen kurzen historischen Überblick geben.

2. An diese Frage wird natürlich wegen der Ähnlichkeit der Integrale der allgemeinen *Differentialgleichungen vom elliptischen Typus* mit den Potentialfunktionen die ähnliche Frage angeknüpft, die diese Integrale betrifft. Die erste Verallgemeinerung besteht also darin, die Integrale in der Umgebung eines Punktes (allgemeiner Punktmenge) zu studieren, in dem sie nicht regulär sind, während die in der Gleichung vorkommenden Funktionen dort regulär sind. Andrerseits soll man auch alle Integrale in der Umgebung von Singularitäten für die Koeffizienten studieren. Diese letzte Frage ist noch fast neu und bietet ein sehr ausgedehntes Gebiet für Untersuchungen. Um davon einen Begriff zu geben, werde ich einige charakteristische Resultate von eigenen Untersuchungen anführen, die einen besonderen Fall betreffen.

II.

1. Ich betrachte zunächst *die Potentialfunktionen, die in der Umgebung des Anfangspunktes* 0 *außerhalb* 0 *eindeutig*[2]) *und harmonisch sind.* Seit sehr langer Zeit sind in der Ebene und im Raum

1) Vorgetragen in der 285. Sitzung am 29. Juni 1932.

2) Was die *mehrdeutigen* Potentialfunktionen betrifft, die ich hier ganz bei Seite lasse, vergl. St. Bergmann, Math. Ztschr. (24); Math. Ann., Bd. 99 u. Bd. 101.

Digitized by Google

eindeutig bestimmte Entwicklungen bekannt, die der analytischen Laurentschen Reihe ähnlich sind, nämlich:

In der Ebene, $(x+iy = re^{i\vartheta})$

$$u(x,y) = u\binom{r}{\vartheta} = h(x,y) + \alpha \log\frac{1}{r} + \sum_1^{+\infty}{}_n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\cdot\frac{1}{r^n},$$

wo $h(x, y)$ eine Funktion ist, die *harmonisch in* 0 ist.

Im Raum von drei Dimensionen, mit den Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) oder kürzer (r, p), wo p der Punkt (ϑ, φ) auf der Einheits-Kugel Σ bedeutet:

$$(2) \qquad u(x,y,z) = u\binom{r}{p} = h(x,y,z) + \frac{\alpha}{r} + \sum_1^{+\infty} Y_n(p)\cdot\frac{1}{r^{n+1}},$$

wo $h(x, y, z)$ eine in 0 harmonische Funktion und die Y_n lineare Kombinationen von Kugelfunktionen (Laplaceschen Funktionen) sind.

Man würde eine ähnliche Entwicklung im Raum von $n > 3$ Dimensionen haben. Dazu bemerken wir noch, daß man umgekehrt solche Reihen, sogar mit *unendlich* vielen Gliedern, bilden kann, derart, daß die Summe eine Funktion ist, die harmonisch in der Umgebung von 0, aber singulär in 0 ist. Appell unterschied schon 1884[3]) bei den Singularitäten in 0 *Pole* und *wesentlich singuläre Stelle.* Im allgemeinen entsprechen gewissen Voraussetzungen über das Verhalten der Funktion u in 0 Eigenschaften der Entwicklung. — Auf die wichtigsten Resultate in dieser Richtung werde ich in chronologischer Ordnung hinweisen.

2. *Im Falle der Ebene* berechnete Schwarz (Crelles Journal 1872) die Entwicklungskoeffizienten von (1) durch gewisse Integrale über u und *leitete folgende Resultate*[4]) ab:

1) Ist $|u|$ *beschränkt*, so sind alle Koeffizienten α, A_n, B_n Null; u ist also mit einer in 0 harmonischen Funktion identisch, d. h. u ist *regulär* in 0.

2) Ist, $r^\mu |u|$ *beschränkt* $(\mu \geqq 0)$, so besteht die Reihe $\sum_1^{+\infty}{}_n$ der Entwicklung (1) nur aus *endlich* vielen Gliedern.

Der Beweis zeigt genauer, daß alle die A_n und B_n Null sind, für welche $n > \mu$ ist.

3. Poincaré bewies sehr einfach in seinen Vorlesungen (1894—95) über die Potentialtheorie die 1899 erschienen[5]), ähnliche Sätze *für den Raum:*

3) Appell, Acta math., Bd. 4, S. 321.

4) Schwarz, Crelles Journal, Bd. 74, S. 252—253 oder Gesammelte math. Abhandlungen, Zweiter Bd., S. 209 u. 210.

5) Poincaré, Théorie du potentiel newtonien (Paris, Carré et Naud 1899). Vergl. S. 211 und 209.

Digitized by Google

Strebt $r^{n+1}|u|$ gegen Null wenn r gegen Null strebt, so ist das zugehörige $Y_n(p)$ Null und es verschwinden auch die folgenden Glieder der Entwicklung (2); strebt $r|u|$ gegen Null, so ist auch α Null.

Das enthält also das Resultat, daß u regulär in 0 ist, wenn u beschränkt ist.

4. In den vorangehenden Resultaten war der absolute Betrag von u gewissen Beschränkungen unterworfen. Andere Sätze erhielt man mit *einseitigen Beschränkungen* von u.

Gegen 1900 lehrte Picard an der Sorbonne die folgenden neuen Sätze, die er erst viel später (1923) veröffentlichte[6]).

1) Strebt *in der Ebene* u *gegen* $+\infty$, wenn (x, y) irgendwie gegen 0 strebt, so ist u in der Umgebung von 0 von der Form:

$$u = \alpha \log \frac{1}{r} + \text{harm. Funktion} \qquad (\alpha = \text{konst.} > 0) \tag{3}$$

d. h., daß die Entwicklung (1) keine Reihe in $\frac{1}{r}$ enthält. Der sehr einfache Beweis basiert auf der Betrachtung der entsprechenden analytischen Funktion und man kann ihn unmittelbar so darstellen, daß die *allgemeinere* Voraussetzung, daß u *nach unten beschränkt* ist, die folgende Form für u nach sich zieht:

$$u = \alpha \log \frac{1}{r} + \text{harm. Funktion} \qquad (\alpha = \text{konst.} \geqq 0). \tag{3'}$$

2) Wenn in ähnlicher Weise *im Raum* u gegen $+\infty$ strebt, wenn der Punkt (x, y, z) irgendwie gegen 0 strebt, so ist u von der Form

$$u = \frac{\alpha}{r} + \text{harm. Funktion} \qquad (\alpha = \text{konst.} > 0). \tag{4}$$

Der Beweis benutzt die Fläche $u =$ konst. und die Greensche Formel. Er kann nicht leicht verallgemeinert werden in dem Sinne, daß man nur vorauszusetzen braucht, daß u nach unten beschränkt ist.

Unabhängig hiervon schlug Bocher in einer Aufgabensammlung[7]) schon 1899 vor, die harmonischen Funktionen von zwei Veränderlichen in der Umgebung eines Punktes mittels der analytischen Funktionen zu studieren und im besonderen den vorhergenannten Satz über die Form (3) zu beweisen. Dann veröffentlichte er (1903)

6) C. R. Ac. Sc., t. 176, pp. 933, 1025. — Dasselbe in: Bull. Soc. math. de France, t. LII, 1924, p. 162—166.

7) Bocher, Annals of math., Vol. I (1899—1900), p. 37—38.

Digitized by Google

eine wichtige Arbeit[8]), wo er außer dem Satz von der Regularität für beschränkte Potentialfunktionen die letzten Sätze über die Formen (3) und (4), sogar mit der Verallgemeinerung auf den Raum von $n > 3$ Dimensionen bewies. —

Strebt ferner u gegen $+\infty$ auf *gewissen* Punktfolgen, die gegen 0 streben, aber bleibt u beschränkt auf *anderen*, so bewies er, daß u auch nicht nach unten beschränkt ist. Daraus können wir unmittelbar folgern, was Bocher selbst nicht ausdrücklich tat, daß die einzige Bedingung:

(5) $\qquad u > A = \text{konst.}$ (in der Umgebung von 0)

die folgende Form für u mit sich bringt

$$\text{(Ebene)} \qquad (3') \quad u = \alpha \log \frac{1}{r} + \text{harm. Funktion}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Raum} \\ \text{von } n \geqq 3 \text{ Dim.}\end{pmatrix} \quad (4') \quad u = \frac{\alpha}{r^{n-2}} + \text{harm. Funktion.} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

Die Beweise von Bocher benutzen auch die Flächen bzw. Kurven $u = \text{konst.}$

5. Nach einer Notiz von Noaillon[9]) (1923) über das Verhalten einer harmonischen Funktion im Unendlichen, veröffentlichte Picard seine vorhergenannten Sätze in den Comptes Rendus[10]). Das lenkte die Aufmerksamkeit auf die Frage der Punktsingularitäten der harmonischen Funktionen, und bald erscheinen darüber viele Artikel von Bouligand[11]), Lebesgue[12]), Noaillon[13]), Stozek[14]), Picone[15]), Raynor[16]), Kellog[17]), die neue Beweise und Ergänzungen brachten. Davon werde ich das Wichtigste erwähnen.

8) Bocher, Bulletin of the amer. math. Society, Vol. IX (1903), p. 455.

9) Noaillon, C. R. Ac. Sc. 26 mars 1923; t. 176, p. 879.

10) Picard, C. R. Ac. Sc. 3 Avril et 16 Avril 1923; t. 176, pp. 933, 1025.

11) Bouligand, C. R. Ac. Sc. (1923), t. 176, pp. 1037, 1200, 1366. — (16 Nov. 1925), t. 181, p. 705. — Memorial des Sc. math. (XI) (1926), chap. VII. — Annales de l'Ecole Normale (1931).

12) Lebesgue, C. R. Ac. Sc., t. 176 (1923), pp. 1097, 1270.

13) Noaillon, C. R. Soc. math. de France, t. 51 (14 Nov. 1923), p. 39. — C. R. Ac. Sc., t. 184 (fév. 1927), p. 260.

14) Stozek, C. R. Ac. Sc. (9 mars 1925), t. 180. — Ausführlicher vergl. Annales de la Soc. polonaise de math. (1925), p. 51.

15) Picone, R. sella R. Acc. dei Lincei 1926; I p. 655, II p. 18. Er studiert und benutzt die Mittelwerte auf einem Kreis um 0.

16) Raynor, Bull. of the am. math. Society, t. 32 (1926), p. 537—545.

17) Kellog, Bull. of the am. math. Society, t. 32 (1926), p. 664. — Foundations of Potential Theory (Berlin 1929), p. 268.

Digitized by Google

Stozek bewies *ausdrücklich* für 2 und 3 Dimensionen (und man könnte unmittelbar für n Dimensionen verallgemeinern), daß die Beschränkung (5) die Formen (3′) bzw. (4′) mit sich bringt. Ferner bemerkt er, daß die Bedingung (5) durch die allgemeine Bedingung

$$u > -\alpha \log \frac{1}{r} \quad \text{bzw.} \quad u > -\frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

unmittelbar ersetzt werden kann. Übrigens benutzt sein Beweis nicht die Kurven bzw. Flächen $u = \text{konst.}$, für welche ergänzende Betrachtungen in gleichen Beweisen von Picard und Bocher wünschenswert wären [18]).

Bouligand führte eine neue Methode [19]) ein, um die Pole und die wesentlich singulären Stellen zu charakterisieren, und verallgemeinerte [20]) im besonderen die Resultate von Schwarz-Poincaré durch eine *einseitige* Beschränkung:

Ist im Falle des Raumes $u < \frac{A}{r^\mu}$, so müssen die Glieder der Summe $\sum_1^{+\infty}{}_n$ von der Entwicklung (2) verschwinden, für welche $n+1 > \mu$, und man kann ein ähnliches Resultat in der Ebene und im Raum von $n > 3$ Dimensionen erhalten.

Alle die vorhergenannten Resultate können jetzt sehr kurz und einfach bewiesen werden [21]).

---

18) Vergl. Raynor, Bull. of the am. math. Society, Bd. 32, S. 537 u. 538.

19) Vergl. die obere Fußnote über Bouligand und am besten seine letzte Arbeit. Die Methode basiert auf einer Integro-Differentialgleichung.

20) Vergl. Bouligand, C. R. Ac. Sc. (16 Nov. 1925), t. 181, p. 705. — Annales de l'Ecole Normale (1931), p. 114.

21) Kurz werde ich für das Wichtigste folgende Beweise geben:

1) *Ist u beschränkt, so ist u regulär in* 0 (hebbare Unstetigkeit).

Es genügt zu beweisen, daß die beschränkte Funktion u, wenn sie am Rande eines Kreises bzw. Kugel um 0 verschwindet, Null sein muß. Man vergleicht u mit $v = \varepsilon \log \frac{1}{0M}$ $\left(\text{bzw. } v = \varepsilon \cdot \frac{1}{0M^{n-2}}\right)$ und sieht, daß $\pm u < v$ für irgendein $\varepsilon > 0$ ist. Daher $u = 0$.

Bemerkung: Man verallgemeinert unmittelbar den Satz für die Voraussetzung $\frac{u}{\log \frac{1}{0M}} \to 0$ $\left(\text{bzw. } \frac{u}{\frac{1}{0M^{n-2}}} \to 0\right)$.

Vergl. für den Beweis: Zaremba [(Ac. Sc. Cracovie 5 avril 1909, p. 561) oder Cours d'analyse de Goursat, t. III, 3e éd., p. 205—6], Lebesgue (C. R. Ac. Sc., t. 176, pp. 1097, 1270).

2) *Ist allgemeiner, z. B. im Raum von 3 Dimensionen, $u < \frac{A}{r^\mu}$, so sind alle Glieder in $\frac{1}{r^m}$ der Entwicklung* (2) *Null für $m > \mu$.*

Digitized by Google

Ich möchte noch bemerken, daß man durch Transformation mittels reziproker Radien in der Ebene bzw. durch die Lordkelvinsche Transformation im Raum entsprechende Resultate für den Punkt unendlich erhält.

6. Andrerseits hat man auch seit einigen Jahren *Singularitäten in Punktmengen* studiert. Zunächst bewies Lebesgue[22]), daß keine analytische, sogar keine rektifizierbare Kurve im Raum für beschränkte Potentialfunktionen singulär sein kann.

Bouligand[23]) verallgemeinerte dieses Resultat auf Punktmengen von der Kapazität Null; mit ihm entwickelten Kellog und Vasilesco[24]) die Frage in Verbindung mit den modernen Untersuchungen über das Dirichletsche Problem[25]).

III.

1. Ich komme nun zu allgemeineren *Differentialgleichungen vom elliptischen Typus.* Zuerst Picard 1900 und nach ihm verschiedene

Es genügt den Fall $\mu \geqq 1$ zu betrachten. Durch Integration über die Einheitskugel Σ (die der Punkt p beschreibt) erhält man aus (2)

(a) $$\iint_{\Sigma} u\, d\sigma_p = \text{konst.} + \frac{\alpha}{r} \qquad (d\sigma_p = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi)\left(p \equiv \frac{\varphi}{\vartheta}\right),$$

(b) $$\iint_{\Sigma} u Y_n(p)\, d\sigma_p = \iint_{\Sigma} h Y_n(p)\, d\sigma_p + \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{\Sigma} Y_n^2(p)\, d\sigma_p.$$

Aus (a) folgt leicht (nach Bouligand):

$$\iint_{\Sigma} |u|\, d\sigma_p < \frac{B}{r^{\mu}},$$

was die gegebene Bedingung ersetzen könnte (auch für $\mu < 1$). Mittels (b) kommt man für $n + 1 > \mu$ zu:

$$\iint_{\Sigma} Y_n^2(p)\, d\sigma_p = 0, \quad Y_n \equiv 0.$$

Vergl. für den Beweis: Poincaré (loc. cit.), Bouligand (Annales de l'Ecole normale 1931, p. 114). — Evans, The log. Potential (Am. math. Soc. Coll. Publ. VI, 1927), S. 109—112.

Es wäre ähnlich in der Ebene und im Raum von $n > 3$ Dimensionen. Was im allgemeinen die harmonischen Funktionen in der Ebene betrifft, vergl. auch Osgood, Funktionentheorie, 5. Aufl. (1920). Erster Band (Kap. 13).

22) Lebesgue, C. R. Ac. Sc., t. 176, p. 1271.

23) C. R. Ac. Sc. 26 Janvier 1925. — Annales de la Soc. pol. de math. (1925). Mémorial des Sc. math. XI (1926).

24) Vergl. am wichtigsten: Kellog, Foundations of Potential Theory; Vasilesco, Journal de math. (1930), S. 81—111.

25) Vergl. meinen Vortrag *„Moderne Untersuchungen über das Dirichletsche Problem“* der im „Jahresbericht“ erscheinen wird. Dort wird man eine Bibliographie finden.

Digitized by Google

Verfasser bewiesen für allmählich größere Klassen von solchen Gleichungen die Existenz von *Grundlösungen*[26]). Mit solchen Grundlösungen, die den elementaren Potentialfunktionen $\log\frac{1}{r}$ bzw. $\frac{1}{r^{n-2}}$ ähnlich sind, bewies Bocher[27]) (1903) für gewisse Fälle einige Sätze, die seinen Sätzen im harmonischen Fall ähneln, im besonderen, daß ein isolierter Punkt, der regulär für die Koeffizienten der Gleichung ist, keine Singularität für beschränkte Integrale darbieten kann. Kürzlich gab Giraud[28]) sehr allgemeine Resultate von dieser Art.

2. Andrerseits sollte man auch *die Integrale in der Umgebung eines Punktes studieren, der nicht regulär für die Koeffizienten* ist. Bouligand[29]) verallgemeinerte für die Gleichung $\Delta u = \lambda(r)u$ seine Methoden des harmonischen Falles und erhielt so gewisse ähnliche Resultate im Falle, wo $\lambda(r)r^2$ gegen einen *bestimmten endlichen Limes* $\mu_0 > -\frac{1}{4}$ strebt, wenn $r \to 0$ strebt.

Schon früher wurde im Raum von $n \geqq 2$ Dimensionen die ähnliche Gleichung

$$\Delta u = c(M)\,u(M) \qquad c(M) \geqq 0 \tag{6}$$

von mir studiert[30]), wo $c(M)$ einen isolierten singulären Punkt 0 besitzt. Ich setze *nur* voraus, daß c *stetig* und *nicht negativ* in der Umgebung von 0 *außerhalb* 0 ist; aber ich mache die gewöhnlichen ergänzenden Voraussetzungen über c, wie die Höldersche Bedingung, überflüssig, durch die Betrachtung eines verallgemeinerten Laplaceschen Operatores. Es muß für die Untersuchungen hervorgehoben werden, daß die positiven Integrale von (6) subharmonische Funktionen sind, was einer bekannten Interpretation von (6) als Temperatur-Gleichgewichtsbedingung entspricht.

Es gibt für die *beschränkten Integrale allgemeine* Eigenschaften: z. B. die Existenz eines *Mittelwertes* in 0 (d. h. Limes des Mittel-

26) Vergl. die Bibliographie im Artikel der Encyklopädie (Lichtenstein 1924), II C. 12, S. 1288 und 1296. (Am wichtigsten ist die Arbeit von E. E. Levi [R. di Palermo, Bd. 24 (1907), S. 275], die den allgemeinsten linearen Fall mit nicht analytischen Koeffizienten mittels der Fredholmschen Theorie studierte).

Weitere Literatur: Giraud und Gevrey [C. R. Ac. Sc., Annales de l'E. N. (im besonderen 1930 u. 1932), Bull. Sc. math., Journal de math.]. Lichtenstein: Vorlesungen über einige Klassen nicht linearer Integralgleichungen ... (1931).

27) Bocher (loc. cit.), S. 461.

28) Giraud, C. R. Ac. Sc. 24 août 1931 (t. 193, p. 354), 4 Avril 1932 (t. 194, p. 1142) und demnächst erscheinende Arbeiten.

29) Bouligand, Annales de l'Ecole normale (1931), p. 122.

30) Vergl. C. R. Ac. Sc. 1929—1930; R. dei Lincei 1930; R. di Palermo (1931). Am besten Annales de l'Ecole normale (1931) (Thèse).

Digitized by Google

wertes auf einem Kreis bzw. Kugelfläche um 0), der, falls das Integral > 0 ist, mit dem *oberen Limes* in 0 übereinstimmt[31]); ein anderes Beispiel ist, daß, etwa in der Ebene, $\iint c(M)\,u(M)\,d\omega_M$ und sogar $\iint \log \frac{1}{0M}\, c(M)\,u(M)\,d\omega_M$ immer einen *bestimmten* und *endlichen* Wert haben. Gewissen ergänzenden Voraussetzungen über das Verhalten von $c(M)$ in 0 entsprechen Eigenschaften der Integrale: z. B., wenn $c(M) \leqq \frac{A}{0M^\alpha}$ $(0 \leqq \alpha < 2)$ ist, so sind alle (beschränkte) Integrale *stetig* in 0; wenn $c(M) \geqq \frac{B}{0M^2}$ ist, so müssen alle (beschränkten) Integrale gleichzeitig mit $\overline{0M}$ *verschwinden*.

Es gibt auch allgemeine Resultate über die Integrale die *nur entweder nach oben oder nach unten beschränkt sind*. Wenn ein Integral u *nach unten beschränkt* ist, so ist es die Summe eines beschränkten Integrals und eines positiven Integrals; außerdem ist u, z. B. in der Ebene, von der Form

$$u = 2\pi\varphi(M)\log\frac{1}{0M} \tag{7}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) $\varphi(M)$ besitzt einen *Mittelwert* in 0, er sei $\varphi_m(0)$, der dem oberen Limes $\overline{\varphi(0)}$ von φ in 0 gleich ist.

2) Der Flux $\int_\gamma \frac{du}{dn}\,ds$ (n = innere Normale) strebt gegen einen endlichen oder unendlichen, aber bestimmten Limes Φ, wenn die Kurve γ um 0 gegen den Punkt 0 strebt.

3) $$\varphi_m(0) = \overline{\varphi(0)} = \Phi \geqq 0.$$

Dieser gemeinsame Wert ist 0, wenn u beschränkt ist, und *nur* in diesem Fall.

Ich füge hinzu, daß irgend ein Integral u nach oben oder nach unten beschränkt sein muß, sobald $\left|\frac{u}{\log\frac{1}{0M}}\right|$ $\left(\text{bzw. } \left|\frac{u}{\frac{1}{\overline{0M}^{n-2}}}\right|\right)$ beschränkt ist[32]).

31) Diese Integrale brauchen nicht immer notwendig in 0 stetig zu sein. Vergl. Beispiele in der demnächst erscheinenden Arbeit „Sur les singularités ponctuelles des fonctions sous harmoniques“ (Bull. Sc. Math.). Sie sind aber immer „fast stetig“ in 0 (vergl. thèse (loc. cit.), chap. II).

32) Wenn es wahr ist, daß alle positiven Integrale, die am Rande eines Kreises (bzw. Kugel) um 0 verschwinden, einander proportional sind, so ist der folgende Satz gültig: Ist $u < \alpha \log\frac{1}{0M}$ $\left(\text{bzw. } < \frac{\alpha}{\overline{0M}^{n-2}}\right)$, so ist u nach oben *oder* nach unten beschränkt.

Digitized by Google

Natürlich habe ich auch viele Existenzfragen und Probleme vom Dirichletschen Typus studiert. Es ist z. B. möglich, c so zu wählen, daß alle Integrale von der Form (7) mit *beschränktem* φ selbst beschränkt sind; es gibt also dann keine unbeschränkten Integrale mit beschränktem φ, und dieser Fall ist *identisch* mit dem, wo alle beschränkten Integrale in 0 verschwinden.

Nach diesen Studien war es angezeigt, den Fall zu betrachten, wo c *auf einer Punktmenge singulär ist.* Was die Punktmengen von der Kapazität 0 betrifft, werde ich kurz sagen, daß die beschränkten Integrale in jedem Punkt der Menge sich so betragen, als ob er isoliert wäre [33]).

Eine allgemeinere Frage würde die sein, das Verhalten der Integrale am Rande eines Gebietes zu studieren, wo c definiert ist. Dies schließt sich an das Dirichletsche Problem an, das ich im allgemeinen Wienerschen Sinne ebenfalls studiert habe [34]).

Alles dies ist noch wenig bekannt, sogar gewisse wichtige Sätze über die Potentialfunktionen und ganz besonders die Geschichte der Frage. So möchte ich hoffen, daß dieser kurze Überblick auf diese Resultate und die Möglichkeit weiterer Untersuchungen [35]) über die Differentialgleichungen vom elliptischen Typus einiges Interesse gelenkt hat.

---

33) Vergl. Bulletin Sciences math., sept. 1931.

34) Vergl. meinen Vortrag (loc. cit.) „Moderne Untersuchungen ... (Jahresbericht), R. Ist. Lombardo, 1930, LXIII, Fasc. XI—XV; 1932, LXV, Fasc. I—V. Bull. Sc. math., sept. 1931, Avril 1932 und eine weitere demnächst erscheinende Notiz.

35) Ich habe auch die Integrale von $\Delta u = f(M)$ in der Umgebung eines singulären Punktes von f studiert. Vergl. thèse (loc. cit.), chap. II § II und den demnächst erscheinenden Artikel „Sur les singularités ponctuelles des fonctions sous harmoniques“ (loc. cit.) Bull. Sc. Math.

Digitized by Google

Euklidische Geometrie, nichteuklidische Geometrie und Raum — Zeitstruktur im Systeme Spinozas[1]).

Von Gerhard Haenzel in Berlin.

INHALT.

I. Tempus — Aeternitas. Existentia — Essentia.
II. Zeitlich veränderliche Metrik.
III. Sekundäre Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz.
IV. Zeitlich veränderliche Riemannmetrik.
V. Zeitlich veränderliche Lobatschewskymetrik.
VI. Der Raum mit zeitlich veränderlichem Krümmungsmaß.
VII. Nichteuklidische Geometrie — Existentia. Euklidische Geometrie — Essentia.

Gleich nach der Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrien entwickelte sich ein langer und heftiger Streit um die Gültigkeit und Priorität der Euklidischen Geometrie. Eine umfangreiche Literatur entstand über die Frage, welche Geometrie die richtige oder wenigstens die wahrscheinlichste sei. Mit dem Hervortreten der Relativitätstheorie hat die Frage nach der Struktur von Raum und Zeit — gestützt auf die Untersuchungen Riemanns — von Neuem das Interesse beansprucht.

Alle auf dieses Problem seitens der Physiker und Mathematiker gerichteten Untersuchungen tragen zwei charakteristische Merkmale: Einmal sollen die Begriffe Raum und Zeit, jeder für sich betrachtet, „zu bloßen Schatten herabsinken“ und nur die Verkoppelung beider zu einer Raum-Zeit-Struktur, einer Welt, soll das Weltgeschehen in Wahrheit tragen und verkörpern. Zum anderen wird kein geometrischer Raum, kein mathematisches Kontinuum, der Untersuchung unterworfen. Sondern die Materie, die das betrachtete Raumstück erfüllt, soll den tragenden Untergrund für die jeweils gültige Metrik abgeben. Die Geometrie wird zur Feldtheorie abgewandelt. Da lösen sich dann neue und neuste Strukturen einander ab gleichsam als ob sie physikalische Versuchshypothesen wären. Diese Theorien treten mit dem Anspruch auf, ein neues philosophisches Weltbild geschaffen zu haben, vornehmlich gestützt auf den Satz, daß durch die Entwicklung der

1) Vorgelegt in der 285. Sitzung am 29. Juni 1932.

Digitized by Google

Nichteuklidischen Geometrie und ihrer modernen Fortbildungen die einschlägigen Auffassungen Kants widerlegt seien.

Unter diesen Umständen drängt sich die Frage auf, ob ein solcher Anspruch berechtigt ist, oder ob der Nichteuklidischen Geometrie ein anderer Platz zugewiesen werden muß.

I.

Tempus — Aeternitas. Existentia — Essentia.

Die Erkenntnistheorie des Benedictus de Spinoza, im unvollendeten „Tractatus de intellectus emendatione" vorbereitet und in der „Ethik" vollendet, baut auf dem Fundament einer Anzahl von Grundbegriffen, zu denen als wichtigste die folgenden zählen[2]):

1. Die *Substanz*. Für sie gilt: „Ethices I, definitio III. Per substantiam intelligo id, quod in se est et per se concipitur: hoc est id, cujus conceptus non indiget conceptu alterius rei, a quo formari debeat. — Definitio VI. Per Deum intelligo ens absolute infinitum, hoc est, substantiam constantem infinitis attributis, quorum unumquodque aeternam et infinitam essentiam exprimit.

2. Die *Kausalität*. Ihre Gültigkeit und Charakteristik zeigt sich vornehmlich durch: „Ethices I, Axiom III. Ex data causa determinata necessario sequitur effectus et contra; si nulla detur determinata causa, impossibile est, ut effectus sequatur. — Axiom IV. Effectus cognitio a cognitione causae dependet et eandem involvit.

3. Der Satz des *ausgeschlossenem Dritten* ist in den Schlußweisen der Ethik verwendet.

4. Das *immanente Denken*, von Spinoza als „cogitatio" bezeichnet, wird in Form des Lehrsatzes eingeführt: „Ethices II, propos. I. Cogitatio attributum Dei est, sive Deus est res cogitans".

5. Die *räumliche Ausdehnung*, extensio genannt, postuliert der Satz: „Ethices II, propos. II. Extensio attributum Dei est, sive Deus est res extensa".

Die *Zeit* gehört *nicht* zu den Fundamentalbegriffen dieser Erkenntnistheorie. Die der Zeit zugewiesene Rolle ist für Spinozas gesamtes System von ganz außerordentlicher Bedeutung und zwar

2) Das more geometrico modifizierte Latein der Ethik ist ohne Schädigung seiner großen begrifflichen Schärfe schwer zu übersetzen. Die Zitate sind der Ausgabe „Opera posthuma", 1677 entnommen. Einige dabei gesperrt gedruckte Worte sind es im Original nicht.

Digitized by Google

wird ihre Stellung durch folgende Sätze der Ethik deutlich charakterisiert:

„Ethices I, definitio VIII. Per aeternitatem intelligo ipsam existentiam, quatenus ex sola rei aeternae definitione necessario sequi concipitur. — Explic. Talis enim existentia, ut aeterna veritas, sicut rei essentia, concipitur, proptereaque per durationem, aut tempus explicari non potest, tametsi duratio principio et fine carere concipiatur. — Eth. I, Propos. XXIV, Coroll. ... nam sive res existant, sive non existant, quotiescunque ad earum essentiam attendimus, eandem nec existentiam, nec durationem involvere comperimus. — Eth. II, Propos. XLIV, Coroll. II. De natura Rationis est, res sub quadam aeternitatis specie percipere. — Propos. XLV, Schol. Hic per existentiam non intelligo durationem, ... — Eth. V, Propos. XXIII, Schol. Est, uti diximus, haec idea, quae Corporis essentiam sub specie aeternitatis exprimit, certus cogitandi modus, quid ad Mentis essentiam pertinet, ... Mens igitur nostra eatenus tantum potest dici durare, eiusque existentia certo tempore definiri potest, quatenus actualem Corporis existentiam involvit, et eatenus tantum potentiam habet rerum existentiam tempore determinandi, easque sub duratione concipiendi. — Eth. V, Propos. XXIX. Quicquid Mens sub specie aeternitatis intelligit, id ex eo non intelligit, quod Corporis praesentem actualem existentiam concipit; sed ex eo, quod Corporis essentiam concipit sub specie aeternitatis. — Demonstr. Quatenus Mens praesentem sui Corporis existentiam concipit, eatenus durationem concipit, quae tempore determinari potest, et eatenus tantum potentiam habet concipiendi res cum relatione ad tempus. ... — Schol. Res duobus modis a nobis ut actuales concipiuntur, vel quatenus easdem cum relatione ad certum tempus et locum existere, vel quatenus ipsas in Deo contineri, et ex naturae divinae necesseritate consequi concipimus. Quae autem hoc secundo modo ut verae seul reales concipiuntur, eas sub aeternitatis specie concipimus, ...“

Nach diesen Ausführungen sind zwei Formen des Erkennens und Denkens zu unterscheiden, die wir im folgenden als „Form A“ und „Form B“ bezeichnen:

Form A. In der Form A des Erkennens spielt die Zeit als modus cogitandi und als Ordnungsskala für die dem Menschen zugänglichen Erfahrungen eine wichtige Rolle. Die Erfahrungstatsachen werden „cum relatione ad tempus et locum“ zur Kenntnis genommen. Die Zeit ist eine durch die menschliche Natur bedingte Hilfsvorstellung.

Digitized by Google

Form B. Für das auf die Gesetze des Weltgeschehens gerichtete immanente Denken (cogitatio) sind alle Dinge zeitlos, und es gibt in Wirklichkeit für deren Gesetze keine Zeit[3]).

Die Gegenüberstellung der Formen A und B läßt weite Gebiete dieser Erkenntnistheorie systematisch übersehen; Ursache und Wirkung, deren Trennung die Zeit voraussetzt, fallen in der Form B zusammen. Parallel zu den Formen A und B läuft die Unterscheidung der „modi infiniti" von den „modi finiti":

α) Die modi finiti sind die räumlich und zeitlich beschränkten Erscheinungen. Sie werden „cum relatione ad tempus et locum" durch Erfahrung wahrgenommen. Zu ihnen gehören die Einzelerscheinungen körperlicher und geistiger Art.

β) Die modi infiniti werden aus den Grundbegriffen abgeleitet; insbesondere folgt aus der cogitatio das zeitlose aktive Denken (intellectus infinitus), aus der extensio die zeitlosen Gesetze der allgemeinen Weltordnung (facies totius universi).

Die modi infiniti sind denknotwendig, die modi finiti sind es nicht.

Die Hegemonie der modi infiniti bringt eine Annäherung der Erkenntnistheorie Spinozas an die Ideenlehre Platos zum Ausdruck.

Die Anwendung der Formen A und B auf die Dinge führt schließlich organisch auf die Unterscheidung der sinnlich-zeitlichen „existentia" der Dinge von der begrifflich-zeitlosen „essentia":

α) Die existentia jedes Dinges — seine wahrnehmbare Erscheinungsform — ist nicht eindeutig, ist zeitlich bedingt und keineswegs denknotwendig.

β) Die essentia ist die zeitlos denknotwendige Wahrheit, die das innerste Wesen des Dinges ausmacht.

Der so aufgebaute Teil der Erkenntnistheorie Spinozas läßt sich durch folgendes Schema charakterisieren:

	Tempus	Aeternitas	
Form A	modus finitus	modus infinitus	Form B
	existentia	essentia	

3) Hierzu G. Cantor: „... Die Zeit ist meines Erachtens eine Vorstellung, die zu ihrer deutlichen Erklärung den von ihr unabhängigen Kontinuitätsbegriff zur Voraussetzung hat und sogar mit Zuhilfenahme desselben weder objektiv als eine Substanz, noch subjektiv als eine notwendige apriorische Anschauungsform aufgefaßt werden kann, sondern nichts anderes als ein Hilfs- und Beziehungsbegriff ist, durch welchen die Relation zwischen verschiedenen in der Natur vorkommenden und von uns wahrgenommenen Bewegungen festgestellt wird". (Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Nr. 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Math. Annalen, Bd. 21, 1883.)

Digitized by Google

Die Formen A und B sollen auf die Frage nach der Struktur des Raumes angewendet werden. Das gibt zugleich die Gelegenheit diese Formen durch geometrische Untersuchungen zu charakterisieren und anschaulich zu unterscheiden.

II.

Zeitlich veränderliche Metrik.

Die in der Nichteuklidischen Geometrie entwickelten allgemeinen Gesetze der Raummessung gegründet auf eine Fläche zweiter Ordnung als Fundamentalfläche der Metrik, sowie die Fortbildung und Vollendung dieser Gesetze durch Riemann seien als bekannt vorausgesetzt. Die Verknüpfung der Raummetrik mit der Zeitmetrik gewinnt die größte Bedeutung. Sie wird meist dadurch vollzogen, daß die Zeit als „vierte Dimension" in die mathematische Betrachtung eingeht. Dadurch wird das Problem aus der Anschauung in das Gebiet der Formalistik verschoben. Dieses Verfahren, das nicht von Riemann selbst herrührt, hat nichts mit Geometrie zutun.

Eine zeitlich veränderliche nichteuklidische Raumstruktur läßt sich aber in anschaulicher und organischer Weise dadurch begründen, daß die Fundamentalfläche der nichteuklidischen Maßbestimmung im Verlaufe der Zeit einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung, d. h. einen F^2-Büschel — oder einen Teil eines solchen Büschels — durchläuft. Zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung $F_1^2 = 0$, $F_2^2 = 0$ bestimmen einen sie verbindenden F^2-Büschel mit Hilfe eines Parameters λ:

$$F_1^2 + \lambda . F_2^2 = 0, \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty .$$

Wird hier der Parameter λ zu einer eindeutigen, reellen und stetigen Funktion $f(t)$ der Zeit t, so gehört zu jedem Augenblicke je *eine* Fläche zweiter Ordnung des F^2-Büschels, und diese Fläche bestimmt als Fundamentalfläche die in jenem Augenblick gültige Metrik. Dieser Ansatz einer zeitlich veränderlichen Metrik läßt eine größere Anzahl verschiedener Wege offen, die sich schon durch die verschiedenen Arten des zugrunde gelegten F^2-Büschels unterscheiden. Die Klassifikation der F^2-Büschel gibt eine Übersicht über alle hier möglichen Fälle, und dabei spielt die Raumkurve vierter Ordnung erster Art als Basiskurve des F^2-Büschels, d. h. als gemeinsame Schnittkurve seiner Flächen, eine ausschlaggebende Rolle.

Unter allen im Rahmen dieses Ansatzes zulässigen Strukturen sind die den Hypothesen von Riemann und Lobatschefsky

Digitized by Google

entsprechenden Systeme die wichtigsten. Sie können dadurch erhalten werden, daß als Basiskurve ein aus vier Geraden gebildetes windschiefes Vierseit zugrunde gelegt wird. Für die Riemannmetrik besteht dieses aus zwei Paaren konjugiert imaginären Geraden zweiter Art, für die Lobatschefskymetrik aus zwei Paaren konjugiert imaginären Geraden erster Art. Die beiden auf diese Weise entstehenden zeitlich veränderlichen Metriken werden im folgenden auf geometrischer Basis untersucht. Eine solche Basis bot die Strahlengeometrie in der von Herrn Jolles synthetisch entwickelten Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz. Dieser Ausgangspunkt bietet nicht zu unterschätzende methodische Vorteile: Bei ihr übernimmt die lineare Strahlenkongruenz für die zeitlich veränderlichen Metriken die Rolle, die sonst in der zeitlich invarianten nichteuklidischen Geometrie die Fläche zweiter Ordnung als Fundamentalfläche der Metrik innehat. Dadurch ist es möglich, eine Raum-Zeit-Verknüpfung im Gebiete der nichteuklidischen Geometrie vorzunehmen, ohne den dreidimensionalen Raum zu verlassen. Die geometrische Konstruktion und ihre analytische Formulierung bleiben dabei äußerlich getrennt.

III.

Sekundäre Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz.

1. Die drei Gegenkantenpaare $q, r; s, t; u, v$ des Koordinatentetraeders seien dargestellt durch:

$$\begin{aligned} q&: \; x_1 = 0, \; x_2 = 0. & r&: \; x_3 = 0, \; x_4 = 0. \\ s&: \; x_1 = 0, \; x_3 = 0. & t&: \; x_2 = 0, \; x_4 = 0. \\ u&: \; x_1 = 0, \; x_4 = 0. & v&: \; x_2 = 0, \; x_3 = 0. \end{aligned}$$

Die Gegenkanten s und t bestimmen eine lineare Strahlenkongruenz C_1^s als deren Leitgeraden. Sie ist bei Benutzung homogener Linienkoordinaten p_{ik} durch die Gleichungen gekennzeichnet:

$$C_1^s: \quad p_{13} = 0, \; p_{42} = 0.$$

Die übrigen Gegenkanten q, r, u, v des Tetraeders bilden ein einfaches Raumvierseit. Es ist Basisvierseit des F^2-Büschels F^2_{qrsr} mittels eines Parameters λ dargestellt durch:

$$F^2_{qruv}: \quad x_1 x_3 - \lambda . x_2 x_4 = 0 \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty.$$

Die ∞^2 Kongruenzstrahlen von C_1^s sind paarweise reziproke Polaren für die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv}. Eine derartige involutorische Paarung der ∞^2 Kongruenzstrahlen heißt nach Herrn

Digitized by Google

Jolles[4]) eine *sekundäre Involution* auf der linearen Kongruenz C_1^3, die polaren Räume der ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} heißen *sekundäre* polare Räume der Kongruenz. Die Koordinaten p_{ik}, p'_{ik} konjugierter Strahlen g, g' der sekundären Involution sind durch die Substitutionen[5]) verknüpft:

$$-\frac{\lambda}{4}p_{12} = p'_{12}, \quad +\frac{\lambda}{4}p_{14} = p'_{14}, \quad +\frac{\lambda}{4}p_{23} = p'_{23}, \quad -\frac{\lambda}{4}p_{34} = p'_{34}.$$

Die Doppelstrahlen der sekundären Involution sind die Seiten q, r, u, v des Basisvierseites.

2. Die vorliegende Gleichungsform der Fläche zweiter Ordnung:

$$x_1 x_3 - \lambda . x_2 x_4 = 0$$

gibt von sich aus keine Auskunft darüber, ob die Regelstrahlen der Fläche — und damit die Doppelstrahlen der dargestellten sekundären Involution — reelle Strahlen oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sind. Durch die Substitutionen:

$x_1 = \varrho(\xi_1 + i\xi_3) \quad x_2 = -\varrho(\xi_2 + i\xi_4)$	$x_1 = \varrho(\xi_1 + i\xi_3) \quad x_2 = -\varrho(\xi_2 - \xi_4)$
$x_3 = \varrho(\xi_1 - i\xi_3) \quad x_4 = \varrho(\xi_2 - i\xi_4)$	$x_3 = \varrho(\xi_1 - i\xi_3) \quad x_4 = \varrho(\xi_2 + \xi_4)$

geht die Gleichung des F^2-Büschels F^2_{qruv} in die Formen über:

$$\xi_1^2 + \xi_3^2 + \lambda(\xi_2^2 + \xi_4^2) = 0 \qquad | \qquad \xi_1^2 + \xi_3^2 + \lambda(\xi_2^2 - \xi_4^2) = 0$$

oder mit $\lambda = \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}$ in:

$$(\xi_1^2 + \xi_3^2)(1-\varkappa) + (\xi_2^2 + \xi_4^2)(1+\varkappa) = 0. \qquad | \qquad (\xi_1^2 + \xi_3^2)(1-\varkappa) + (\xi_2^2 - \xi_4^2)(1+\varkappa) = 0.$$

Sein Basisvierseit besteht nunmehr aus zwei Paaren von konjugiert imaginären windschiefen Strahlen q, r und u, v. Der F^2-Büschel enthält:

a) ∞^1 imaginäre Flächen zweiter Ordnung mit reellen polaren Räumen, für die:

$+\infty > \lambda > 0$ und $+1 > \varkappa > -1$.

Sein Basisvierseit besteht nunmehr aus zwei Paaren von konjugiert imaginären inzidenten Strahlen q, u und r, v. Der F^2-Büschel enthält:

a) ∞^1 reelle, strahlenlose Flächen zweiter Ordnung, für die:

$+\infty > \lambda > 0$ und $+1 > \varkappa > -1$.

4) Herr Jolles, Die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz. Math. Ztschrft., 27, S. 428.

5) Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 166 (1932), S. 167—181.

Digitized by Google

b) zwei je in zwei konjugiert imaginäre Ebenen zerfallene Flächen, für die:

$$\lambda = 0, \infty \text{ und } \varkappa = \mp 1$$

c) ∞^1 reelle Strahlenflächen zweiter Ordnung, für die:

$$0 > \lambda > -\infty \text{ und } +\infty > \varkappa > +1$$
$$\text{bzw. } -1 > \varkappa > -\infty.$$

b) eine in zwei konjugiert imaginäre Ebenen und eine in zwei reelle Ebenen zerfallene Fläche, für die:

$$\lambda = 0, \infty \text{ und } \varkappa = \mp 1$$

c) ∞^1 reelle strahlenlose Flächen zweiter Ordnung, für die:

$$0 > \lambda > -\infty \text{ und } +\infty > \varkappa > +1$$
$$\text{bzw. } -1 > \varkappa > -\infty.$$

Die lineare Kongruenz C_t^s ist jetzt dargestellt durch:

$$\mathfrak{p}_{18} = 0, \quad \mathfrak{p}_{42} = 0.$$

Die auf ihr durch die Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} hervorgerufene sekundäre Involution bedingt die Substitution:

$$\varrho\,\mathfrak{p}_{12} = +\mathfrak{p}'_{34}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{14} = +\mathfrak{p}'_{25}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{38} = +\mathfrak{p}'_{14}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12}.$$

$$\varrho\,\mathfrak{p}_{12} = -\mathfrak{p}'_{34}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{14} = +\mathfrak{p}'_{23}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{28} = -\mathfrak{p}'_{14}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12}.$$

IV.

Zeitlich veränderliche Riemannmetrik.

3. Die imaginäre Fläche zweiter Ordnung F^2 mit reellem polaren Raume und der Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 + 4c_e^2\mathfrak{x}_4^2 = 0$$

bedingt als Fundamentalfläche mit reellem c_e eine elliptische Maßbestimmung des dreidimensionalen Riemannraumes. Es sei $\lambda = f(t)$ eine eindeutige, reelle, stetige und positive Funktion der Zeit t, die zu gegebener Zeit $t = 0$ den Wert $+1$ besitzt, und es beschreibe die Fläche F^2 im Verlaufe der Zeit den F^2-Büschel:

$$F^2_{qruv} = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2 + f.(\mathfrak{x}_2^2 + 4c_e^2\mathfrak{x}_4^2) = 0.$$

Das Basisvierseit (1 u. 2) $qruv$ des Büschels besteht aus zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefen Gegenseiten. Die Gleichung des Büschels wird auf die Form gebracht:

$$(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2)(1-\varkappa) + (\mathfrak{x}_2^2 + 4c_e^2\mathfrak{x}_4^2)(1+\varkappa) = 0.$$

Jedoch durchläuft die Fläche F^2 wegen:

$$+1 > \varkappa = \frac{f-1}{f+1} > -1$$

nur die imaginären Flächen, niemals die reellen Strahlenflächen

Digitized by Google

dieses Büschels (2). Der F^2-Büschel F^2_{qruv} bedingt auf der hyperbolischen Kongruenz C^s_t die sekundäre Involution:

$$\varrho\, \mathfrak{p}_{12} = 4c_e^2 \mathfrak{p}'_{34}, \quad \varrho\, \mathfrak{p}_{14} = \mathfrak{p}'_{23}, \quad \varrho\, \mathfrak{p}_{23} = 4c_e^2 \mathfrak{p}'_{14}, \quad \varrho\, \mathfrak{p}_{34} = \mathfrak{p}'_{12}.$$

Hieraus folgt:

„Eine sekundäre Involution mit zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefen Doppelstrahlen q, r, u, v auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C^s_t bedingt eine zeitlich veränderliche elliptische Maßbestimmung dadurch, daß die Fundamentalfläche der Metrik die ∞^1 die sekundäre Involution bestimmenden imaginären Flächen zweiter Ordnung beschreibt".

Unter diesen Umständen ist die Entfernung zweier Punkte $X(x_1 .. x_4)$ und $Y(y_1 .. y_4)$ in homogenen Koordinaten $x_1 .. x_4$ zur Zeit t gegeben durch den Ausdruck:

$$2c_e \arccos \frac{x_1 y_1 + x_3 y_3 + f(t)(x_2 y_2 + 4c_e^2 x_4 y_4)}{\sqrt{[x_1^2 + x_3^2 + f(t)(x_2^2 + 4c_e^2 x_4^2)][y_1^2 + y_3^2 + f(t)(y_2^2 + 4c_e^2 x_4^2)]}}.$$

Werden inhomogene Koordinaten eingeführt durch:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4} \quad \text{und} \quad x' = \frac{y_1}{y_4}, \quad y' = \frac{y_2}{y_4}, \quad z' = \frac{y_3}{y_4},$$

so ergibt sich *das Bogenelement der zeitlich veränderlichen Riemannmetrik* aus der Gleichung:

$$ds_t^2 = \frac{f\left[dx^2 + f.dy^2 + dz^2 + \frac{(x\,dy - y\,dx)^2 + (y\,dz - z\,dy)}{4c_e^2}\right] + \frac{(x\,dz - z\,dx)^2}{4c_e^2}}{\left(f + \frac{x^2 + f.y^2 + z^2}{4c_e^2}\right)^2}.$$

V.

Zeitlich veränderliche Lobatschewsky-Metrik.

4. Die gegebene reelle strahlenlose Fläche zweiter Ordnung F^2 mit der Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 - 4c_h^2 \mathfrak{x}_4^2 = 0$$

bedingt als Fundamentalfläche mit der Konstanten c_h eine hyperbolische Maßbestimmung des dreidimensionalen Raumes. Es sei $\lambda = f(t)$ wie im vorigen Abschnitt eine eindeutige, reelle, stetige und positive Funktion der Zeit t, die zur gegebenen Zeit $t = 0$ den Wert $+1$ besitzt. Die Fläche F^2 beschreibe im Verlaufe der Zeit den F^2-Büschel:

$$F^2_{qruv} = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2 + f(t)(\mathfrak{x}_2^2 - 4c_h^2 \mathfrak{x}_4^2) = 0.$$

Digitized by Google

Das Basisvierseit (1 u. 2) $qruv$ des F^2-Büschels besteht aus zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenten Strahlen. Die Gleichung des Büschels wird auf die Form gebracht:

$$(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2)(1-\varkappa)+(\mathfrak{x}_2^2-4c_h^2\mathfrak{x}_4^2)(1+\varkappa)=0.$$

Jedoch durchläuft die Fläche F^2 wegen:

$$+1>\varkappa=\frac{f-1}{f+1}>-1$$

nur die eine der beiden im Büschel enthaltenen Folgen von reellen strahlenlosen Flächen, für die $+\infty>\varkappa>+1$ oder $-1>\varkappa>-\infty$ und ebensowenig die beiden je aus zwei reellen oder konjugiert imaginären Ebenen bestehenden zerfallenen Flächen zweiter Ordnung (2). Der F^2-Büschel F^2_{qruv} bedingt auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_l^s eine sekundäre Involution dargestellt durch:

$$\varrho\,\mathfrak{p}_{12}=-4c_h^2\mathfrak{p}'_{34},\quad \varrho\,\mathfrak{p}_{14}=+\mathfrak{p}'_{23},\quad \varrho\,\mathfrak{p}_{23}=-4c_h^2\mathfrak{p}'_{14},\quad +\varrho\,\mathfrak{p}_{34}=+\mathfrak{p}'_{12}.$$

Hieraus folgt:

„Eine sekundäre Involution mit zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenten Doppelstrahlen q, u und r, v auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_l^s bedingt eine zeitlich veränderliche hyperbolische Maßbestimmung. Bei der Maßbestimmung beschreibt die Fundamentalfläche der Metrik die eine der beiden die sekundäre Involution bedingenden Folgen reeller strahlenloser Flächen zweiter Ordnung".

Ähnliche Betrachtungen wie die des vorhergehenden Abschnittes liefern für *das Bogenelement der zeitlich veränderlichen Lobatschewsky-Metrik* die Gleichung:

$$ds_l^2=\frac{f\left[dx^2+f.dy^2+dz^2-\dfrac{(x\,dy-y\,dx)^2+(y\,dz-z\,dy)^2}{4c_h^2}\right]-\dfrac{(x\,dz-z\,dx)^2}{4c_h^2}}{\left(f-\dfrac{x^2+f.y^2+z^2}{4c_h^2}\right)^2}.$$

VI.

Der Raum mit zeitlich veränderlichem Krümmugsmaß.

Die in den Abschnitten II—V entwickelte zeitlich veränderliche Metrik soll in ihrer allgemeinen Form nicht den Anspruch erheben, zur Beschreibung der physikalischen Außenwelt zu dienen. Das Resultat dieser Untersuchungen besteht in der Schaffung einer rein geometrischen Basis für solche Metriken. Nunmehr soll gezeigt werden, daß gewisse Strukturen der Relativitätstheorie im Rahmen des im Abschnitt II dargelegten Ansatzes enthalten sind.

Digitized by Google

In der Abhandlung: „Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie“ gibt Herr Einstein[6]) die Struktur der Welt im Großen durch einen sphärischen Raum wieder, dessen Radius P zeitlich veränderlich ist. Zur Entwicklung dieser Struktur muß auf einen sehr speziellen Büschel von Flächen zweiter Ordnung zurückgegangen werden.

Die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung des F^2-Büschels

$$\text{(I)} \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 = 0 \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty$$

weisen alle dem Punkte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die Ebene $x_4 = 0$ als Polarebene zu und berühren einander in ein und demselben imaginären Kegelschnitte dieser Ebene. Der F^2-Büschel enthält:

∞^1 reelle strahlenlose Flächen zweiter Ordnung, $-\infty < \lambda < 0$,
einen imaginären Kegel zweiter Ordnung, $\lambda = 0$,
∞^1 imaginäre Flächen zweiter Ordnung, $0 < \lambda < +\infty$,
die Doppelebene $x_4^2 = 0$, $\lambda = \infty$.

Ist nun $\lambda = f(t)$ eine positive Funktion der Zeit t, so bestimmt die zu einem gegebenen Zeitpunkte t gehörige Fläche zweiter Ordnung unseres F^2-Büschels in diesem Augenblick eine elliptische Maßbestimmung. Das Bogenelement der so bedingten zeitlich veränderlichen Maßbestimmung kann in kartesischen Koordinaten auf die Form gebracht werden:

$$\text{(II)} \qquad d\sigma^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)\left(1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4[f(t)]^2}\right)^{-2}.$$

Durch die Substitutionen:

$$x = r \cdot \sin \chi_2 \cdot \cos \chi_3$$
$$y = r \cdot \sin \chi_2 \cdot \sin \chi_3$$
$$z = r \cdot \cos \chi_2$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2f(t) \cdot \operatorname{tg} \frac{\chi_1}{2}$$

ergibt sich:

$$\text{(III)} \qquad d\sigma^2 = [f(t)]^2 (d\chi_1^2 + \sin^2 \chi_1 \, d\chi_2^2 + \sin^2 \chi_1 \sin^2 \chi_2 \, d\chi_3^2).$$

Die Gleichung (II) stellt ebenso wie (III) das Bogenelement der zeitlich veränderlichen Metrik bei beliebig gewähltem, aber *festem* Zeitpunkte t dar.

Nach Einführung der Zeit t mit Hilfe von $ds^2 = -d\sigma^2 + c^2 dt^2$ erhält man das allgemeine Bogenelement aus:

6) Herr Einstein, Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad., 1931, XII. —

Digitized by Google

(IV) $$ds^2 = -f^2(d\chi_1^2 + \sin^2\chi_1 d\chi_2^2 + \sin^2\chi_1 . \sin^2\chi_2 d\chi_3^2) + c^2 dt^2$$

und dieses Bogenelement liegt der oben angeführten Untersuchung Einsteins zugrunde. Auf diese für die Betrachtung der kosmologischen Verhältnisse neuerdings maßgebende Weltstruktur kann also bei geeigneter Betrachtungsweise mit den Mitteln der projektiven Geometrie vollständig gekennzeichnet werden. Sie ordnet sich dem Begriff der zeitlich veränderlichen Metrik unter. Wird das Charakteristikum der letzteren darin gesehen, daß die Fundamentalfläche des dreidimensionalen Raumes im Verlaufe der Zeit Teile eines F^2-Büschels beschreibt, so besteht in diesem Falle der F^2-Büschel aus den ∞^1 Flächen zweiter Ordnung, die einander längs eines imaginären Kegelschnittes berühren. Dabei darf die Fundamentalfläche nur imaginäre Flächen des Büschels durchlaufen und die zu erreichenden Grenzflächen entsprechen den Zeitpunkten stärkster und schwächster Raumkrümmung. — Ist f eine Konstante, so charakterisiert Gleichung (IV) die Struktur einer früheren Einstein-Welt, der sogenannten Zylinderwelt. Dieselbe habe ich[7]) mittels einer helikoidischen Strahlenkongruenz gekennzeichnet. Man sieht aber leicht, daß eine solche Charakterisierung auch für die jetzige zeitlich veränderliche Metrik der Einstein-Welt in Kraft bleibt, da es für die liniengeometrische Betrachtungsweise unwesentlich ist, welche Fläche des F^2-Büschels die Rolle der Fundamentalfläche übernimmt.

VII.

Nichteuklidische Geometrie — Existentia. Euklidische Geometrie — Essentia.

Die vorliegenden Untersuchungen über die zeitlich veränderliche Metrik führen im Zusammenhang mit den Darlegungen des Abschnittes I zu folgenden Ergebnissen:

α) Die nichteuklidischen Raumstrukturen oder Raum-Zeitstrukturen sind vieldeutig, müssen „cum relatione ad tempus“ betrachtet werden und ihre Metrik wird — sollen sie zur Beschreibung der Außenwelt dienen — wesentlich durch die Materie und deren Verteilung beeinflußt. Diese Strukturen sind Instrumente der Form A des Erkennens (Abschnitt I). Durch sie läßt sich die existentia eines Raumstückes, seine sinnlich wahrnehmbare Erscheinungsform, beschreiben. Mit anderen Worten:

„Die nichteuklidische Raum-Zeitstruktur macht nicht die essentia des Raumes aus und gehört überhaupt nicht zu ihr. Sie ist vielmehr

7) Ztschrft. f. Physik, 72, S. 798—802, 1931.

Digitized by Google

der mathematische Niederschlag der existentia des Raumes, seiner Erscheinungsform, und weder eindeutig, noch denknotwendig, noch zeitlos".

β) Die nichteuklidische Metrik ruht auf quadratischen Formen. Ebenso läßt sich nunmehr zeitlich veränderliche nichteuklidische Metrik auf entsprechenden Formen der Strahlengeometrie aufbauen (III—V). Alle diese Formen können nur im *Euklidischen Raume* — oder garnicht — vorgestellt werden. Nur dort kommt ihnen eine über das Formalistische hinausgehende Bedeutung zu. Diese Vorstellung der Formen ist von der Zeit vollständig unabhängig, obgleich die Formen selbst die zeitlich veränderliche Metrik gewährleisten. Der Raum, in dem die Grundformen jeder Geometrie liegen, bleibt in seiner essentia *vollständig* unberührt davon, mit welcher nichteuklidischen oder zeitlich veränderlichen Metrik seine existentia gemessen wird. Infolgedessen gilt:

„Die essentia des Raumes ist euklidische Geometrie; die existentia materieller Raumstücke — mögen sie wahrgenommen oder gedacht werden — kann mit Hilfe einer passenden nichteuklidischen Metrik beschrieben werden. Die euklidische Geometrie ist als essentia des Raumes denknotwendig".

Gewiß kannte Spinoza nur euklidische Metrik. Dennoch — das ist das Bewundernswerte — läßt er divinatorisch in seiner Philosophie für jede moderne Raum-Zeitstruktur Platz, ohne an der zentralen Position der allein denknotwendigen euklidischen Geometrie zu rütteln.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXXII. JAHRGANG

1933

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

Mitteilungen.

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten entweder an den Schriftführer oder an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Oberinspektor M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 12 a).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse und nicht an die Adresse des Schriftführers zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

ZWEIUNDDREISSIGSTER JAHRGANG

1933
GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Bergmann, St., Herstellung von vollständigen Funktionssystemen in zwei komplexen Veränderlichen	76—77
Graf, U., Über komplexe Zahlsysteme und ihren Zusammenhang mit den äquidistanten Transformationen in Ebenen mit nichteuklidischer Maßbestimmung	33—44
Grüß, G., Ein elementargeometrisches Beispiel zur Dyadenrechnung	45—52
Hensel, K., Über die vollständige arithmetische Auflösung der algebraischen Gleichungen	3—16
Levin, V., Über eine Eigenschaft der Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen	27—32
Levin, V., Über die Abschnitte von Potenzreihen, welche mit ihrer ersten Ableitung im Einheitskreise beschränkt sind	53—59
Pinl, M., Der Asymptotenkegel der Minimalhyperflächen	21—26
Rado, R., Bemerkungen zur Kombinatorik im Anschluß an Untersuchungen von Herrn D. König	60—75
Weiss, E. A., Über eine Invariante von vier Ebenen des R_5	17—20
286. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 19. Oktober 1932	1
287. „ am 30. November 1932	1
288. „ „ 6. Januar 1933	1
289. „ „ 25. „ „	2
290. „ „ 22. Februar „	2
291. „ „ 29. März „	2
292. „ „ 26. April „	2
293. „ „ 24. Mai „	2
294. „ „ 28. Juni „	2
Mitglieder-Verzeichnis	78—83

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

286. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 19. Oktober 1932.

Vorsitzender: Herr Fuchs. Anwesend: 45 Mitglieder und Gäste.

A) Geschäftlicher Teil:

1. Auf Antrag des Vorstandes wird einstimmig eine Satzungsänderung beschlossen: der erste Satz des § 8 der Satzungen soll folgende Fassung erhalten: der Vorstand wird alle zwei Jahre für die Dauer von zwei Jahren, die Revisionskommission wird alljährlich auf ein Jahr, von den vier Mitgliedern der Redaktionskommission werden jährlich abwechselnd je zwei auf zwei Jahre gewählt und zwar in der im Oktober abzuhaltenden ordentlichen Mitgliederversammlung.

2. Neuwahl des Vorstandes und der Kassenprüfer. Durch Zettelwahl wird mit 34 von 36 abgegebenen Stimmen Herr Hammerstein zum ersten Vorsitzenden gewählt. Die übrigen Herren des Vorstandes und der Revisionskommission werden durch Zuruf wiedergewählt. In die Redaktionskommission wurden neu hineingewählt die Herren Fuchs und Schur.

3. Den Wahlen voraus ging der Bericht des Kassenwarts, des Kassenprüfers und die Entlastung des Kassenwarts.

B) Wissenschaftlicher Teil:

Herr Hensel: Über die vollständige arithmetische Auflösung aller algebraischen Gleichungen.

287. Sitzung am 30. November 1932.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 25 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Germansky: Eine allgemeine graphische Methode zur Ausgleichung von Beobachtungen.

Herr Hoecken: Vorführung eines neuen Ellipsenzeichners.

288. Sitzung am 6. Januar 1933 (Dezembersitzung).

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 30 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Schouten (Delft): Der Pseudoparallelismus und seine Bedeutung für Differentialgeometrie und Physik.

Digitized by Google

289. Sitzung am 25. Januar 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 24 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Keller: Die singulären Punkte algebraischer Kurven.

Herr Levin: Über eine Eigenschaft der Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen.

290. Sitzung am 22. Februar 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 28 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Rado: Bemerkungen zur Kombinatorik im Anschluß an Untersuchungen von Herrn D. König.

Herr Graf: Über komplexe Zahlsysteme und ihren Zusammenhang mit den äquidistanten Transformationen in nichteuklidischen Ebenen.

291. Sitzung am 29. März 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 24 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Hammerstein: Über den Rungeschen Satz der Funktionentheorie.

Herr Bergmann: Herstellung von vollständigen Funktionensystemen in zwei komplexen Veränderlichen.

292. Sitzung am 26. April 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Grüss: Eine elementargeometrische Anwendung der Affinorrechnung.

Herr Pinl: Typen und Probleme der Geometrie totalisotroper Flächen.

293. Sitzung am 24. Mai 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 64 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Heffter: Zum hundertsten Geburtstag von L. Fuchs.

294. Sitzung am 28. Juni 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 18 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Levin: Über die Abschnitte von Potenzreihen, welche mit ihrer ersten Ableitung im Einheitskreise beschränkt sind.

Digitized by Google

Über die vollständige arithmetische Auflösung der algebraischen Gleichungen[1]).

Von Kurt Hensel (Marburg).

So lange ich mathematisch denken kann, hat meine höchste Bewunderung die Tatsache erregt, daß und wie alle Gleichungen

$$F(y, x) = a_0(x)\,y^n + a_1(x)\,y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0$$

einer und derselben Klasse von algebraischen Kurven in der Umgebung einer jeden Stelle $x = \alpha$ bzw. $x = \infty$ vollständig durch n Potenzreihen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ aufgelöst werden können, welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen des zugehörigen Linear- oder Primfaktors

$$p(x) = x - \alpha \quad \text{bezw. } p(x) = \frac{1}{x}$$

fortschreiten und welche im Falle der gebrochenen Potenzen je einen Zyklus aller konjugierten Potenzreihen von gleicher Ordnungszahl bilden.

Diese Tatsache, hier eine unmittelbare Folge aus der so hoch entwickelten Theorie der analytischen Funktionen *einer* Variablen, mit allen ihren herrlichen Folgerungen, dem vollständigen Aufbau der Geometrie der algebraischen ebenen Kurven und Raumkurven, der Abelschen Integrale und der Abelschen Funktionen, schien mir eine der gewaltigsten mathematischen Taten des vorigen Jahrhunderts, und mir schwebte immer als ein höchst erstrebenswertes Arbeitsziel der Versuch vor, diese grossen Ergebnisse in gleicher Einfachheit auch für *alle* algebraischen Gleichungen zu suchen und so vielleicht einen tiefen Einblick zu gewinnen in die Beziehungen, welche zwischen den durch eine beliebige algebraische Gleichung

$$F(x; x_1, \ldots x_r) = a_0(x_i)\,x^n + a_1(x_i)\,x^{n-1} + \cdots + a_n(x_i) = 0$$
$$(i = 1, \ldots r)$$

mit einander rational verbundenen Variablen $x; x_1, \ldots x_r$ bestehen; auch in dem speziellsten Falle, daß jene Gleichung:

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

1) Vorgetragen in der 286. Sitzung am 19. Oktober 1932.

Digitized by Google

außer x gar keine weiteren Variablen enthält und etwa lauter ganzzahlige Koeffizienten $a_0, a_1, \dots a_n$ besitzt, wo also durch *diese* Gleichungen die allgemeinsten algebraischen Zahlen definiert werden.

Aus der Potenzreihendarstellung

$$\xi = a_r(x-\alpha)^{\frac{r}{e}} + a_{r+1}(x-\alpha)^{\frac{r+1}{e}} + \cdots$$

für eine der n Wurzeln einer Gleichung $F(y, x) = 0$ erhält man ja in ihren Näherungswerten:

$$a_r(x-\alpha)^{\frac{r}{e}}; \quad a_r(x-\alpha)^{\frac{r}{e}} + a_{r+1}(x-\alpha)^{\frac{r+1}{e}}; \quad \dots$$

von genügend hoher Ordnung die eindeutig bestimmte Teilbarkeits- oder Kongruenzbeziehung eben dieser Wurzel zu einer beliebig hohen Potenz des Primfaktors $p(x) = (x-\alpha)$ oder $p(x) = \frac{1}{x}$ mit jeder vorgegebenen Genauigkeit dargestellt.

Ebenso müßte es möglich sein, im allgemeinsten Falle einer beliebigen Gleichung $F(x; x_1 \dots x_r) = 0$ die Kongruenzbeziehung von einer ihrer Wurzeln ξ zu jeder noch so hohen Potenz einer beliebigen Primfunktion $p(x_1, \dots x_r)$ aus den Näherungswerten genügend hoher Ordnung einer entsprechend gebildeten eindeutig bestimmten Potenzreihe:

$$\xi = a_r p^{\frac{r}{e}} + a_{r+1} p^{\frac{r+1}{e}} + a_{r+2} p^{\frac{r+2}{e}} + \cdots$$

darzustellen, welche gerade jene Wurzel für den Bereich eben dieser Primfunktion p darstellt.

Hier wäre aber natürlich für $p(x_1, \dots x_r)$ nicht bloß ein Linearfaktor $x_i - \alpha_i$ zu setzen, sondern es könnte und müßte für p jede unzerlegbare ganze rationale Funktion von $x_1, \dots x_r$ und außerdem auch jede der r gebrochenen Primfunktionen $\frac{1}{x_1}, \cdots \frac{1}{x_r}$ gewählt werden, denn dies sind ja alle und nur die Bestandteile in welche hier jede rationale Funktion von $x_1, \dots x_r$ eindeutig multiplikativ zerlegt werden kann. Ebenso müßten aber hier von selbst als Koeffizienten $a_r, a_{r+1}, \dots$ nicht bloß Konstanten, sondern eindeutig bestimmte modulo p ganze algebraische Funktionen von $x_1, \dots x_r$ auftreten; in der Tat werden uns diese durch unsere Untersuchung auch wirklich direkt geliefert werden.

Für den Fall einer ganzzahligen Gleichung $F(x) = 0$ ohne weitere Variable $x_1, \dots x_r$ müßte es entsprechend möglich sein, die Teilbarkeits- oder Kongruenzbeziehung einer ihrer Wurzeln

Digitized by Google

ξ zu jeder noch so hohen Potenz einer reellen Primzahl p aus der Reihe 2, 3, 5, 7, ... aus den Näherungswerten genügend hoher Ordnung einer entsprechend gebildeten eindeutig bestimmten Potenzreihe

$$\xi = a_r p^{\frac{r}{e}} + a_{r+1} p^{\frac{r+1}{e}} + \cdots$$

anzugeben, welche jene Wurzel ξ für den Bereich eben dieser Primzahl p darstellt.

Genau das Entsprechende müßte für die *Größen*beziehung dieser Gleichungswurzeln, d. h. für die Kongruenzbeziehung derselben zu jeder noch so hohen Potenz irgend einer echt gebrochenen Maßzahl p_∞, etwa zu $p_\infty = \frac{1}{10}$, gelten, wo die Darstellung

$$\xi = a_r \left(\frac{1}{10}\right)^r + a_{r+1} \left(\frac{1}{10}\right)^{r+1} + \cdots$$

jener Wurzeln von $F(x) = 0$ einfach auf die reellen oder komplexen Dezimalbrüche für sie führen.

In Wahrheit ist dieses große Problem der arithmetischen Auflösung aller algebraischen Gleichungen nicht eine Aufgabe der Funktionentheorie, welche hier bald versagen würde, sondern eine Aufgabe der Algebra, allerdings nicht der früheren Gaußschen klassischen, sondern der modernen arithmetischen Algebra, der sogenannten Körpertheorie, wie sie zuerst und gleichzeitig durch Leopold Kronecker in seinen berühmten „Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen“ und auf der anderen Seite durch die großen Arithmetiker Richard Dedekind und Heinrich Weber begründet wurde.

Diese Neuschöpfung der Algebra fand aber erst ihren natürlichen und schönsten Abschluß in der Körpertheorie unseres unvergeßlichen Ernst Steinitz. Er hat der Wissenschaft die großen Gesichtspunkte für die Behandlung der Algebra als allgemeinste Körpertheorie gegeben, die dann durch die im besten Sinne „modernen“ Lehrbücher der Algebra von Hasse, von Haupt und von van der Waerden in bewundernswerter Weise ausgestaltet sind.

Auf dieser Grundlage kann nun die Arithmetik aller algebraischen Größen in voller Allgemeinheit aufgebaut werden, wie ich jetzt zu zeigen versuchen werde.

Es handelt sich hier also um die arithmetische Auflösung einer beliebigen unzerlegbaren Gleichung n-ten Grades:

Digitized by Google

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots . a_n$ Zahlgrößen eines bestimmten gegebenen Bereiches sind, nämlich entweder rationale Funktionen $m(x_i)/n(x_i) = m(x_1, \ldots x_r)/n(x_1, \ldots x_r)$ von Variablen $x_1, \ldots x_r$ mit beliebigen reellen oder komplexen Zahlkoeffizienten, oder rationale Zahlen m/n.

In jedem Falle bilden alle diese Zahlgrößen einen bestimmten Zahlkörper $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}(x_i)$ oder $\mathfrak{R}(1)$), nämlich einen Bereich, in dem unbeschränkt und eindeutig addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden kann, ohne daß man dadurch aus ihm herauskommt; jeden solchen Bereich nennt man einen Zahlkörper. Er ist hier der Koeffizientenkörper unserer in ihm irreduziblen Gleichung $F(x) = 0$. Seine Elemente sind uns alle bekannt und dies sind bis jetzt die einzigen Elemente, welche uns bekannt sind. In diesem uns bekannten Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}$ selbst zerfällt die Funktion $F(x)$ nicht in „kleinere" Faktoren, d. h. in Faktoren niedrigeren Grades.

Das allgemeine Problem der Auflösung überhaupt ist nun in der Frage enthalten:

> Wie kann man den Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}$ zu einem größeren Körper so erweitern, daß in ihm die in $\mathfrak{R}$ unzerlegbare Funktion $F(x)$ in ein Produkt von kleineren Faktoren zerfällt?

Und das Ziel der Untersuchung ist dieses:

> Es soll der Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}$ zu einem so großen Körper $\overline{\mathfrak{R}}$ erweitert werden, daß in ihm $F(x)$ vollständig, d. h. in ein Produkt:
>
> $$F(x) = a_0(x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n)$$
>
> von n Linearfaktoren $(x - \xi_i)$ zerfällt.

Dann sind die n Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ dieser Linearfaktoren Zahlen aus $\overline{\mathfrak{R}}$, welche eben die n Wurzeln sind, welche die Gleichung $F(x) = 0$ in diesem Erweiterungskörper $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ besitzt.

Diese Erweiterung des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}$ zu einem kleinsten sogen. Galoisschen Zerlegungskörper $\overline{\mathfrak{R}}$ ist nun in der Tat immer möglich, und die Feststellung dieser Tatsache auch für die allgemeinsten Gleichungen $F(x) = 0$ und der Einblick in die Eigenschaften der zugehörigen Galoisschen Körper ist einer der wichtigsten Erfolge der modernen Algebra.

Eine sehr merkwürdige und bisher wohl noch nicht voll bekannte weitere Tatsache ist nun aber die, daß jene Erweiterung des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}$ zu einem Galoisschen Auflösungskörper

Digitized by Google

auf sehr viele, ja auf unendlich viele wirklich und wesentlich verschiedenen Arten gemacht werden kann; und jede einzelne von ihnen enthüllt uns neue Eigenschaften der dann sich ergebenden Gleichungswurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ unserer Gleichung

$$F(x) = a_0(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_n) = 0.$$

Sie alle zusammen geben uns erst die *volle* Einsicht in die Natur und in alle Eigenschaften jener Gleichungswurzeln, z. B. in die geometrischen Eigenschaften der algebraischen Kurven $F(y,x)=0$ bzw. der algebraischen Flächen $F(z;xy)=0$, oder in die arithmetischen Eigenschaften der durch reine Zahlengleichungen $F(x)=0$ definierten algebraischen Zahlen.

Zwei Arten der Körpererweiterung gibt es, durch die eine in $\mathfrak{R}$ unzerlegbare Funktion $F(x)$ in kleinere Faktoren zerlegt werden kann und welche, mehrmals angewandt, zuletzt eine vollständige Zerlegung $F(x) = a_0(x-\xi)\ldots(x-\xi_n)$ in dem so gefundenen Oberkörper $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ ergeben.

Die erste ist die Erweiterung des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}$ zu dem zu der Primfunktion $F(x)$ gehörigen sog. Kongruenzkörper $\underline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}_F(x)$, nämlich zu dem Körper aller modulo $F(x)$ ganzen rationalen Funktionen $m(x)/n(x)$ von x mit beliebigen Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, deren Nenner $n(x)$ in ihrer reduzierten Form nur nicht $F(x)$ als Faktor enthält, wenn man diese modulo $F(x)$ betrachtet, d. h. zwei solche Funktionen gleich nennt, wenn sie modulo $F(x)$ kongruent sind, oder was dasselbe ist, falls sie sich um ein Vielfaches von $F(x)$ unterscheiden.

Alle diese Funktionen bilden offenbar einen größeren Körper $\underline{\mathfrak{R}}$, und in ihm besitzt, was beinahe eine Trivialität ist,

$$F(t) = (t-\xi_1)F_1(t)$$

sicher einen leicht angebbaren Linearfaktor $t-\xi_1$, die zugehörige Gleichung also eine Wurzel nämlich $\xi_1 = x$.

Durch Zerlegung von $F_1(t)$ in seine Primfaktoren innerhalb $\underline{\mathfrak{R}}$, was ja immer möglich und eindeutig bestimmt ist und entsprechende Weiterbehandlung eines derselben gelangt man nach höchstens n Schritten zu der gesuchten vollständigen Zerlegung $F(t) = a_0(t-\xi_1)\ldots(t-\xi_n)$ in Linearfaktoren.

Diese *rein algebraische* Erweiterung unseres Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}$ ist als solche eindeutig bestimmt und sie ist notwendig und hinreichend um den *algebraischen* Charakter der vorgelegten Gleichung $F(x)=0$, speziell ihre Gruppe und deren Eigenschaften, welche in der Galoisschen Theorie begründet werden, darzulegen.

Digitized by Google

Dagegen liefert sie uns in keiner Weise die hier gewünschte, nämlich eine solche Darstellung dieser Wurzeln, daß man aus ihr ihre *arithmetischen* Eigenschaften, d. h. ihre Teilbarkeitsbeziehungen zu irgend einer von den Primzahlen p erkennen könnte, welche in dem Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}$ auftreten; die *Zahlentheorie* in diesen höheren algebraischen Zahlbereichen wird also auf diesem Wege *nicht* erschlossen.

Zur Erkenntnis aller Teilbarkeitsbeziehungen zwischen den Gleichungswurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ einerseits und jeder beliebigen Primzahl p aus $\mathfrak{R}$ andererseits führt nun die zweite Erweiterung des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}$ zu einem Galoisschen Körper $\overline{\mathfrak{R}}$ für die Gleichung $F(x) = 0$.

Sie beruht auf der Tatsache, daß alle Elemente $a, b, c, \ldots$ des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}$, d. h. entweder alle rationalen Zahlen m/n von $\mathfrak{R}(1)$ oder alle rationalen Funktionen $m(x_i)/n(x_i)$ von $\mathfrak{R}(x_1, \ldots x_r)$ für irgend eine feste Primzahl oder Primfunktion p von $\mathfrak{R}$ in eindeutig bestimmter Weise in der Form dargestellt werden können:

$$a = \delta p^{\alpha}, \quad b = \varepsilon p^{\beta}, \quad c = \xi p^{\gamma}, \quad \ldots,$$

wo die „Ordnungszahlen“ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ reelle (im allgemeinen ganze) Zahlen und die Koeffizienten $\delta, \varepsilon, \zeta, \ldots$ sogen. *Einheiten modulo p*, d. h. durch p nicht teilbare Zahlen aus $\mathfrak{R}$ bedeuten. Dies beruht allein auf der Tatsache der eindeutigen Zerlegbarkeit jedes Elementes von $\mathfrak{R}$ in seine Primfaktoren. Ein Element a von $\mathfrak{R}$ heißt modulo p ganz oder gebrochen, jenachdem seine Ordnungszahl α nicht negativ oder negativ ist.

Auf Grund dieser Darstellung können nun alle Elemente von $\mathfrak{R}$ nach ihrer Größe für p in der Weise geordnet werden, daß für je zwei Zahlen $a = \delta p^{\alpha}$ und $b = \varepsilon p^{\beta}$

$$a > b \text{ oder } a \sim b$$

genannt wird, jenachdem für ihre Ordnungszahlen α und β:

$$\alpha < \beta \text{ oder } \alpha = \beta$$

ist. Durch diese Festsetzung wird der Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}$ zu einem *in bezug auf p geordneten Körper*.

Dieser geordnete Körper $\mathfrak{R}$ ist nun aber niemals ein sogen. *perfekter* Körper, d. h. ein solcher, welcher selbst alle seine Grenzwerte für diese Größenanordnung als Elemente enthält. Die zweite vorher erwähnte Erweiterung von $\mathfrak{R}$ besteht nun darin, daß man $\mathfrak{R}$ ersetzt durch seinen kleinsten perfekten Oberkörper $\mathfrak{R}(p)$, d. h. durch den kleinsten Körper, welcher aus allen Elementen von $\mathfrak{R}$

Digitized by Google

und allen ihnen zugehörigen Grenzwerten besteht. Zu einem jeden nach p geordneten Körper gehört nämlich stets ein einziger solcher kleinster perfekter Oberkörper $\mathfrak{K}(p)$ und zwar besteht er aus allen und nur den sogen. *p-adischen Zahlen*:

$$\begin{aligned} a &= a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots \\ b &= \qquad b_\beta p_\beta + b_{\beta+1} p^{\beta+1} + \cdots \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned},$$

deren Koeffizienten $a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots, b_\beta, b_{\beta+1} \ldots$ beliebige *ganze* Elemente aus $\mathfrak{K}$ bedeuten. Wird für diese neuen Zahlen die Gleichheit einfach und naturgemäß definiert und Addition und Multiplikation und damit auch Subtraktion und Division so festgelegt, wie dies bei gewöhnlichen Potenzreihen geschieht, so erkennt man unmittelbar, daß diese p-adischen Zahlen wirklich einen Zahlkörper bilden, welcher ein (nicht algebraischer) Oberkörper des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{K}$ ist. Es zeigt sich ferner, daß $\mathfrak{K}(p)$ bei der gleichen Bewertung seiner Elemente in bezug auf p wirklich alle seine Grenzwerte enthält und auch wirklich der eindeutig bestimmte *kleinste* perfekte Oberkörper von $\mathfrak{K}$ ist.

Zu jedem Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}$ gehören so unendlich viele vollständig von einander verschiedene p-adische Erweiterungskörper entsprechend den in $\mathfrak{K}$ vorhandenen Primzahlen p. So gehören z. B. zum Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(1)$ aller rationalen Zahlen mit den Primelementen

$$p_\infty = \frac{1}{10}; \quad 2, 3, 5, \ldots$$

die Erweiterungskörper:

$$\mathfrak{K}(p_\infty); \quad \mathfrak{K}(2), \mathfrak{K}(3), \mathfrak{K}(5), \ldots$$

aller gewöhnlichen reellen Zahlen

$$a_\alpha \left(\frac{1}{10}\right)^\alpha + \alpha_{\alpha+1} \left(\frac{1}{10}\right)^{\alpha+1} + \cdots,$$

aller dyadischen Zahlen:

$$a_\alpha \cdot 2^\alpha + a_{\alpha+1} 2^{\alpha+1} + \cdots,$$

aller triadischen, pentadischen Zahlen .... So gehören zum Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(x)$ aller rationalen Funktionen von einer Variablen mit den Primfaktoren $p = x - \alpha$ bezw. $p = \frac{1}{x}$ die Potenzreihen $\mathfrak{P}(x/\alpha)$ bzw. $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, mögen sie nun konvergent sein oder nicht. So gehören zum Körper $\mathfrak{K}(x, y)$ aller rationalen Funktionen von zwei Variablen mit den Primfunktionen $p(xy)$, den unzerlegbaren

Digitized by Google

ganzen Funktionen von x und y und den beiden gebrochenen $1/x$ und $1/y$ die p-adischen Erweiterungskörper $\mathfrak{K}(p)$ aus allen Potenzreihen:

$$a_\alpha(xy)\,p^\alpha + a_{\alpha+1}(xy)\,p^{\alpha+1} + \cdots$$

mit modulo $p(xy)$ ganzen rationalen Koeffizienten usw.

Betrachten wir nun im allgemeinen Falle die in $\mathfrak{K}$ (d. h. in $\mathfrak{K}(1)$ bezw. in $\mathfrak{K}(x_1, \ldots x_\nu)$) irreduzible Gleichung $F(x) = 0$ in einem solchen perfekten Oberkörper $\mathfrak{K}(p)$ von $\mathfrak{K}$ so zerfällt ihre linke Seite, wie dies in jedem Zahlkörper der Fall ist, in ihm eindeutig in ein Produkt:

$$F(x) = f_1(x)\,f_2(x)\cdots f_\nu(x)$$

von lauter verschiedenen p-adischen Primfaktoren. Es handelt sich also nur noch darum, diesen p-adischen Körper noch mehr so zu erweitern, daß jeder dieser ν Primfaktoren $f_i(x)$ und damit auch $F(x)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Es sei nun $f(x)$ einer dieser ν p-adischen Primfaktoren von $F(x)$ und λ sein Grad. Dann kann man nach der zuerst angegebenen Auflösungsmethode den jetzigen Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}(p)$ zum Kongruenzkörper $\mathfrak{K}_{f(x)}(x, p)$ aller modulo $f(x)$ ganzen rationalen Funktionen $m(x, p)\,/\,n(x, p)$ mit p-adischen Koeffizienten erweitern. In ihm spaltet sich ja, wie wir sahen, mindestens ein Linearfaktor $(x - \xi_1)$ von $f(x) = (x - \xi_1)\bar{f}(x)$ ab; und durch entsprechendes Fortschreiten erhält man zuletzt einen eindeutig bestimmten kleinsten Erweiterungskörper $\bar{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}(p)$, in welchem jede von diesen ν Primfunktionen $f_i(x)$ und damit also auch $F(x)$ selbst vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Wie sehen nun die Zahlen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ dieses *algebraischen* Erweiterungskörper $\bar{\mathfrak{K}}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots)$ von dem Körper $\mathfrak{K}(p)$ der p-adischen Zahlen:

$$a = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots$$

aus? Wie sind also die n Gleichungswurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ von $F(x) = a_0(x - \xi_1)\ldots(x - \xi_n) = 0$, die ja alle $\bar{\mathfrak{K}}$ angehören, gebildet?

Man erkennt nun, daß alle diese Zahlen von $\bar{\mathfrak{K}}$ *genau so* wie die p-adischen Zahlen selbst, nämlich folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{a}_\alpha \pi^\alpha + \bar{a}_{\alpha+1}\pi^{\alpha+1} + \cdots \\ \bar{b} &= \qquad\qquad \bar{b}_\beta \pi^\beta + \bar{b}_{\beta+1}\pi^{\beta+1} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Digitized by Google

Sie schreiten hier aber nach Potenzen der *neuen* Primzahl π von $\bar{\Re}$ fort, welche zwar im allgemeinen mit der Primzahl p des kleineren Körpers $\Re(p)$ übereinstimmt, aber für eine endliche Anzahl von Primzahlen p, den sogen. Verzweigungszahlen, äquivalent $p^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{p}$ ist. Die Entwicklungskoeffizienten $\bar{a}_\alpha$, $\bar{a}_{\alpha+1}$, ... sind aber wieder beliebige modulo p ganze Elemente eben dieses Erweiterungskörpers $\bar{\Re}$.

Alles dies beruht allein auf der Tatsache, daß $\bar{\Re}$ ein *algebraischer* Oberkörper des perfekten p-adischen Körpers $\Re(p)$ und somit selbst ein perfekter Körper ist. Ein jeder solcher Erweiterungskörper $\bar{\Re} = \Re(\pi)$ soll ein *π-adischer Körper* genannt werden.

Wir erhalten also so den folgenden ganz allgemeinen Fundamentalsatz:

> Zu jeder beliebigen Gleichung $F(x) = 0$ in einem beliebigen Koeffizientenkörper $\Re$ und für jede Primzahl p aus $\Re$ gibt es stets einen einzigen kleinsten π-adischen algebraischen Erweiterungskörper $\Re(\pi)$ des zu p gehörigen p-adischen Körpers $\Re(p)$, in welchem die Funktion $F(x) = a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_n)$ vollständig in n π-adische Linearfaktoren zerfällt.
>
> Die Teilbarkeitsbeziehungen dieser n eindeutig bestimmten π-adischen Wurzeln $\xi_1, \dots \xi_n$ zur Primzahl p können dann wieder mit jeder vorgegebenen Genauigkeit aus den Näherungswerten genügend hoher Ordnung dieser n π-adischen Zahlen $\xi_1, \dots \xi_n$ abgelesen werden.

Ist nämlich $\xi = \bar{a}_\alpha \pi^\alpha + \bar{a}_{\alpha+1}\pi^{\alpha+1} + \cdots$ eine dieser Wurzeln, so ist modulo einer beliebig hohen Potenz von π oder, was dasselbe ist, von p, ξ kongruent einem seiner Näherungswerte

$$\bar{a}_\alpha \pi^\alpha + \bar{a}_{\alpha+1}\pi^{\alpha+1} + \cdots + \bar{a}_r \pi^r,$$

wenn r genügend groß gewählt wird.

Damit ist das Ziel der Arithmetik der algebraischen Größen in dem eingangs angegebenen Umfange vollständig und ausnahmslos erreicht.

Keinesweges ist aber damit alles erreicht, was für die arithmetische Untersuchung der n Wurzeln einer solchen Gleichung $F(x) = 0$ erfordert wird. Ich möchte zum Abschluß meines heutigen Vortrages noch drei Ergebnisse kurz darlegen, zu denen mich meine Untersuchungen geführt haben und in denen die vollständige Lösung dieses Problems enthalten ist.

Erstens ergibt sich aus den vorher durchgeführten Überlegungen noch nicht, welche *algebraischen* Beziehungen zwischen

Digitized by Google

den n π-adischen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ unserer Gleichung $F(x) = 0$ bestehen; und doch ist gerade diese Frage für alle Anwendungen, besonders auf die höhere Arithmetik der algebraischen Zahlen, also der Wurzeln einer Gleichung $F(x) = 0$ im Körper $\mathfrak{R}(1)$ und auf die geometrische Theorie der algebraischen Kurven oder der algebraischen Oberflächen von ausschlaggebender Bedeutung.

Die vollständige Beantwortung dieser Frage ergibt sich durch die genauere Untersuchung der algebraischen Beziehung, welche speziell zwischen den λ π-adischen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ *einer* von den ν p-adischen Primfunktionen:

$$f(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_\lambda)$$

besteht, in welche unsere Grundfunktion

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_\nu(x)$$

im p-adischen Körper $\mathfrak{R}(p)$ zerfiel.

Es zeigt sich nämlich, daß diese λ Wurzeln für sich einen Wurzelzyklus konjugierter π-adischer Zahlen bilden:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_\alpha^{(1)} \pi_1^\alpha + a_{\alpha+1}^{(1)} \pi_1^{\alpha+1} + \cdots \\ \xi_2 &= a_\alpha^{(2)} \pi_2^\alpha + a_{\alpha+1}^{(2)} \pi_2^{\alpha+1} + \cdots \\ &\vdots \\ \xi_\lambda &= a_\alpha^{(\lambda)} \pi_\lambda^\alpha + a_{\alpha+1}^{(\lambda)} \pi_\lambda^{\alpha+1} + \cdots \end{aligned}$$

mit konjugierten modulo p ganzen algebraischen Koeffizienten, welche nach steigenden Potenzen von λ konjugierten Primzahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\lambda$ fortschreiten; sie alle sind äquivalent $\sqrt[e]{p}$, ja sie können sogar im wesentlichen gleich $\sqrt[e]{p} = p^{\frac{1}{e}}$ gewählt werden. Alle diese λ Wurzeln desselben Zyklus besitzen also in bezug auf π oder, was dasselbe ist, in bezug auf p, dieselbe Ordnungszahl α und sind algebraisch konjugiert.

Ist $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$, so ist e stets ein Teiler des Grades $\lambda = ef$ von $f(x)$; e heißt die *Ordnung*, f der *Grad* dieser konjugierten Primzahlen π_i. Ist

$$\xi = a_\alpha \pi^\alpha + a_{\alpha+1} \pi^{\alpha+1} + \cdots$$

eine der λ Wurzeln dieses Zyklus, so gehören die Koeffizienten $a_\alpha, a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots$ sämtlich einem und demselben algebraischen Zahlkörper f-ten Grades $\mathfrak{R}(\varrho)$ über dem Koeffizientenkörper $\mathfrak{R}$ an, wo das Element ϱ durch eine Gleichung f-ten Grades

$$G(x; x_i) = 0$$

Digitized by Google

aus $\mathfrak{R}$ definiert ist, deren linke Seite nicht nur absolut, sondern auch modulo p irreduzibel ist; dieser Körper f-ten Grades $\mathfrak{R}(\varrho)$ werde der *Koeffizientenkörper* des π-adischen Körpers $\lambda = ef$-ten Grades $\mathfrak{R}(\pi)$ genannt.

Die zugehörige Primzahl π genügt dann stets einer algebraisch d. h. durch Wurzelzeichen auflösbaren sogen. Eisensteinschen Gleichung e-ten Grades $h(x) = 0$ innerhalb des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}(\varrho)$. Fast stets kann sie sogar, wie oben erwähnt, als eine reine Gleichung

$$h(x) = x^e - \bar{p} = 0$$

gewählt werden, wo sich $\bar{p} = \varepsilon p$ von der Primzahl p nur um eine Einheit aus $\mathfrak{R}(\varrho)$ unterscheidet.

Erst auf dieser Grundlage kann nun eine jede algebraische Funktion x von $x_1, \ldots x_r$ oder eine jede algebraische Zahl x vollständig und eindeutig als ein Produkt

$$x \sim \mathfrak{D}_x = \mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{Q}^\beta \ldots \mathfrak{R}^\gamma$$

von algebraischen Primfaktoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots \mathfrak{R}$ so dargestellt werden, daß aus ihm das arithmetische Verhalten von x zu jeder rationalen Primfunktion $p, q, \ldots r$ aus $\mathfrak{R}$ einfach abgelesen werden kann. Auf dieser Grundlage ist dann z. B. eine einheitliche vollständige und strenge Behandlung der algebraischen Kurven und Flächen, ihrer Singularitäten und der mit ihnen zusammenhängenden Abelschen Integrale möglich und einfach durchführbar, welche mit der entsprechend begründeten Idealtheorie im Bereiche der algebraischen Zahlen vollständig parallel läuft.

Von entscheidender Wichtigkeit ist auch die zweite Tatsache, die ich an dieser Stelle noch kurz erwähnen möchte, wobei ich mich hier und im folgenden der Einfachheit wegen auf die Koeffizientenkörper $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(x_1 \ldots x_r)$ beschränken will. Erst auf der hier gewonnenen algebraischen Grundlage kann man nämlich einfach und allgemein beweisen, daß die n π-adischen Potenzreihen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, d. h. die Reihen $\xi = a_\alpha \pi^\alpha + a_{\alpha+1}\pi^{\alpha+1} + \cdots$ für jede in genügender Nähe der „Kurve“ $\mathfrak{C}_p$ mit der Gleichung $p(x_1, \ldots x_r) = 0$ liegende „Stelle“ $(x, x_1, \ldots x_r)$, d. h. für genügend kleine Werte von $|p|$, oder, was dasselbe ist, von $|\pi|$ gleichmäßig konvergieren und in einer positiven Umgebung jedes beliebigen Kurvenpunktes P von $\mathfrak{C}_p$ die n Gleichungswurzeln von $F(x) = 0$ *zahlenmäßig* darstellen.

Wir haben hier also Wurzeldarstellungen unserer allgemeinen Gleichung $F(x) = 0$ gewonnen, welche nicht bloß in der Umgebung eines *einzelnen* Punktes, sondern in der Nähe einer ganzen

Digitized by Google

$(r-1)$-dimensionalen Kurve $\mathfrak{C}_p$ im gewöhnlichen Sinne gleichmäßig konvergieren und wir sehen ferner, daß jene Wurzeln beim Umlauf um eine solche „Verzweigungskurve" $\mathfrak{C}_p$ in derselben Weise in einander übergehen, wie dies im einfachsten Falle der algebraischen Kurven $F(y, x) = 0$ beim Umlaufe um einen gewöhnlichen Verzweigungspunkt der zugehörigen Riemannschen Fläche der Fall ist.

Die dritte Frage, welche ich zum Schlusse noch ganz kurz berühren möchte, führt noch tiefer in die arithmetische Untersuchung der algebraischen Zahlgrößen hinein; die folgenden Betrachtungen zeigen aber, daß ihre vollständige Beantwortung aus unseren bisherigen Untersuchungen mit erschlossen werden kann.

Die bisherigen Untersuchungen gaben nämlich die vollständige Antwort auf die Frage nach den arithmetischen Teilbarkeitsbeziehungen der n Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ einer algebraischen Gleichung $F(x; x_1, \ldots x_r) = 0$ zu *einer* Primfunktion $p = p(x_1 \ldots x_r)$ aus $\mathfrak{R}(x_1 \ldots x_r)$. Damit sind aber die hier sich erhebenden Fragen in ihrer Gesamtheit noch keineswegs erschöpft.

Sind nämlich etwa p und p' zwei verschiedene Primfaktoren aus $\mathfrak{R}$, so kann und muß weiter nach den Teilbarkeitsbeziehungen dieser n Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ zu dem *Systeme* (p, p') dieser *beiden* Primfunktionen gefragt werden.

Handelt es sich z. B. um die Gleichung $F(z; xy) = 0$ einer Oberfläche im Raume, so gibt die Entwicklung ihrer Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ für den Bereich *einer* Primfunktion $p(xy)$ das Resultat, daß diese über und längs der *ganzen* zugehörigen Kurve $\mathfrak{C}_p$ $(p(xy) = 0)$ in der xy-Ebene in der vorher angegebenen Weise in Zyklen so unter einander zusammenhängen, daß z. B. für eine Verzweigungskurve $\mathfrak{C}_p$ der e-ten Ordnung immer je e Wurzeln eines solchen Zyklus überall bei einem Umlauf um diese Kurve zyklisch in einander übergehen.

Wie hängen nun aber jene n Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ in der Umgebung eines einzelnen *Punktes P* jener Kurve $\mathfrak{C}_p$ mit einander zusammen, welchen man ja als einen Schnittpunkt von $\mathfrak{C}_p$ mit einer anderen Primkurve $\mathfrak{C}_{p'}$ auffassen kann, deren Gleichung $p'(xy) = 0$ zu einer anderen Primfunktion $p'(xy)$ aus $\mathfrak{R}(x, y)$ gehört?

Zur vollständigen Lösung dieser Frage führt nun im allgemeinen Falle eines beliebigen Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(x_1 \ldots x_r)$ die folgende Betrachtung:

Für den Bereich einer Primfunktion $p(x_i)$ stellte sich jede Wurzel der Grundgleichung

$$F(x; x_i) = 0$$

Digitized by Google

als eine π-adische Zahl dar

$$\xi = a_\alpha(\varrho)\,\pi^\alpha + a_{\alpha+1}(\varrho)\,\pi^{\alpha+1} + \cdots,$$

deren Koeffizienten ganze Zahlen des zugehörigen Koeffizientenkörpers f-ter Ordnung $\mathfrak{R}(\varrho)$, waren, welcher durch eine modulo p irreduktible Gleichung f-ten Grades aus $\mathfrak{R}$

$$G(x;\ x_i) = 0$$

bestimmt war. Zu dieser Wurzel gehörte dann ein Zyklus von $ef = \lambda$ konjugierten Wurzeln entsprechend den zu ϱ und zu π konjugierten Zahlen. — Für den Bereich einer beliebigen neuen Primzahl $p'(x_i)$ zerfällt nun die neue Funktion $G(x, x_i)$ aus $\mathfrak{R}$ vom f-ten Grade (genau ebenso, wie vorher die Grundfunktion n-ten Grades $F(x, x_i) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_\nu(x)$ für den Bereich der ersten Primzahl $p(x_i)$) im Körper $\mathfrak{R}(p')$ der p'-adischen Zahlen in ein Produkt

$$G(x) = g_1(x)\, g_2(x) \ldots g_{\nu'}(x)$$

von lauter verschiedenen p'-adischen Primfaktoren. Ist nun wieder wie vorher $g(x)$ eine von diesen Primfunktionen, λ' ihr Grad, so zerfällt diese nunmehr in einem geeigneten π'-adischen Erweiterungskörper $\mathfrak{R}(\pi')$ von $\mathfrak{R}(p')$ in λ' konjugierte Linearfaktoren $x - \varrho$ für welche jedesmal

$$\varrho = b_\beta(\varrho')\,\pi'^\beta + b_{\beta+1}(\varrho')\,\pi'^{\beta+1} + \cdots$$

eine π'-adische Zahl ist, welche nach steigenden Potenzen von $\pi' \sim p'^{\frac{1}{e'}}$ fortschreitet; die Koeffizienten $b_\beta(\varrho')$, ... sind ganze Zahlen eines neuen Koeffizientenkörpers $\mathfrak{R}(\varrho')$ eines Grades f' für welchen $e'f' = \lambda'$ ist, und welcher durch eine neue Grundgleichung f'-ten Grades in $\mathfrak{R}$

$$H(x;\ x_i) = 0$$

definiert ist, die nun modulis (p, p') irreduzibel ist, und deren linke Seite auch für dieses Modulsystem reduziert angenommen werden kann. Die $\lambda' = e'f'$ zu demselben Primfaktor $g(x)$ gehörigen konjugierten Wurzeln zu ϱ gehen aus der soeben gegebenen π'-adischen Darstellung von ϱ dadurch hervor, daß man ϱ' und π' durch die f' bzw. $e'f'$ konjugierten Werte dieser beiden Zahlen ersetzt.

Substituiert man den so gewonnenen Wert von ϱ' in die Darstellung $\xi = a_\alpha(\varrho)\,\pi^\alpha + \cdots$ der einen Wurzel unserer Grundgleichung $F(x;\ x_i) = 0$, so erhält man für sie die folgende Darstellung:

$$\xi = \sum a_{rr'}(\varrho')\,\pi^r\,\pi'^{r'},$$

Digitized by Google

welche nun nach steigenden Potenzen von $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ und $\pi' \sim p'^{\frac{1}{e'}}$ fortschreitet und deren Koeffizienten ganze Elemente des durch die Gleichung $H(x; x_i) = 0$ vom f'-ten Grade definierten algebraischen Körpers über $\mathfrak{R}$ sind. Zu dieser Wurzel ξ gehört dann wieder ein Zyklus von $ee'f'$ konjugierten Wurzeln gleicher Ordnung unserer Grundgleichung entsprechend den f' konjugierten Zahlen zu ϱ' und den e bzw. e' zu π bzw. zu π' konjugierten Primzahlen.

In gleicher Weise kann man weitergehen, und man erhält so die vollständige Darstellung aller n Wurzeln der Grundgleichung $F(x; x_i) = 0$ für den Bereich eines ganz beliebigen Systems $(p, p', p'', \ldots p^{(\sigma)})$ von Primzahlen; ferner erkennt man, daß und wie sie auch in diesem allgemeinsten Falle in Zyklen von algebraisch konjugierten Wurzeln gleicher Ordnung zerfallen.

Damit ist das Problem der arithmetischen Auflösung der algebraischen Gleichungen vollständig gelöst.

Digitized by Google

Über eine Invariante von vier Ebenen des R_5[1]).

Von E. A. Weiss in Bonn.

Im *Binären Gebiete* der Punkte $\xi_1 : \xi_2$ werde die aus den Koordinaten zweier Punkte ξ und η gebildete zweireihige Determinante wie üblich mit:

$$(\xi\,\eta) = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \tag{1}$$

bezeichnet. Zwischen den aus vier Punkten $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ gebildeten Klammerausdrücken besteht dann die binäre Hauptidentität:

$$(\xi_0\xi_1)(\xi_2\xi_3) + (\xi_0\xi_2)(\xi_3\xi_1) + (\xi_0\xi_3)(\xi_1\xi_2) = 0. \tag{2}$$

Der im *Quaternären Gebiete* aus Plückerschen Linienkoordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ mit Hilfe der vierreihigen Determinanten:

$$(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{23} + \cdots + \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{Y}_{03} \tag{3}$$

der linken Seite von (2) nachgebildete Ausdruck:

$$(\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_1)(\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3) + (\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_2)(\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1) + (\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_3)(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2) \tag{4}$$

ist nicht identisch gleich Null. Sein Verschwinden drückt vielmehr eine im Zusammenhang mit der Theorie der Graßmannschen Doppelverhältnisse von vier Geraden und der Tangentenquadrupel kubischer Raumkurven oft untersuchte[2]) Beziehung zwischen den vier Geraden aus:

Das Verschwinden des aus vier als paarweise windschief und linear-unabhängig vorausgesetzten Geraden $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ gebildeten Ausdruckes (4) *besagt, daß die Gerade $\mathfrak{X}_0$ aus dem von den drei übrigen Geraden aufgespannten Regulus ein Geradenpaar ausschneidet, das zu dem Hesseschen Paare des Geradentripels konjugiert ist.* Wir wollen kurz die Gerade $\mathfrak{X}_0$ zum Geradentripel $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ *konjugiert* nennen. Aus der Symmetrie des Ausdruckes (4) folgt dann, *daß jede Gerade des Quadrupels zu dem Tripel der übrigen Geraden konjugiert ist.*

Der genannte Satz läßt sich nun leicht auf Räume beliebig hoher ungerader Dimensionenzahl verallgemeinern, indem man das

1) Vorgelegt in der 287. Sitzung am 30. Nov. 1932.

2) Vgl. die von K. Zindler in der Mathematischen Enzyklopädie III. C. 8, S. 984 genannten Arbeiten von J. C. Kluyver, E. Study und H. Mohrmann.

Digitized by Google

Verschwinden der aus vier Räumen R_p des R_{2p+1} dem Ausdrucke (4) nachgebildeten Invariante geometrisch deutet. Wir beschränken uns hier auf die Untersuchung der Figur von vier Ebenen des R_5. Für die Figur von vier R_p des R_{2p+1} gelten ganz analoge Überlegungen.

Von vier Ebenen E_0, E_1, E_2, E_3 des R_5 werde vorausgesetzt, daß sie paarweise windschief und linear-unabhängig sind. Die Ebenen E_1, E_2, E_3 bestimmen dann als Ort ihrer ∞^3 gemeinsamen Treffgeraden eine Segresche Mannigfaltigkeit M_3^3, welche ein binäres Gebiet erzeugender Ebenen enthält[3]). Diese schneiden auf den gemeinsamen Treffgeraden projektive Punktreihen aus. Man kann also die Mannigfaltigkeit dadurch erzeugen, daß man die Verbindungsebenen entsprechender Punkte von drei dieser projektiv aufeinander bezogenen Geraden konstruiert: Die Graßmannschen Koordinaten der erzeugenden Ebenen werden dann etwa (d. h. bei geeigneter Wahl dieser Geraden) die der Matrix:

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

zu entnehmenden dreireihigen Determinanten. Sie enthalten also den binären Parameter λ im 3. Grade.

Dem binären Gebiete der erzeugenden Ebenen gehören auch die drei Ausgangsebenen E_1, E_2, E_3 an. Nehmen wir an, daß sie den Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ entsprechen!

Die sechsreihige Determinante $(E_2 E_3)$ enthält dann jeden der beiden Parameter α_2 und α_3 im dritten Grade und verschwindet dann und nur dann, wenn die Ebenen E_2 und E_3 sich schneiden, also — da beide Ebenen der M_3^3 angehören — zusammenfallen, mit anderen Worten, wenn die Parameter α_2 und α_3 identisch sind. Sie unterscheidet sich daher von dem Ausdrucke $(\alpha_2 \alpha_3)^3$ nur um einen numerischen Faktor, den wir gleich 1 voraussetzen können:

$$(6) \qquad (E_2 E_3) = (\alpha_2 \alpha_3)^3, \quad (E_3 E_1) = (\alpha_3 \alpha_1)^3, \quad (E_1 E_2) = (\alpha_1 \alpha_2)^3.$$

Die Mannigfaltigkeit M_3^3 wird nun von der vierten Ebene E_0 in drei Punkten geschnitten, durch welche drei erzeugende Ebenen laufen. Die Parameter dieser Ebenen seien die Nullstellen der Form: $(\alpha \xi)^3$. Jetzt verschwindet der Ausdruck $(E_0 E_1)$ dann und nur dann, wenn E_0 die Ebene E_1 schneidet, wenn also α_1 eine

3) Vgl. etwa K. Zindler, Synthetische Gewinnung geometrischer linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. Crelles Journal 111, S. 303.

Digitized by Google

Nullstelle von $(\alpha\xi)^3$ ist. Daher wird wie oben:

$$(7) \qquad (E_0 E_1) = (\alpha\alpha_1)^3, \quad (E_0 E_2) = (\alpha\alpha_2)^3, \quad (E_0 E_3) = (\alpha\alpha_3)^3.$$

Aus (6) und (7) folgt:

$$(8) \qquad (E_0 E_1)(E_2 E_3) + (E_0 E_2)(E_3 E_1) + (E_0 E_3)(E_1 E_2) = \\ = (\alpha\alpha_1)^3(\alpha_2\alpha_3)^3 + (\alpha\alpha_2)^3(\alpha_3\alpha_1)^3 + (\alpha\alpha_3)^3(\alpha_1\alpha_2)^3,$$

und das Verschwinden dieses Ausdruckes bedeutet, daß die kubische Form $(\alpha\xi)^3$ zu der kubischen Form:

$$(9) \qquad (\beta\xi)^3 = (\alpha_2\alpha_3)^3(\alpha_1\xi)^3 + (\alpha_3\alpha_1)^3(\alpha_2\xi)^3 + (\alpha_1\alpha_2)^3(\alpha_3\xi)^3,$$

also der Form mit den Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *konjugiert* ist. (Es verschwindet die bilineare Invariante $(\alpha\beta)^3$.)

Nennen wir jetzt eine Ebene E_0 zu einem Ebenentripel E_1, E_2, E_3 *konjugiert*, wenn sie aus der von E_1, E_2, E_3 aufgespannten Mannigfaltigkeit M_3^3 ein Tripel erzeugender Ebenen ausschneidet, das — im binären Gebiete der erzeugenden Ebenen von M_3^3 — zum Ebenentripel E_1, E_2, E_3 konjugiert ist, so können wir sagen: *Das Verschwinden des für vier paarweise windschiefe linear-unabhängige Ebenen E_0, E_1, E_2, E_3 des R_5 gebildeten Ausdruckes* (8) *ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede dieser Ebenen zu dem Tripel der übrigen konjugiert ist.*

Es ist klar, daß wir hiermit ein Gegenstück zu dem am Anfang dieser Note genannten liniengeometrischen Satze gewonnen haben. Man erhält die (8) entsprechende räumliche Beziehung, wenn man in (8) den Exponenten 3 durch 2 ersetzt und die Verallgemeinerung für den R_{3p+1}, wenn man diesen Exponenten gleich $p+1$ setzt. An Stelle der M_2^2 der Figur im R_3 tritt die Segresche Mannigfaltigkeit M_{p+1}^{p+1} des R_{3p+1}.

Wir wollen zum Schluß von dem zuletzt bewiesenen Satze eine Anwendung machen. Hält man in der für vier Geraden gebildeten Gleichung:

$$(10) \qquad (\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1)(\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3) + (\mathfrak{X}\mathfrak{X}_2)(\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1) + (\mathfrak{X}\mathfrak{X}_3)(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2) = 0$$

drei paarweise windschiefe Geraden fest und läßt die vierte variieren, so erhält man die Gleichung eines regulären linearen Komplexes. Damit hat man den Satz von Chasles:

Der Ort aller Geraden, welche Paare zugeordneter Geraden eines involutorischen Regulus schneiden, ist ein regulärer linearer Komplex. (Die genannte Involution ist durch ihr Ruhepaar, das Hessesche Geradenpaar des vorgegebenen Geradentripels charakterisiert.)

Analog kann man im R_5 (und in höheren Räumen) verfahren

Digitized by Google

und in der für vier Ebenen gebildeten Gleichung:

$$(11) \qquad (E E_1)(E_2 E_3) + (E E_2)(E_3 E_1) + (E E_3)(E_1 E_2) = 0$$

drei paarweise windschiefe Ebenen festhalten und die vierte variieren lassen. Man erhält dann die Gleichung eines linearen Ebenenkomplexes und zwar wiederum eines *regulären* Komplexes: Die biquadratische Invariante des Komplexes[4]) verschwindet nicht, die Hauptebenen des Komplexes sind windschief. So hat sich ein einfacher analytischer Beweis für den Satz von C. Segre[5]) ergeben:

Der Ort aller Ebenen, die eine M_3^3 des R_5 in Ebenentripeln schneiden, die zu einem festen Tripel verschiedener Ebenen dieser M_3^3 konjugiert sind, ist ein regulärer linearer Ebenenkomplex.

---

4) W. Reichel, Über trilineare alternierende Formen ... Diss. Greifswald, 1907, S. 14, (XXX).

5) C. Segre, Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni. Annali di Mat. (3), 27, 1917, Nr. 29.

Zusatz bei der Korrektur: Für das Verschwinden einer anderen im Zusammenhang mit der Aufstellung eines vollständigen Invariantensystems von 4 Ebenen des R_5 durch R. Weitzenböck behandelten Invariante (Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. 35, 1932) habe ich ebendort (36, 1933) eine geometrische Deutung angegeben.

Digitized by Google

Der Asymptotenkegel der Minimalhyperflächen [1]).

Von Max Pinl in Berlin-Wilmersdorf.

Im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum R_{n+1}, bezogen auf kartesische (komplexe) Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, sei eine n-dimensionale (analytische) Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n durch die Vektorgleichung:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{1}$$

gegeben, ihr Einheitsnormalvektor sei $\mathfrak{n}$, seine Ableitungen nach den Parametern u_α wie auch die des Vektors $\mathfrak{x}$ seien durch (griechische) Indizes bezeichnet, über welche im Sinne der Einsteinschen Regeln von 1 bis n zu summieren ist. Dann ist der erste, zweite und dritte Fundamentaltensor der V_n folgendermaßen bestimmt:

$$g_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_\alpha . \mathfrak{x}_\beta; \quad h_{\alpha\beta} = \mathfrak{n} . \mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \frac{(\mathfrak{x}_{\alpha\beta}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n)}{|g_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}}}; \tag{2}$$

$$e_{\alpha\beta} = \mathfrak{n}_\alpha \mathfrak{n}_\beta; \qquad \alpha, \beta, = 1, 2 \ldots n.$$

Die Fundamentaltensoren seien sämtlich regulär:

$$|g_{\alpha\beta}| \neq 0, \; |h_{\alpha\beta}| \neq 0, \; |e_{\alpha\beta}| \neq 0.$$

Die Minimalhyperflächen des R_{n+1} sind die Extremalen des Variationsproblems:

$$\delta \overset{(n)}{\int \cdots \int} |g_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}} \, du_1 \, du_2 \ldots du_n = 0. \tag{3}$$

Sie sind Lösungen der für das folgende grundlegenden Differentialgleichung [2]):

$$h_{\alpha\beta} \, g^{\alpha\beta} = 0 \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots n, \tag{4}$$

wo mit $g^{\alpha\beta}$ der kontravariante erste Fundamentaltensor der V_n bezeichnet ist.

---

1) Vorgelegt in der 288. Sitzung am 6. Januar 1933.

2) Vergl. R. Lipschitz, Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen, Crelles Journal Bd. 78 S. 1—45; Berlin 1874; ferner H. Kühne, Über die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit, Arch. für Mathem. u. Physik (3) 6, S. 260, 1904.

Digitized by Google

§ 1. Klassifizierung der Minimalhyperflächen.

Wir betrachten die Parametermatrix: $\left\| h_{\alpha\beta} - \frac{1}{R} g_{\alpha\beta} \right\|$. Ihre Eigenwerte sind die Wurzeln $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \cdots \frac{1}{R_n}$, für welche die „charakteristische Determinante" $\left| h_{\alpha\beta} - \frac{1}{R} g_{\alpha\beta} \right|$ verschwindet. Nach unseren Voraussetzungen handelt es sich um die algebraische Gleichung n-ten Grades:

$$(5) \quad a_0 \left(\frac{1}{R}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{R}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{1}{R}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \frac{1}{R} + a_n = 0;$$

$$a_0 \not\equiv 0; \quad a_n \not\equiv 0$$

mit den Koeffizienten:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{a_1}{a_0} = (-1)^1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{R_n} \right) \\ \frac{a_2}{a_0} = (-1)^2 \left(\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_1 R_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{R_{n-1} R_n} \right) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_0} = (-1)^{n-1} \frac{R_1 + R_2 + \cdots\cdots + R_n}{R_1 \cdot R_2 \cdots\cdots R_n} \\ \frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \frac{1}{R_1 \cdot R_2 \cdots\cdots R_n}. \end{cases}$$

Von den Voraussetzungen $|g_{\alpha\beta}| \not\equiv 0$ und $|h_{\alpha\beta}| \not\equiv 0$ ist die erste mit $a_0 \not\equiv 0$ die zweite mit $a_n \not\equiv 0$ gleichbedeutend; gemäß $a_n \not\equiv 0$ werden allgemeine Hypertorsen, durch $a_0 \not\equiv 0$ die isotropen Hypertorsen von der Untersuchung ausgeschlossen. Allgemein ist nach der Struktur der „charakteristischen Determinante" der Koeffizient a_k durch die Summe aller Determinanten gegeben, welche man erhält, indem man k Kolonnen aus $\|g_{\alpha\beta}\|$ durch die entsprechenden Kolonnen aus $\|h_{\alpha\beta}\|$ ersetzt. Demnach ist die Beziehung $a_1 \equiv 0$ mit $h_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \equiv 0$ äquivalent und die Minimalhyperflächen sind nach (6) durch das Verschwinden der Summe der Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_\alpha}$ charakterisiert. Für $n = 2$ und nur in diesem Falle (V_2 in R_3) folgt daraus das Verschwinden der Summe der Hauptkrümmungsradien R_α selbst[3]). Die Unabhängigkeit der (relativen) Differential-

3) Vgl. § 3.

Digitized by Google

varianten $a_0, a_1, \ldots a_n$ kann zu einer Klassifizierung der Minimalhyperflächen benutzt werden, indem man z. B. nach der Alternative $a_k \equiv 0$ bezw. $a_k \not\equiv 0$ (für $k = 2, 3 \ldots, n-1$) 2^{n-2} verschiedene Klassen von Minimalhyperflächen des R_{n+1} unterscheidet.

§ 2. Die Fundamentalkegel.

Die Gesamtheit der Nullrichtungen der drei Fundamentaltensoren (2) bilden in jedem regulären Punkt der V_n (1) drei (nicht zerfallende) $(n-1)$-dimensionale (koinitiale) „Fundamentalkegel" zweiter Ordnung:

(7) $g_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta = 0$ isotroper Kegel!

(8) $h_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta = 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$ Asymptotenkegel!

(9) $e_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta = 0$ „hypersphärischer" Kegel!

Im n-ären Gebiet der homogenen Veränderlichen ξ^α:

(10) $$\xi^1 : \xi^2 : \xi^3 : \ldots : \xi^n = du^1 : du^2 : \ldots : du^n$$

treten an ihre Stelle die „Fundamentalkegelschnitte":

(7′) $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0$

(8′) $h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$

(9′) $e_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0$

(reguläre) Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung der Dimension $n-2$, M^2_{n-2}, die man als Schnitte der Fundamentalkegel (7), (8), (9) mit dem uneigentlichen R_{n-1} des (lokalen!) Tangential-R_n aufzufassen hat. Bilden wir jetzt die „Büschel":

(11) $(g_{\alpha\beta} - \lambda h_{\alpha\beta})\xi^\alpha\xi^\beta = 0$; $(g_{\alpha\beta} - \varrho e_{\alpha\beta})\xi^\alpha\xi^\beta = 0$; $(h_{\alpha\beta} - \sigma e_{\alpha\beta})\xi^\alpha\xi^\beta = 0$; $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n$

und berechnen aus den charakteristischen Gleichungen:

(12) $|g_{\alpha\beta} - \lambda h_{\alpha\beta}| = 0$; $|g_{\alpha\beta} - \varrho e_{\alpha\beta}| = 0$; $|h_{\alpha\beta} - \sigma e_{\alpha\beta}| = 0$

ihre harmonischen Invarianten: $a_0, a_1 \ldots a_n$; $b_0, b_1 \ldots b_n$; $c_0, c_1 \ldots c_n$, so wird jede projektive Aussage, welche dem Verhalten dieser Invarianten entspricht, zur metrischen Aussage über die V_n, sobald eine der beiden Basis-M^2_{n-2} die „absolute" im Tangential-R_n darstellt. Einen derartigen Satz verdankt man Rosanes[4]): Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$-fachen Mannigfaltigkeit von je n auf einer regu-

4) Vgl. J. Rosanes, Math. Ann. Bd. XXIII, S. 413, 1884.

Digitized by Google

lären ($a_0 \not\equiv 0$) Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung von $n-2$ Dimensionen, M^2_{n-2}, diskret gelegenen Punkten, welche paarweise konjugiert zu einer zweiten, M^{*2}_{n-2} gleicher Art ($a_n \not\equiv 0$) liegen, besteht im Verschwinden der zweiten bezw. vorletzten harmonischen Simultaninvarianten (a_1 bezw. a_{n-1}) in der Entwicklung der charakteristischen Gleichung des von M^2_{n-2} und M^{*2}_{n-2} erzeugten Büschels! Daraus ergibt sich für die Minimal-V_n im R_{n+1} der Satz:

Der Asymptotenkegel einer Minimalhyperfläche (beliebiger Klasse) ist gleichseitig[5]) *und umgekehrt sind Hyperflächen, deren Asymptotenkegel gleichseitig ist, Minimalhyperflächen.*

Die Bedingung ist notwendig, denn nach dem Satz von Rosanes ist der (projizierende) Asymptotenkegel (8) für $a_1 \equiv 0$ Träger von $\infty^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ Gruppen von je n Erzeugenden, welche paarweise zum isotropen Kegel (7) konjugiert, also paarweise orthogonal sind. Die Bedingung ist aber auch hinreichend, denn liegt eine Hyperfläche mit durchweg gleichseitigem Asymptotenkegel vor, so erhält man z. B in orthogonalen Asymptotenparametern u^*_α für ihre Fundamentaltensoren $g^*_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta *}$, $h^*_{\alpha\beta}$ die Werte:

$$(13) \qquad g^*_{\alpha\beta} = 0;\ g^{\alpha\beta *} = 0;\ h^*_{\alpha\alpha} = 0; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots n;\ \alpha \neq \beta,$$

somit: $$g^{\alpha\beta *} h^*_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{q. e. d.}$$

Korollar[6]): *Der Asymptotenkegel einer Hyperfläche, auf welcher die Summe der Hauptkrümmungsradien identisch verschwindet, ist gleichkantig*[7]); *umgekehrt gilt auf Hyperflächen mit gleichkantigem Asymptotenkegel:* $R_1 + R_2 + \cdots + R_n \equiv 0$.

Dieser Sachverhalt ergibt sich unmittelbar aus der Deutung des Satzes von Rosanes im Falle $a_{n-1} \equiv 0$.

§ 3. Beispiele.

Im Vorgehenden hat eine charakteristische Eigenschaft der Minimalflächen des R_3 — die Orthogonalität ihrer Asymptotenlinien — ihr mehrdimensionales Seitenstück gefunden, ohne daß unter den Minimalhyperflächen eine engere Auswahl getroffen werden mußte. Die Verhältnisse liegen ungünstiger, wenn man

5) Vgl. L. Heffter, Lehrb. der Analyt. Geom. Bd. II, S. 31, 44, 45, 50; Leipzig 1923.

6) Das Ergebnis (13), wonach die Annahme von m orthogonalen Asymptotenrichtungen in Punkten allgemeiner Lage einer V_m auf Minimal-V_m führt, findet sich bereits bei C. E. Wilder, Differential geometry of one m-dimensional manifold, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 25, (6) p. 110, 1923.

7) Vgl. (4).

Digitized by Google

sich die Aufgabe stellt, andere bekannte Eigenschaften der Minimalflächen auf höhere Dimensionen zu übertragen. Betrachten wir z. B. die Translations-V_n von n isotropen Kurven ${}_{(\alpha)}\mathfrak{x}(u_\alpha)$:

$$(14)\qquad \mathfrak{v}(u_1, u_2, \ldots u_n) = {}_{(1)}\mathfrak{x}(u_1) + {}_{(2)}\mathfrak{x}(u_2) + \cdots + {}_{(n)}\mathfrak{x}(u_n);$$
$$ {}_{(1)}\mathfrak{x}'^2 = {}_{(2)}\mathfrak{x}'^2 = \cdots = {}_{(n)}\mathfrak{x}'^2 = 0 \,\{u_\alpha\}\,!$$

Wegen

$$h_{\alpha\beta} = 0; \quad g_{\alpha\alpha} = 0; \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n, \ \alpha \neq \beta)$$

verschwindet für die V_n (14) jeder Determinantenposten in a_{n-1} und es gilt auf (14) $a_{n-1} \equiv 0$ dagegen (für $n > 2$) im allgemeinen: $a_1 \not\equiv 0$. Die Liesche Auffassung *aller* Minimalflächen als Schiebflächen isotroper Kurven im Sinne der Gleichung (14) verliert somit für $n > 2$ ihre allgemeine Gültigkeit! Doch sind die Translations-V_n (14) stets Beispiele für Hyperflächen mit gleichkantigem Asymptotenkegel. Ein weiteres Beispiel liefert die Translations-V_{2n} [8]) im R_{2n+1}:

$$(15)\qquad \mathfrak{z}(u_1, u_2, \ldots u_n, v_1, v_2 \ldots v_n) = \mathfrak{x}(u_1 \ldots u_n) + \mathfrak{y}(v_1 \ldots v_n);$$
$$\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta \equiv 0 \,\{u_\alpha\}; \quad \mathfrak{y}_\alpha \mathfrak{y}_\beta \equiv 0 \,\{v_\alpha\} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots n.$$

Auf diesen Mannigfaltigkeiten gilt stets: $a_1 \equiv a_{2n-1} \equiv 0$, wie man leicht errechnet. Auch diese Verallgemeinerung des Lieschen Ansatzes liefert (für $n > 1$) nicht alle Minimal-V_{2n} des R_{2n+1}, sondern nur Beispiele für Minimalhyperflächen gerader Dimension, deren Asymptotenkegel sowohl gleichseitig wie gleichkantig ist.

In der Lieschen Auffassung erscheinen die Minimalflächen des R_3 als konjugierte Flächen des isotropen Komplexes mithin als (spezielle) logarithmische Bilder der konjugierten Flächen des tetraedalen Komplexes, dessen allgemeine konjugierte Integralflächen durch logarithmische Transformation immer in Translationsflächen übergehen [9]). Eine systematische Untersuchung der Verhältnisse, welche sich an Verallgemeinerungsmöglichkeiten der angeführten Komplexe auf höhere Dimensionen anknüpfen läßt, wird auf diesem Gebiet die nächste Aufgabe sein.

In einer Untersuchung über die konforme hypersphärische Abbildung der Hyperflächen im euklidischen R_{n+1} [10]) hat neuerdings R. Frucht gezeigt, daß für deren Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_i}$ bei

8) Vgl. J. Lense, Über spez. ametr. Mannigfaltigkeiten, Sitzungs-Ber. der Ak. d. Wiss., Wien IIa, Bd. 135, H. 1/2, S. 32, 1926.

9) Vgl. S. Lie-G. Scheffers, Geometrie d. Berührungstransformationen I, Kap. 9, § 3/4, Leipzig 1896.

10) Erscheint in den Wiener Monatsheften für Mathem. und Physik.

Digitized by Google

konformem Charakter der hypersphärischen Abbildung nur zwei Vorzeichenkombinationen:

$$(16)\quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_3} = \cdots = \frac{1}{R_n} \quad \text{bezw.}$$

$$-\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_3} = \cdots = \frac{1}{R_n}$$

möglich sind. Damit ist eine weitere wichtige Eigenschaft der Minimalflächen auf den dreidimensionalen Raum beschränkt.

Digitized by Google

Über eine Eigenschaft der Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen [1])

Von V. Levin.

§ 1.

Herr W. B. Fite [2]) hat den folgenden Satz bewiesen: Wenn eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + m_1 y^{(n-1)} + \cdots + m_n y = 0$$

in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$, wo die Funktionen $m_\varkappa(x)$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ stetig sind, und

$$|m_\varkappa| \leqq M_\varkappa$$

gilt, samt ihren $n-1$ ersten Ableitungen mindestens einmal verschwindet, so gilt mit $b - a = l$

$$1 < M_1 l + M_2 l^2 + \cdots + M_n l^n.$$

Wir betrachten nun speziell die Differentialgleichungen der Form

$$y^{(n)} + m(x) y = 0 \tag{1}$$

mit stetigem $m(x)$ in $a \leqq x \leqq b$.

Der Fitesche Satz liefert dann

$$M l^n > 1, \tag{2}$$

wenn

$$|m(x)| \leqq M \tag{3}$$

in $a \leqq x \leqq b$.

Die Frage nach der unteren Grenze des Ausdruckes $M l^n$ in (2) kann in die folgende Form einer minimum maximorum Aufgabe gebracht werden.

Zunächst darf $a = 0$ angenommen werden. Nach (1) und (3) ist

$$M = \operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq l} \left| \frac{y^{(n)}(x)}{y(x)} \right|, \tag{4}$$

wo $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ mindestens einmal in $0 \leqq x \leqq l$ verschwinden,

1) Vorgetragen in der 289. Sitzung am 25. Januar 1933.

2) Annals of Mathematics (2) 18, 1916—1917, pp. 214—220.

Digitized by Google

und y nicht identisch verschwindet. Mit $x = l\xi$, $y(l\xi) = \eta(\xi)$ wird aus (4)

$$(5) \qquad M l^n = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \xi \leqq 1} \left| \frac{\eta^{(n)}(\xi)}{\eta(\xi)} \right|,$$

sodaß das folgende Problem entsteht:

Sei $\eta(\xi)$ eine in $0 \leqq \xi \leqq 1$ nicht identisch verschwindende n-mal stetig differentiierbare Funktion; ferner gebe es n Zahlen $\vartheta_\varkappa$, $0 \leqq \vartheta_\varkappa \leqq 1$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\operatorname{Max} |\vartheta_\varkappa - \vartheta_{\varkappa'}| = 1, \quad \varkappa, \varkappa' = 0, 1, \ldots, n-1,$$

sodaß

$$(6) \qquad \eta^{(\varkappa)}(\vartheta_\varkappa) = 0$$

gilt ($\eta^{(0)} = \eta$). Man bestimme die

$$(7) \qquad \text{Untere Grenze} \operatorname*{Max}_{0 \leqq \xi \leqq 1} \left| \frac{\eta^{(n)}(\xi)}{\eta(\xi)} \right| = u(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1}).$$

Ist

$$U = \operatorname{Min} u(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{n-1})$$

unter den formulierten Nebenbedingungen für die $\vartheta_\varkappa$, so kann auf der rechten Seite von (2) $U - \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ zu Recht stehen.

Im folgenden bestimmen wir die Größe u für den speziellen Fall

$$(8) \qquad \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \cdots = \vartheta_{n-1} = 1,$$

also $u(0, 1, \ldots, 1) = v$.

Unser Ergebnis lautet

$$(9) \qquad v = A^n,$$

wo $A = A(n)$ die kleinste positive Lösung der transzendenten Gleichung

$$(10) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{A \cos \frac{2\varkappa-1}{n} \pi} \cos\left(A \sin \frac{2\varkappa-1}{n} \pi\right) = 0$$

bedeutet[3]). Außerdem ist in diesem Falle v das genaue Minimum

3) Es ist $A(2) = \frac{\pi}{2}$, $A(3) = 0{,}58 \ldots \pi$ und überhaupt $A(n) > \frac{\pi}{2}$ für $n > 2$; denn für $A(n) \leqq \frac{\pi}{2}$ ist $\cos\left(A \sin \frac{2\varkappa-1}{n} \pi\right) \geqq 0$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$, und das Gleichheitszeichen kann nicht in allen n Fällen bestehen, wenn $n > 2$ ist. Die scharfe Ungleichheit $M l^2 \geqq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, also der Fall $n = 2$ unseres Satzes (9) findet sich schon implizit bei Fite, a. a. O.

Digitized by Google

des

$$\text{(11)} \qquad \operatorname*{Max}_{0 \leqq \xi \leqq 1} \left| \frac{\eta^{(n)}(\xi)}{\eta(\xi)} \right|,$$

d. h. es gibt ein allen Bedingungen genügendes $\eta(\xi)$ für das dieses Maximum gleich v wird.

Dieses Ergebnis liefert den Satz:
Genügt $y = y(x)$ der Differentialgleichung (1), und ist

$$y(a) = 0, \quad y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0,$$

so gilt

$$|b-a|^n M \geqq A^n,$$

wo M in (3) erklärt ist, und A die kleinste positive Lösung der Gleichung (10) bedeutet. Das Gleichheitszeichen wird erreicht.

§ 2.

Zunächst machen wir die Bemerkung, daß es zur Bestimmung von v nur solche $\eta(\xi)$ mit (6) und (8) zu betrachten genügt, deren n-te Ableitung in $0 \leqq \xi \leqq 1$ das Vorzeichen nicht wechselt. Denn man vergrößert den Ausdruck (11) nicht, wenn man $\eta^{(n)}(\xi)$ streckenweise Null setzt, wie man leicht einsieht. Vermöge der Relation

$$\eta(\xi) = \int_{\xi_n=0}^{\xi} \int_{\xi_{n-1}=1}^{\xi_n} \cdots \int_{\xi_1=1}^{\xi_2} \eta^{(n)}(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}\, d\xi_n$$

ist dann auch das Vorzeichen von $\eta(\xi)$ in $0 \leqq \xi \leqq 1$ konstant, uzw. gilt

$$\operatorname{sign} \eta(\xi) = (-1)^{n-1} \operatorname{sign} \eta^{(n)}(\xi)$$

für $0 < \xi \leqq 1$ ausgenommen die Punkte, in denen $\eta^{(n)}(\xi) = 0$ ist.
Es folgt

$$\text{(12)} \qquad \left| \frac{\eta^{(n)}(\xi)}{\eta(\xi)} \right| = (-1)^{n-1} \frac{\eta^{(n)}(\xi)}{\eta(\xi)}.$$

Es sei nun λ der kleinste positive Eigenwert des Randwertproblems

$$\text{(13)} \qquad H^{(n)} + \lambda H = 0,$$

$$\text{(14)} \qquad H^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1, \quad H(1) = 0.$$

Dann gilt der folgende Hilfssatz:
Besitzt die Differentialgleichung

$$\text{(15)} \qquad \eta^{(n)} + (-1)^n \lambda \eta = f(\xi)$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung $\eta(\xi)$, welche (6) und

Digitized by Google

(8) genügt, so verschwindet entweder $f(\xi)$ in $0 \leqq \xi \leqq 1$ identisch, oder ändert dort das Vorzeichen.

Beweis. Die Multiplikation von (15) mit $H(\xi)$ aus (13) und (14), und Integration von 0 bis 1 liefert die bekannte Relation

$$\int_{\xi=0}^{1} f(\xi) H(\xi) d\xi = 0. \tag{16}$$

Eine einfache Überlegung lehrt aber, daß $H(\xi)$ in $0 \leqq \xi \leqq 1$ das Vorzeichen nicht wechseln kann; denn wäre etwa $H(\vartheta) = 0$, $0 < \vartheta < 1$, so würde $H^*(\Xi) = H(\vartheta \Xi)$ (14) befriedigen, und Lösung von

$$H^{*(n)} + \lambda \vartheta^n H^* = 0$$

sein, was der Minimumeigenschaft von λ widerspricht. Die Gleichung (16) liefert jetzt die Behauptung des Hilfssatzes.

Nunmehr kann aber behauptet werden, daß

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq \xi \leqq 1} \left\{ (-1)^{n-1} \frac{\eta^{(n)}(\xi)}{\eta(\xi)} \right\} \geqq \lambda \tag{17}$$

gilt; denn wäre

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq \xi \leqq 1} \left\{ (-1)^{n-1} \frac{\eta^{(n)}(\xi)}{\eta(\xi)} \right\} < \lambda$$

so wäre für alle $0 \leqq \xi \leqq 1$ entweder

$$\eta^{(n)} + (-1)^n \lambda \eta < 0,$$

oder

$$\eta^{(n)} + (-1)^n \lambda \eta > 0;$$

dies widerspricht aber dem Hilfssatz.

Das Gleichheitszeichen gilt in (17) für

$$\eta(\xi) = H(1 - \xi)$$

mit H aus (13) und (14).

§ 3.

Es bleibt noch die Bestimmung von λ. Das allgemeine Integral von (13) lautet, wenn man

$$\varepsilon_\varkappa = e^{\frac{2\varkappa - 1}{n} \pi i}, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, n,$$

setzt,

$$H(\xi) = \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa e^{A \varepsilon_\varkappa \xi} \tag{18}$$

Digitized by Google

mit

$$A > 0, \quad A^n = \lambda. \tag{19}$$

Die Bedingungen (14) liefern folgende n linear-homogene Gleichungen für die $C_\varkappa$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa e^{A\varepsilon_\varkappa} = 0, \quad \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa \varepsilon_\varkappa^\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1,$$

und die Gleichung für A:

$$\Delta = \Delta(A; n) = \begin{vmatrix} e^{A\varepsilon_1} & \ldots & e^{A\varepsilon_n} \\ \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \ldots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Eine leichte Rechnung liefert

$$\Delta(A; n) = \frac{V}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{A\varepsilon_\varkappa}, \tag{21}$$

wo

$$V = |\varepsilon_\alpha^{\beta-1}|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

die Vandermondesche Determinante der ε_α ist,

$$V^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n \neq 0.$$

Die Gleichung (20) liefert nun unter Berücksichtigung von (21)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{A\varepsilon_\varkappa} = 0. \tag{22}$$

Nun gilt identisch in A

$$J\left\{\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{A\varepsilon_\varkappa}\right\} = 0,$$

und wegen

$$R\left\{\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{A\varepsilon_\varkappa}\right\} = \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{A\cos\frac{2\varkappa-1}{n}\pi} \cos\left(A \sin\frac{2\varkappa-1}{n}\pi\right) = F(A; n)$$

reduziert sich die Gleichung (22) auf die Gleichung (10).

Die Gleichung (10) besitzt auch für jedes $n \geqq 2$ positive Wurzeln. Setzt man nämlich

$$\sin\frac{2\varkappa-1}{n}\pi = a_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, n,$$

so existieren nach bekannten Sätzen über diophantische Approxi-

Digitized by Google

mationen eine Zahl A_1, $1 < A_1 < 4^n$ und n passende ungerade Zahlen $u_\varkappa$, sodaß

$$\left| A_1 \frac{a_\varkappa}{\pi} - u_\varkappa \right| < \frac{1}{2},$$

d. h.

$$|A_1 a_\varkappa - \pi u_\varkappa| < \frac{\pi}{2}$$

gilt. Es ist also $F(A_1; n) < 0$, und aus $F\left(\frac{\pi}{2}; n\right) \geqq 0$ (das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle $n = 2$) folgt die behauptete Existenz der positiven Wurzeln von (10). Aus (17) in Verbindung mit (12) und (19) folgt die Behauptung (9).

Digitized by Google

Über komplexe Zahlsysteme und ihren Zusammenhang mit den äquidistanten Transformationen in Ebenen mit nicht-euklidischer Maßbestimmung[1]).

Von Ulrich Graf in Berlin.

Unter den komplexen Zahlsystemen von der Form $xe_1 + ye_2$ mit e_1 und e_2 als Einheiten gibt es drei, für die das kommutative und assoziative Gesetz der Multiplikation gilt. Diese drei Zahlsysteme sind durch die Rechenregeln

$$\text{I.} \quad e_1^2 = e_1;\ e_1 . e_2 = e_2 . e_1 = e_2;\ e_2^2 = -e_1,$$
$$\text{II.} \quad e_1^2 = e_1;\ e_1 . e_2 = e_2 . e_1 = e_2;\ e_2^2 = 0,$$
$$\text{III.} \quad e_1^2 = e_1;\ e_1 . e_2 = e_2 . e_1 = e_2;\ e_2^2 = +e_1$$

gekennzeichnet[2]). Wird $e_1 = 1$ und $e_2 = \omega$ gesetzt, so erscheinen die Zahlen in der Form $x + \omega y$, wobei ω für die drei Systeme bezw. durch $\omega^2 = -1$, $\omega^2 = 0$, $\omega^2 = +1$ charakterisiert ist. Wird die „imaginäre" Einheit ω bezw. mit i, ε, j bezeichnet, so nehmen die drei Zahlenarten bezw. die Formen

I.	II.	III.
$z = x + iy$	$z = x + \varepsilon y$	$z = x + jy$
$\omega = i,\ i^2 = -1$	$\omega = \varepsilon,\ \varepsilon^2 = 0$	$\omega = j,\ j^2 = +1$
normal-komplex	dual-komplex	anormal-komplex

an.

Das erste System ist das der normal-komplexen Zahlen, in ihm ist ω gleich der imaginären Einheit i. Das zweite System ist das der dual-komplexen Zahlen, das zuerst von Study bei geometrischen Untersuchungen benutzt wurde[3]). Einen Überblick über die Anwendung der dualen Zahlen in der Geometrie gibt eine Arbeit von Herrn Grünwald[4]). Das dritte System werde als das System der anormal-komplexen Zahlen bezeichnet.

Unter den drei Systemen ist das erste dadurch ausgezeichnet, daß nur in ihm der Satz der gewöhnlichen Arithmetik gilt: „Ein

1) Vorgelegt in der 290. Sitzung am 22. Februar 1933.

2) E. Study: Encyklopädie d. mathem. Wissensch., I A 4, S. 159.

3) E. Study: Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, § 23.

4) J. Grünwald: „Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie", Monatshefte für Mathem. und Physik, 17. Jahrgang 1906, S. 81.

Digitized by Google

Produkt verschwindet dann und nur dann, wenn mindestens einer seiner Faktoren verschwindet". Ein Produkt dual-komplexer Zahlen ist auch dann gleich null, wenn bei mindestens zwei Faktoren der skalare Bestandteil verschwindet; ein Produkt anormal-komplexer Zahlen ist auch dann gleich null, wenn bei mindestens zwei Faktoren $a+jb$ und $c+jd$ die Beziehungen $a = -b$ und $c = d$ bestehen.

Die Addition, Subtraktion und Multiplikation erfolgt in den drei Systemen nach den aus der gewöhnlichen Arithmetik bekannten Rechenregeln; jedoch ist bei den dual-komplexen Zahlen die Division durch ε, bei den anormal-komplexen Zahlen die Division durch $1 \pm j$ ausgeschlossen.

Die Gaußsche Ebene der normal-komplexen Zahlen läßt sich durch stereographische Projektion auf die Riemannsche Zahlenkugel abbilden. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich in analoger Weise den dual-komplexen Zahlen die Punkte eines Zylinders und den anormal-komplexen Zahlen die Punkte eines Strahlenhyperboloids zuordnen lassen [5]).

Die Punkte der $\xi - \eta$-Ebene, welche die Trägerebene der komplexen Zahlen $x+\omega y$ ist ($x = \xi$, $y = \eta$), werden durch Projektion vom Punkte S ($\xi = \eta = 0$, $\zeta = 1$) aus auf die Punkte der Fläche

$$\xi^2 - \omega^2\eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{1}$$

bezogen. Der analytische Ausdruck dieser Abbildung lautet

$$\xi = \frac{2x}{x^2 - \omega^2 y^2 + 1}; \quad \eta = \frac{2y}{x^2 - \omega^2 y^2 + 1}; \quad \zeta = \frac{x^2 - \omega^2 y^2 - 1}{x^2 - \omega^2 y^2 + 1},$$

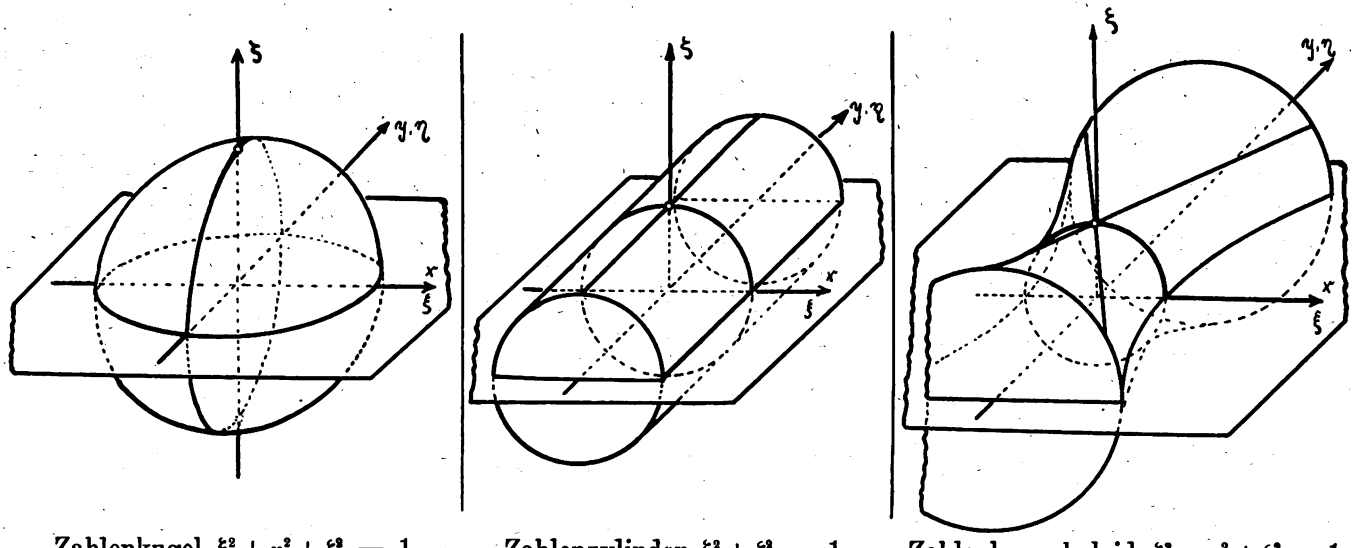
oder, bei Benutzung von $z = x + \omega y$, $\bar{z} = x - \omega y$,

$$\xi = \frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}; \quad \eta = \frac{z-\bar{z}}{\omega(z\bar{z}+1)}; \quad \zeta = \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}. \tag{2}$$

Je nachdem ω^2 gleich -1, 0, $+1$ gesetzt wird, ist die Bezugsfläche (1) für die Zahlen der normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlenebene eine Zahlenkugel, ein Zahlenzylinder, ein Zahlenhyperboloid. In jedem der drei Fälle ist das Projektionszentrum S ein singulärer Punkt der Abbildung; dem Wert $z = \infty$ entspricht nicht nur das Zentrum selbst, sondern auch die durch dieses hindurchgehenden (konjugiert imaginären, zusammenfallenden, reell verschiedenen) Erzeugenden der Bezugsfläche.

5) Vergl. die Abbildung der dual-komplexen Zahlen auf einen Zahlenzylinder bei Grünwald, Anmerkung 4.

Digitized by Google



Zahlenkugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$
der normal-komplexen Zahlen
$x + iy$

Zahlenzylinder $\xi^2 + \zeta^2 = 1$
der dual-komplexen Zahlen
$x + \varepsilon y$

Zahlenhyperboloid $\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 = 1$
der anormal-komplexen Zahlen
$x + jy$

Die Zahlenfläche $\xi^2 - \omega^2\eta^2 + \zeta^2 = 1$.

Digitized by Google

Durch einen Ausdruck von der Form

$$\omega p z\bar{z} + \alpha z - \bar{\alpha}\bar{z} + \omega q = 0, \tag{3}$$

worin p, q reelle, z und $\bar{z}$ bezw. α und $\bar{\alpha}$ konjugiert komplexe Größen sind, ist im ersten Falle ein Kreis, im zweiten eine Parabel, deren Symmetrieachse parallel der y-Achse verläuft, im dritten eine gleichseitige Hyperbel mit dem $x-y$-Achsensystem parallelen Hauptachsen dargestellt. Für $p = 0$ entarten in allen drei Fällen diese Kurven in Gerade. Auf der Zahlenfläche sind durch die stereographische Projektion den Kurven die ebenen Schnitte zugeordnet, insbesondere den Geraden die Schnitte mit Ebenen durch das Projektionszentrum S. Die Gleichung der dem Kegelschnitt (3) zugehörigen Ebene lautet nach (2)

$$A_0 + A_1 . \xi + A_2 . \eta + A_3 . \zeta = 0,$$

(3a) wobei $A_0 : A_1 : A_2 : A_3 = \omega(p+q) : (\alpha - \bar{\alpha}) : \omega(\alpha + \bar{\alpha}) : \omega(p-q)$ ist.

Durch eine (eigentliche oder uneigentliche) lineare Substitution

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \text{ bezw. } w = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{aligned} z &= x + \omega y, \\ \bar{z} &= x - \omega y, \\ w &= u + \omega v, \end{aligned} \tag{4}$$

wird ein Ausdruck von der Form (3) in einen ebensolchen übergeführt. Die linear gebrochenen Funktionen stellen also in der normal-komplexen Zahlenebene Kreisverwandschaften, in der dual-komplexen Zahlenebene Parabelverwandtschaften, in der anormal-komplexen Zahlenebene Hyperbelverwandtschaften dar. Auf der Zahlenfläche sind durch (2) diesen Substitutionen die bezüglich der Fläche automorphen Kollineationen zugeordnet.

Wird die Zahlenfläche als absolutes Gebilde einer nichteuklidischen räumlichen Maßbestimmung aufgefaßt, so entsprechen die Punkte $x + \omega y$ der Zahlenebene den absoluten Punkten, die Kegelschnitte (3) der Zahlenebene den Ebenen der Raumgeometrie. Diese ist im ersten Falle ($\omega = i$) hyperbolisch, denn die Fundamentalfläche ist eine strahlenlose Fläche zweiten Grades, im dritten Falle ($\omega = j$) pseudohyperbolisch, denn die Fundamentalfläche ist eine Strahlenfläche zweiten Grades. Im zweiten Falle ($\omega = \varepsilon$) ist die Fundamentalfläche einmal ausgeartet; die auf sie als absolutes Gebilde gegründete Maßbestimmung stellt das duale Gegenstück zu der pseudoeuklidischen Raumgeometrie dar.

Die bezüglich der Fundamentalfläche automorphen Kollineationen sind als die starren Transformationen der räumlichen Maß-

Digitized by Google

bestimmung definiert. Auf Grund der durch die stereographische Projektion (2) vermittelten Abbildung der Zahlenebene auf die Zahlenfläche gilt demnach:

Die Gruppe der Kreis-, Parabel-, Hyperbelverwandtschaften in der Ebene der normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlen ist isomorph zur Gruppe der starren Transformationen des hyperbolischen, dual-pseudoeuklidischen, pseudohyperbolischen Raumes.

Alle Kreise laufen durch die beiden imaginären Kreispunkte $1 : \pm i : 0$, alle Parabeln durch den doppelt zählenden uneigentlichen Punkt $0 : 1 : 0$, alle Hyperbeln durch die beiden reellen uneigentlichen Punkte $1 : \pm 1 : 0$. Werden den drei Zahlenebenen Maßbestimmungen aufgeprägt, denen diese Punktepaare je als absolutes Gebilde zugrunde liegen, derart, daß die Ebene der normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlen eine euklidische, dual-parabolische[6]), pseudoeuklidische Metrik trägt, so stellen die Kegelschnitte (3) in diesen Ebenen jeweils die Kreise ihrer Geometrie dar. Die Struktur jedes Zahlsystems findet ihren Ausdruck in dem Typ der seiner Ebene aufgeprägten Maßbestimmung. Es gilt demnach:

Die linearen Substitutionen in normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlen liefern die Transformationsgruppe der Kreisverwandtschaften in der euklidischen, dual-parabolischen, pseudoeuklidischen ebenen Geometrie.

Diejenigen reellen Kollineationen, welche die beiden Erzeugendenscharen der Zahlenfläche je in sich selbst überführen, haben eine positive, diejenigen, welche die beiden Erzeugendenscharen miteinander vertauschen, eine negative Determinante. Die ersten werden die Bewegungen, die zweiten die Umlegungen des nichteuklidischen Raumes genannt; ihnen entsprechen die eigentlichen bezw. uneigentlichen linearen Substitutionen in der Zahlenebene.

Im hyperbolischen Falle ($\omega = i$), in dem die Fundamentalfläche strahlenlos ist, sind damit die Einteilungsmöglichkeiten erschöpft. Im pseudohyperbolischen Falle ($\omega = j$) dagegen teilt die absolute Strahlenfläche den reellen projektiven Raum in zwei gleichberechtigte Teile; es gibt reelle Kollineationen der Fläche in sich, die jeden dieser Teile in sich überführen, und andere derartige Kollineationen, welche die beiden Teile miteinander vertauschen. Jede dieser Kollineationen kann entweder eine positive oder eine negative Determinante besitzen, wodurch sich im ganzen vier verschiedene Arten von Kollineationen ergeben. Im dual-pseudoeukli-

6) Diese Geometrie wird als „dual-parabolische" bezeichnet, weil Winkel- und Streckenmessung parabolisch sind.

Digitized by Google

dischen Falle ($\omega = \varepsilon$) schließlich trägt der Fundamentalzylinder nur eine Schar von Erzeugenden. Da die reellen Kollineationen dieses Zylinders in sich entweder sein inneres und sein äußeres Gebiet je in sich transformieren oder die beiden Gebiete miteinander vertauschen können, ergeben sich zwei Arten von Kollineationen.

Dieser Einteilung entsprechend gibt es in der (euklidischen) Ebene der normal komplexen Zahlen $x + iy$ zwei getrennte Scharen von Kreisverwandtschaften, nämlich die eigentlichen und die uneigentlichen; in der (pseudoeuklidischen) Ebene der anormal-komplexen Zahlen $x + jy$ dagegen vier getrennte Scharen von (pseudoeuklidischen) Kreisverwandtschaften. In diesem Falle entsprechen den beiden Erzeugendenscharen des Strahlenhyperboloids bei der stereographischen Projektion die beiden Parallelenbüschel mit dem Anstieg ± 1 der Zahlenebene, d. h. die pseudoeuklidischen Minimalgeraden. Je nachdem diese beiden Büschel durch die (pseudoeuklidische) Kreisverwandtschaft je in sich transformiert oder miteinander vertauscht werden, liegt eine eigentliche oder eine uneigentliche lineare Substitution vor. Jede dieser beiden Substitutionsarten enthält wieder zwei getrennte Scharen, nämlich einerseits diejenigen Transformationen, welche die (euklidisch gesehenen) Hyperbeln mit der reellen bezw. imaginären Achse parallelen Hauptachsen in gleichartige Hyperbeln überführen, und andererseits diejenigen, die einer Hyperbel der ersten Art eine der zweiten Art zuordnen. In der (dual-parabolischen) Ebene der dual-komplexen Zahlen $x + \varepsilon y$ entsprechen den Erzeugenden des Zahlenzylinders die Parallelen zur imaginären Achse, d. h. die dual-parabolischen Minimalgeraden. Es gibt zwei getrennte Scharen von (dual-parabolischen) Kreisverwandtschaften; nämlich einerseits diejenigen Transformationen, welche die (euklidisch gesehenen) in Richtung der positiven bezw. negativen imaginären Achse sich öffnenden Parabeln je in gleichartige überführen und andererseits diejenigen, die einer Parabel der ersten Art eine der zweiten zuordnen.

Ebenso lassen sich die Fixelemente bei linearen Substitutionen feststellen. Im ersten Falle ($\omega = i$) bleiben auf der Kugel und damit auch in der Ebene der normal-komplexen Zahlen $x + iy$ stets zwei Punkte fest. Im dritten Falle ($\omega = j$) dagegen sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden; denn die beiden bei einer reellen Kollineation des Strahlenhyperboloids in sich festbleibenden Erzeugenden können zunächst sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Regelschar reell sein; sodann können die Erzeugenden

Digitized by Google

der einen Schar reell und die der anderen konjugiert imaginär sein; schließlich können beide Paare von Erzeugenden konjugiert imaginär sein. Dem entsprechen in der Zahlenebene zunächst Transformationen, bei denen je zwei Gerade der Parallelenbüschel mit dem Anstieg ± 1, d. h. der pseudoeuklidischen Minimalgeraden, in sich festbleiben, also vier Fixpunkte existieren; sodann Transformationen, bei denen nur zwei Gerade eines Parallelenbüschels festbleiben; und schließlich Transformationen, die weder Fixpunkte noch feste Gerade enthalten. Im zweiten Falle ($\omega = \varepsilon$) bleiben auf dem Zylinder zwei (reell verschiedene, zusammenfallende, konjugiert imaginäre) Erzeugende fest. Dementsprechend existieren in der (dual-parabolischen) Ebene der dual-komplexen Zahlen $x + \varepsilon y$ entweder zwei Fixpunkte und zwei durch sie laufende in sich feste (dual-parabolische) Minimalgerade, oder ein doppelt zählender Fixpunkt mit seiner doppelt zählenden Minimalgeraden, oder kein Fixelement.

Bei den Bewegungen und Umlegungen der auf die Zahlenfläche (1) als absolutes Gebilde gegründeten Raumgeometrie bleibt der in dieser Maßbestimmung gemessene Winkel φ zweier Ebenen

$$A_0 + A_1 . \xi + A_2 . \eta + A_3 . \zeta = 0$$

und

$$B_0 + B_1 . \xi + B_2 . \eta + B_3 . \zeta = 0$$

invariant. Der Winkel φ ist definiert durch

$$(5) \qquad \varphi = \frac{1}{2\omega} \cdot \ln \frac{\{AB\} + \sqrt{\{AB\}^2 - \{AA\}\{BB\}}}{\{AB\} - \sqrt{\{AB\}^2 - \{AA\}\{BB\}}}\ ^{7}),$$

worin

$$\begin{aligned} \{AA\} &= \omega^2 A_0^2 - \omega^2 A_1^2 + A_2^2 - \omega^2 A_3^2, \\ \{AB\} &= \omega^2 A_0 B_0 - \omega^2 A_1 B_1 + A_2 B_2 - \omega^2 A_3 B_3, \\ \{BB\} &= \omega^2 B_0^2 - \omega^2 B_1^2 + B_2^2 - \omega^2 B_3^2 \end{aligned}$$

ist. In dem mittleren ausgearteten Falle $\omega = \varepsilon$; $\varepsilon^2 = 0$ führt ein Grenzübergang den Ausdruck (5) über in

$$(5a) \qquad \varphi = \frac{1}{A_3 B_3} \cdot \sqrt{(A_1 B_3 - B_1 A_3)^2 + (A_2 B_3 - B_2 A_3)^2 - (A_0 B_3 - B_0 A_3)^2}.$$

In den Zahlenebenen $\omega = i, \varepsilon, j$ entsprechen den beiden Ebenen zwei durch

7) Vergl. F. Klein: „Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie", Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 268.

Digitized by Google

$$\omega p z\bar{z} + \alpha z - \bar{\alpha}\bar{z} + \omega q = 0$$

(6) und

$$\omega r z\bar{z} + \beta z - \bar{\beta}\bar{z} + \omega s = 0$$

gegebene euklidische, dual-parabolische, pseudoeuklidische Kreise, wobei der Zusammenhang der A_λ und B_λ mit p, q, α und r, s, β durch (3a) bestimmt ist.

Durch den Ausdruck (5) bezw. (5a) ist, wie leicht bestätigt wird, in allen drei Fällen der euklidisch, dual-parabolisch, pseudoeuklidisch gemessene Schnittwinkel der beiden Kreise (6) dargestellt. Demnach gilt:

Die durch (3) gegebene Gruppe der Kreisverwandtschaften in der euklidischen, dual-parabolischen, pseudoeuklidischen Ebene ist euklidisch, dual-parabolisch, pseudoeuklidisch konform.

Die Gruppe der reellen Kollineationen einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades in sich und damit die Gruppe der Kreisverwandtschaften in der euklidischen und der pseudoeuklidischen Ebene ist sechsgliedrig. Im zweiten Falle ($\omega = \varepsilon$), in dem die Zahlenfläche einmal ausgeartet ist, existieren dagegen außer den ∞^6 Bewegungen und Umlegungen des dual-pseudoeuklidischen Raumes noch ∞^7 Ähnlichkeitstransformationen, denn die Parameterzahl der Kollineationen eines ausgearteten quadratischen Gebildes in sich wächst um eine Einheit, wenn das Gebilde einmal ausartet. Daher gibt es in der dual-parabolischen Geometrie außer der durch (3) gegebenen sechsgliedrigen „engeren“ Gruppe K_6 der Kreisverwandtschaften noch die „erweiterte“ Gruppe K_7, die von K_6 und den affinen Dehnungen in Richtung der y-Achse erzeugt wird. Diese erweiterte Gruppe läßt nicht mehr den dual-parabolisch gemessenen Winkel zweier Kreise invariant, wohl aber das Verhältnis zweier solcher Winkel. Die Existenz der erweiterten Gruppe ist auf die durch $\varepsilon^2 = 0$ gegebene Ausartung des dualkomplexen Zahlsystems zurückzuführen.

Eine Funktion

$$w = f(z) = u(x, y) + \omega \,.\, v(x, y)$$

in einem der drei Systeme soll analytisch heißen, wenn der Differentialquotient

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(u_x + \omega \,.\, v_x) \,.\, dx + (u_y + \omega \,.\, v_y) \,.\, dy}{dx + \omega \,.\, dy}$$

unabhängig von $\frac{dy}{dx}$ ist, also die Form

Digitized by Google

$$\varphi(x, y) + \omega \cdot \psi(x, y)$$

hat[8]). Wie leicht bestätigt wird, lauten die Bedingungen hierfür

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Für das erste System $\omega = i$ ergeben sich die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Durch einen dem Vorgehen in der gewöhnlichen Funktionentheorie analogen Beweisgang läßt sich zeigen, daß durch die analytischen Funktionen in normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlen die konformen Transformationen der euklidischen, dual-parabolischen, pseudoeuklidischen Geometrie der Ebene dargestellt sind.

Die dual-komplexen Zahlen haben ihre geometrische Deutung darin gefunden, daß die äquilonge Gruppe, d. h. diejenigen Berührungstransformationen, die gerichtete Gerade wieder in gerichtete Gerade verwandeln und die Tangentialentfernung zweier Kurven, gemessen von Berührungspunkt zu Berührungspunkt, invariant lassen, durch die analytischen Funktionen dieses Zahlsystems darstellbar ist[9]). Dabei werden Realteil x und Imaginärteil y der dual-komplexen Zahl $x + \varepsilon y$ als gewisse Linienkoordinaten einer gerichteten Geraden gedeutet, und zwar ist

$$(7) \qquad x = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}; \quad y = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}},$$

wenn p das Lot von einem Anfangspunkt auf die Gerade und ϑ den Richtungswinkel dieses Lotes gegen eine feste Anfangsrichtung bedeutet (Hessesche Normalform). Insbesondere ist die Laguerresche Gruppe, d. h. diejenigen Transformationen der äquilongen Gruppe, die Kreise wieder in Kreise überführen, durch die linear gebrochenen Substitutionen in dual-komplexen Zahlen gegeben.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Untersuchung der entsprechenden Gruppen in den beiden nichteuklidischen ebenen Geometrien, nämlich der hyperbolischen und der elliptischen, auf eine analoge Deutung der beiden anderen Zahlsysteme führt.

---

8) Vergl. G. Scheffers: „Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen komplexen Funktionen"; Leipziger Berichte 1893, Seite 828—848 und 1894, Seite 120—134.

9) Vergl. G. Scheffers: „Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen", Mathem. Annalen Bd. 60, 1905, S. 491.

Digitized by Google

Bei Benutzung der affinen Koordinaten ξ, η gründe sich die Maßbestimmung der nichteuklidischen ebenen Geometrie auf den Kegelschnitt

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{\omega^2} \tag{8}$$

als absolutes Gebilde. Je nachdem ω gleich i, ε, j gesetzt wird, liegt die elliptische, euklidische, hyperbolische Geometrie vor. Ein Speer, d. h. eine gerichtete Gerade, sei bestimmt durch vier homogene Koordinaten $\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3$, die mit den Hesseschen Koordinaten p, ϑ durch die Beziehung

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \omega : -\omega \cdot \cos\vartheta \cdot \mathfrak{Cof}\,\omega p : -\omega \cdot \sin\vartheta \cdot \mathfrak{Cof}\,\omega p : \mathfrak{Sin}\,\omega p \tag{9}$$

verknüpft seien[10]). Zwischen den Speerkoordinaten $\mathfrak{x}_\varkappa$ besteht die quadratische Relation

$$\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 + \omega^2 \cdot \mathfrak{x}_3^2 = 0. \tag{10}$$

$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3$ sind die Koordinaten der Trägergeraden

$$\mathfrak{x}_1 \cdot \xi + \mathfrak{x}_2 \cdot \eta + \mathfrak{x}_3 = 0$$

des Speeres; je nachdem

$$\mathfrak{x}_0 = \pm\sqrt{\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 - \omega^2 \mathfrak{x}_3^2}$$

den positiven oder negativen Wurzelwert annimmt, wird die Gerade in dem einen oder in dem anderen Durchlaufungssinn orientiert.

Durch eine homogene lineare Gleichung

$$(a\mathfrak{x}) \equiv a_0\mathfrak{x}_0 + a_1\mathfrak{x}_1 + a_2\mathfrak{x}_2 + a_3\mathfrak{x}_3 = 0 \tag{11}$$

in den Speerkoordinaten $\mathfrak{x}_\varkappa$ ist ein Zykel als orientiertes Klassengebilde dargestellt. Dabei werden unter Zykeln die orientierten „Kreise" der nichteuklidischen ebenen Geometrie verstanden, d. h. die geometrischen Örter aller Punkte, die von einem festen gegebenen Punkte einen im elliptischen, euklidischen, hyperbolischen Sinne konstanten (reellen oder komplexen) Abstand haben.

Wird dem Speer $\mathfrak{x}_\varkappa$ die komplexe Zahl $z = x + \omega y$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \omega(z\bar{z} + 1) : \omega(z + \bar{z}) : \omega(z\bar{z} - 1) : (z - \bar{z})$$

(12) oder

$$z = x + \omega y = \frac{-\mathfrak{x}_2 + \omega\mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2} + \operatorname{arctg}\,\mathfrak{Tg}\,\omega\,\frac{p}{2}\right)$$

10) Vergl. H. Beck: „Ein Seitenstück zur Möbiusschen Geometrie der Kreisverwandtschaften", Transact. of the Americ. Math. Soc. 1910, pg. 423. Die äquidistante Gruppe wird dort als „parakonform" bezeichnet.

Digitized by Google

zugeordnet, so entsprechen die Speere der elliptischen, euklidischen, hyperbolischen ebenen Geometrie den Punkten der normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlenebene. Die Darstellung versagt für das Parallelenbüschel $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_1$. Für $\omega = \varepsilon$ ergeben sich die Formeln (7). Die Zykelgleichung (11) geht nach (12) über in den Ausdruck

$$\omega p z\bar{z} + \alpha z - \bar{\alpha}\bar{z} + \omega q = 0, \tag{13}$$

wobei

$$p = a_0 + a_2; \quad \alpha = a_3 + \omega . a_1; \quad \bar{\alpha} = a_3 - \omega . a_1; \quad q = a_0 - a_2$$

ist. Die Zykel der elliptischen, euklidischen, hyperbolischen Geometrie sind so abgebildet auf die Kreise, Parabeln, Hyperbeln der normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlenebene. Durch die linearen Substitutionen (3) werden diese Kegelschnitte in gleichartige übergeführt; in der Speerebene entsprechen also der Gruppe (3) diejenigen Speertransformationen, die Zykel wieder in Zykel überführen, d. h. die Laguerreschen Transformationen. Die Invariante (5) geht nach (12) und (3a) über in den Ausdruck

$$\varphi' = \frac{1}{2\omega} \cdot \ln \frac{\{ab\} + \sqrt{\{ab\}^2 - \{aa\}\{bb\}}}{\{ab\} - \sqrt{\{ab\}^2 - \{aa\}\{bb\}}}, \tag{14}$$

worin a_λ, b_λ die Koeffizienten der beiden Zykel $(a\mathfrak{x}) = 0$, $(b\mathfrak{x}) = 0$ bedeuten und

$$\begin{aligned} \{aa\} &= \omega^2 . a_0^2 - \omega^2 . a_1^2 - \omega^2 . a_2^2 + a_3^2, \\ \{ab\} &= \omega^2 . a_0 b_0 - \omega^2 . a_1 b_1 - \omega^2 . a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ \{bb\} &= \omega^2 . b_0^2 - \omega^2 . b_1^2 - \omega^2 . b_2^2 + b_3^2 \end{aligned}$$

ist. Durch (14) ist die Tangentialentfernung φ' der beiden Zykel $(a\mathfrak{x}) = 0$ und $(b\mathfrak{x}) = 0$ dargestellt, d. h. die Länge ihrer gemeinsamen Tangenten, gemessen von Berührungspunkt zu Berührungspunkt. Diese ist demnach die Invariante der Laguerreschen Transformationen.

Die Gruppe der Laguerreschen Kreisverwandtschaften in der elliptischen, euklidischen, hyperbolischen ebenen Geometrie ist dargestellt durch die linearen Substitutionen in normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlen.

Der erweiterten siebengliedrigen Gruppe der Parabelverwandtschaften in der Ebene der dual-komplexen Zahlen entspricht die erweiterte siebengliedrige Laguerresche Gruppe, die das Verhältnis der Tangentialentfernungen invariant läßt. Die Existenz dieser erweiterten Gruppe ist charakteristisch für die euklidische Geometrie.

Digitized by Google

Die äquilonge Gruppe der elliptischen, euklidischen, hyperbolischen Geometrie ist durch die analytischen Funktionen in normal-, dual-, anormal-komplexen Zahlen gegeben.

Die konforme Gruppe läßt sich in allen drei Geometrien durch die analytischen Funktionen in normal-komplexen Zahlen darstellen. Der geometrische Grund hierfür liegt darin, daß die beiden Minimalgeraden, die mit zwei eigentlichen Geraden zusammen durch ihr Doppelverhältnis auf Grund der projektiven Definition der Winkelmessung den Winkel dieser beiden Geraden bestimmen, in allen drei Fällen konjugiert imaginär sind. Diese Tatsache ist gleichbedeutend mit der Existenz des geschlossenen Winkels, dessen Maßzahl bei geeigneter Wahl der Fundamentalkonstanten in allen drei Geometrien 2π ist. Die beiden absoluten Punkte, die mit zwei gegebenen Punkten zusammen durch ihr Doppelverhältnis auf Grund der projektiven Definition der Streckenmessung die Entfernung dieser beiden Punkte bestimmen, sind nur in der elliptischen Geometrie konjugiert imaginär, in der hyperbolischen dagegen reell verschieden und in der euklidischen zusammenfallend. Die vollkommene (reelle) Dualität zwischen Winkel- und Streckenmessung in der elliptischen Geometrie ist der Grund dafür, daß sich sowohl die konforme als auch die äquidistante Gruppe dieser Geometrie durch die analytischen Funktionen der normal-komplexen Zahlen darstellen läßt. Die unvollkommene (nicht reelle) Dualität zwischen Winkel- und Streckenmessung in der hyperbolischen Geometrie ist der Grund dafür, daß die konforme Gruppe mit Hilfe der normal-komplexen Zahlen $x + iy$, die äquidistante dagegen mit Hilfe der anormal-komplexen Zahlen $x + jy$ darstellbar ist. In der euklidischen Geometrie schließlich führt die Ausartung der Streckenmessung, die zur Folge hat, daß kein absolutes Streckenmaß existiert, auf die (ausgearteten) dual-komplexen Zahlen als das natürliche Instrument zur Darstellung der äquidistanten Gruppe.

Digitized by Google

Ein elementargeometrisches Beispiel zur Dyadenrechnung [1]).

Von Gerhard Grüß.

Die im folgenden behandelte elementargeometrische Aufgabe soll in erster Linie die wenigen, in allen Lehrbüchern der Vektorrechnung wiederkehrenden Anwendungen der Dyadenrechnung — meist werden nur die Tensoren der Mechanik als Beispiele behandelt — um ein einfaches Beispiel vermehren.

Es handelt sich um die Untersuchung der wiederholten Spiegelung eines Punktes P an zwei nicht parallelen spiegelnden Ebenen. Die Bilder des Punktes, die durch sukzessive Spiegelung an den beiden Ebenen entstehen, liegen offensichtlich alle in der Ebene, die den Punkt P enthält und auf der Schnittgeraden der spiegelnden Ebenen, d. h. auf der Achse des „Winkelspiegels" senkrecht steht. Gefragt wird nach der Verteilung der Spiegelbilder des Punktes P in jener Bildebene, speziell, unter welchen Bedingungen sich der Punkt und sein durch genügend oft wiederholte Spiegelung erzeugtes Bild decken. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Spiegelung beliebig oft wiederholt werden kann; das ist physikalisch deshalb nicht realisierbar, weil die Lichtstrahlen, die von dem Objekt ausgehen, im allgemeinen schon nach wenigen Reflexionen die spiegelnden Ebenen nicht mehr treffen. Der hier betrachtete Spiegelungsvorgang wird dann dadurch fortgesetzt, daß die rückwärtigen Verlängerungen der Lichtstrahlen weiter reflektiert gedacht werden.

Die Bildebene schneide die beiden Spiegelebenen in den Geraden G_1 und G_2. Die Stellungsvektoren der beiden Ebenen seien $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$:

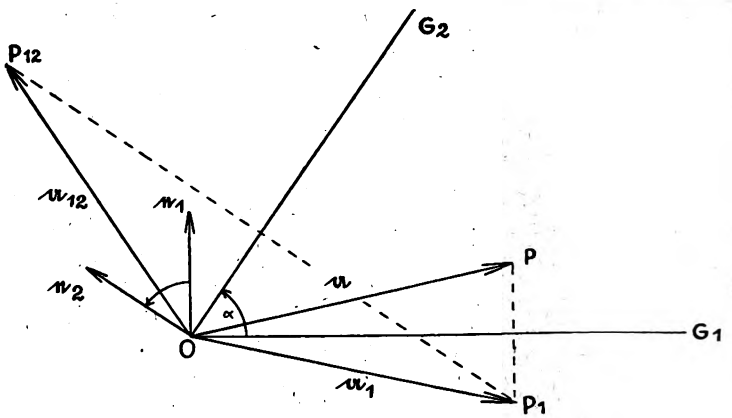
$$\mathfrak{e}_1^2 = \mathfrak{e}_2^2 = 1, \quad \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 = \cos\alpha \neq \pm 1,$$

α = Öffnungswinkel des Winkelspiegels (Abb.).

Das Bild des Punktes P ($\overline{OP} = \mathfrak{a}$) im ersten Spiegel heiße P_1 ($\overline{OP}_1 = \mathfrak{a}_1$), das von P_1 im zweiten Spiegel P_{12} ($\overline{OP}_{12} = \mathfrak{a}_{12}$) usf. Da sich zwei aufeinanderfolgende Spiegelungen in demselben Spiegel aufheben, alternieren die Indizes 1 und 2 der Bildpunkte; die Aufgabe besteht also in der Bestimmung der Punkte $P_{12\,12\ldots12}$ ($2n$ In-

1) Vorgetragen in der 292. Sitzung am 26. April 1933.

Digitized by Google



dizes) und $P_{12\,12\ldots1}$ ($2n+1$ Indizes), bezw. der Vektoren

$$\overline{OP}_{12\,12\ldots12} = \mathfrak{a}_{12\,12\ldots12} = \mathfrak{a}^{(2n)}, \quad \overline{OP}_{12\,12\ldots1} = \mathfrak{a}_{12\,12\ldots1} = \mathfrak{a}^{(2n+1)}.$$

Nun bezeichne man den Affinor der identischen Transformation mit I (Idemfaktor), die Dyade $-2\mathfrak{e}_1;\mathfrak{e}_1$ mit φ_1 und die Dyade $-2\mathfrak{e}_2;\mathfrak{e}_2$ mit φ_2, endlich setze man

$$I+\varphi_1 = \psi_1, \quad I+\varphi_2 = \psi_2.$$

Dann ist offensichtlich

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\psi_1, \quad \mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{a}_1\psi_2 = \mathfrak{a}\psi_1\psi_2, \text{ usf.} \\ \mathfrak{a}^{(2n)} = \mathfrak{a}\psi_1\psi_2\psi_1\psi_2\ldots\psi_1\psi_2 \qquad (2n \text{ Faktoren}) \\ \mathfrak{a}^{(2n+1)} = \mathfrak{a}\psi_1\psi_2\psi_1\psi_2\ldots\psi_1\psi_2\psi_1 \qquad (2n+1 \text{ Faktoren}). \end{cases}$$

Die Aufgabe, das durch beliebig oft wiederholte Spiegelung des Punktes P entstehende Bild zu bestimmen, ist also zurückgeführt auf die Berechnung eines Affinorproduktes, dessen Faktoren abwechselnd ψ_1 und ψ_2 sind. Setzt man noch

$$(2)\qquad \psi_1\psi_2 = (I+\varphi_1)(I+\varphi_2) = I+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_1\varphi_2 = \eta$$

dann ist

$$(3)\qquad \mathfrak{a}^{(2n)} = \mathfrak{a}\eta^n, \quad \mathfrak{a}^{(2n+1)} = \mathfrak{a}\eta^n\psi_1.$$

Um nun η^n zu berechnen, führe man noch folgende Bezeichnungen ein:

$$(4)\qquad \varphi_1\varphi_2 = 4(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2)\mathfrak{e}_1;\mathfrak{e}_2 = \varphi_{12}$$

und für die konjugierte Dyade:

$$(5)\qquad \varphi_2\varphi_1 = \tilde{\varphi}_{12} = \varphi_{21},$$

endlich

Digitized by Google

(6) $$4(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2)^2 = 4\cos^2\alpha = p.$$

Dann ist, wie man leicht findet,

$$\eta^2 = I + p\varphi_1 + p\varphi_2 + (p-1)\varphi_{12} + \varphi_{21}$$
$$\eta^3 = I + (p-1)^2\varphi_1 + (p-1)^2\varphi_2 + (p-1)(p-2)\varphi_{12} + (p-1)\varphi_{21},$$

und wenn man die folgenden Gleichungen benutzt:

(7) $$\begin{cases} \varphi_1\varphi_1 = -2\varphi_1, \quad \varphi_2\varphi_2 = -2\varphi_2, \quad \varphi_1\varphi_1\varphi_2 = -2\varphi_{12}, \\ \varphi_2\varphi_1\varphi_2 = p\varphi_2, \quad \varphi_1\varphi_2\varphi_1 = p\varphi_1, \quad \varphi_1\varphi_2\varphi_2 = -2\varphi_{12}, \\ \varphi_2\varphi_1\varphi_1 = -2\varphi_{21}, \quad \varphi_1\varphi_2\varphi_1\varphi_2 = p\varphi_{12}, \quad \varphi_2\varphi_1\varphi_1\varphi_2 = -2p\varphi_2, \end{cases}$$

ergibt sich, daß für beliebige n

(8) $$\eta^n = I + \alpha_n\varphi_1 + \beta_n\varphi_2 + \gamma_n\varphi_{12} + \delta_n\varphi_{21}$$

gilt. Die Koeffizienten α_n, β_n, γ_n, δ_n genügen den Rekursionsformeln

(9) $$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -\alpha_n + p\gamma_n + 1 \\ \beta_{n+1} = (p-1)\beta_n - p\delta_n + 1 \\ \gamma_{n+1} = -\alpha_n + (p-1)\gamma_n + 1 \\ \delta_{n+1} = \beta_n - \delta_n. \end{cases}$$

Nun ist

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \delta_1 = \beta_1 - \gamma_1; \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \delta_2 = \beta_2 - \gamma_2,$$

und wie aus den Gleichungen (9) leicht folgt, gilt allgemein

(10) $$\alpha_n = \beta_n, \quad \delta_n = \beta_n - \gamma_n.$$

Man benutzt also nur etwa die 1. und 3. Rekursionsformel, aus denen man durch Elimination von γ_n

(11) $$\alpha_{n+2} - (p-2)\alpha_{n+1} + \alpha_n = 2$$

bekommt. Um zu einer independenten Darstellung der α_n zu gelangen, setze man $\alpha_n = e^{rn} + C$, wo r und C passende Konstante sind; man findet

$$e^r = \frac{p-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p-2}{2}\right)^2 - 1}, \quad C = \frac{2}{4-p}$$

(da die Spiegelebenen nicht parallel sind, ist $p = 4(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2)^2 < 4$) und wenn man den doppelten Öffnungswinkel des Winkelspiegels mit $\omega = 2\alpha$ bezeichnet:

(12) $$\begin{cases} e^r = 2\cos^2\alpha - 1 \pm \sqrt{(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1} = e^{\pm i\omega} \\ C = 1 : (1 - \cos\omega). \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (11) ist also

Digitized by Google

$$\alpha_n = c_1 e^{in\omega} + c_2 e^{-in\omega} + \frac{1}{1-\cos\omega}$$

mit willkürlichen Konstanten c_1 und c_2, die nun aus den „Anfangsbedingungen“ $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = p = 2(1+\cos\omega)$ bestimmt werden können, wenn nur $e^{i\omega}.e^{-2i\omega} - e^{-i\omega}.e^{2i\omega} \neq 0$, also $\omega \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ ist. Da für den Öffnungswinkel $0 < \frac{\omega}{2} = \alpha < \pi$ gilt, ist $k = 1$, also $\alpha = \frac{\pi}{2}$ der einzige Fall, in dem die Bestimmung von α_n auf dem obigen Wege nicht möglich ist; dieser Fall der zu einander senkrechten Spiegelebenen soll nachher erledigt werden. Wenn nun $\omega \neq \pi$ ist, ergibt sich

$$c_1 = c_2 = \frac{-i\sin\omega}{1-\cos\omega} \cdot \frac{e^{i\omega}}{e^{2i\omega}-1} = \frac{-1}{2(1-\cos\omega)}$$

und daher

$$(13) \qquad \alpha_n = \frac{1}{1-\cos\omega}(1 - \tfrac{1}{2}e^{i\omega} - \tfrac{1}{2}e^{-in\omega}) = \frac{1-\cos n\omega}{1-\cos\omega},$$

ferner aus der ersten Rekursionsformel

$$\gamma_n = \frac{1}{p}(\alpha_{n+1} + \alpha_n - 1) = \frac{\sin n\omega \sin\omega + (1+\cos\omega)(1-\cos n\omega)}{2(1+\cos\omega)(1-\cos\omega)},$$

$$(14) \qquad \begin{cases} \gamma_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin n\omega}{\sin\omega} + \frac{1-\cos n\omega}{1-\cos\omega}\right) \\ \beta_n = \alpha_n = \frac{1-\cos n\omega}{1-\cos\omega} \end{cases}$$

endlich

$$(15) \qquad \delta_n = \beta_n - \gamma_n = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\sin n\omega}{\sin\omega} + \frac{1-\cos n\omega}{1-\cos\omega}\right).$$

Damit ist der Affinor η^n bekannt, also das durch eine grade Anzahl von Spiegelungen erzeugte Bild des Punktes P. Weiter ergibt sich

$$(16) \qquad \begin{aligned} \eta^n \psi_1 &= (I + \alpha_n \varphi_1 + \beta_n \varphi_2 + \gamma_n \varphi_{12} + \delta_n \varphi_{21})(I + \psi_1) \\ &= I + \alpha_n' \varphi_1 + \beta_n' \varphi_2 + \gamma_n' \varphi_{12} + \delta_n' \varphi_{21}, \end{aligned}$$

und wenn man die Gleichungen (7) beachtet:

$$(17) \qquad \begin{cases} \alpha_n' = -\alpha_n + p\gamma_n + 1 = \alpha_{n+1} \\ \beta_n' = \beta_n = \alpha_n \\ \gamma_n' = \gamma_n \\ \delta_n' = \beta_n - \delta_n = \delta_{n+1} = \gamma_n. \end{cases}$$

Digitized by Google

Das Ergebnis läßt sich so zusammenfassen:

Durch N-malige Spiegelung geht der Vektor $\mathfrak{a}$ über in den Vektor

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}^{(N)} = \mathfrak{a}(I + A_N\varphi_1 + B_N\varphi_2 + \Gamma_N\varphi_{12} + \Delta_N\varphi_{21}), \\ \text{worin für} \\ N = 2n \quad A_N = \alpha_n, \quad B_N = \alpha_n, \quad \Gamma_N = \gamma_n, \quad \Delta_N = \delta_n \\ N = 2n+1 \quad A_N = \alpha_{n+1}, \quad B_N = \alpha_n, \quad \Gamma_N = \gamma_n, \quad \Delta_N = \delta_{n+1} = \gamma_n \end{cases}$$

ist. Das Schema der Koeffizienten A_N, B_N, Γ_N, Δ_N beginnt folgendermaßen:

A_N	B_N	Γ_N	Δ_N
1	0	0	0
1	1	1	0
$\frac{-\cos 2\omega}{1-\cos\omega}$	1	1	1
$\frac{-\cos 2\omega}{1-\cos\omega}$	$\frac{1-\cos 2\omega}{1-\cos\omega}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} + \frac{1-\cos 2\omega}{1-\cos\omega}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\omega}{-\sin\omega} + \frac{1-\cos 2\omega}{1-\cos\omega}\right)$.

Um noch den bisher ausgeschlossenen Fall $\omega = \pi$, also $\mathfrak{e}_1 \perp \mathfrak{e}_2$ zu erledigen, beachte man, daß jetzt $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 0$ gilt. Daher ist

$$\eta^n = I + \alpha_n\varphi_1 + \beta_n\varphi_2 \qquad (\alpha_n = \beta_n),$$

und wegen $p = 4\,(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2)^2 = 0$ vereinfacht sich die Rekursionsformel für α_n zu

$$\alpha_{n+1} + \alpha_n = 1,$$

aus der wegen $\alpha_1 = 1$ sofort

$$\alpha_{2n} = 0, \quad \alpha_{2n+1} = 1$$

folgt. Daraus ergibt sich

$$\eta^{2n} = I, \quad \eta^{2n}\psi_1 = I + \varphi_1,$$
$$\eta^{2n+1} = \eta = I + \varphi_1 + \varphi_2, \quad \eta^{2n+1}\psi_1 = I + \varphi_2,$$

oder, wenn wieder

$$(19)\qquad \mathfrak{a}^{(N)} = \mathfrak{a}(I + A_N\varphi_1 + B_N\varphi_2 + \Gamma_N\varphi_{12} + \Delta_N\varphi_{21})$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } N = 2n & A_N = B_N = \frac{1}{2}(1-(-1)^n) \\ N = 2n+1 & A_N = \frac{1}{2}(1+(-1)^n), \quad B_N = \frac{1}{2}(1-(-1)^n) \end{array}\right\} \Gamma_N = \Delta_N = 0.$$

Zu dem allgemeinen Fall $\omega \neq \pi$ zurückkehrend, wird nun gefragt, unter welchen Bedingungen sich ein beliebiger Punkt und sein durch genügend oft wiederholte Spiegelung entstehendes Bild decken,

Digitized by Google

d. h. wann für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$

$$(21) \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{(N)} = \mathfrak{a}(I + A_N\varphi_1 + B_N\varphi_2 + \Gamma_N\varphi_{12} + \Delta_N\varphi_{21})$$

gilt. Aus

$$\begin{aligned} &A_N(\mathfrak{a}\varphi_1) + B_N(\mathfrak{a}\varphi_2) + \Gamma_N(\mathfrak{a}\varphi_{12}) + \Delta_N(\mathfrak{a}\varphi_{21}) \equiv \\ &\quad \mathfrak{e}_1\{-2A_N(\mathfrak{a}\mathfrak{e}_1) + 4\Delta_N\cos\alpha(\mathfrak{a}\mathfrak{e}_2)\} + \\ &\quad \mathfrak{e}_2\{-2B_N(\mathfrak{a}\mathfrak{e}_2) + 4\Gamma_N\cos\alpha(\mathfrak{a}\mathfrak{e}_1)\} = 0 \end{aligned}$$

folgt, da $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ linear unabhängig sind,

$$(22) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{a}\mathfrak{e}_1)(-A_N) + (\mathfrak{a}\mathfrak{e}_2)\,2\Delta_N\cos\alpha = 0 \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{e}_1)\,2\Gamma_N\cos\alpha + (\mathfrak{a}\mathfrak{e}_2)(-B_N) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten bei beliebigem $\mathfrak{a}$ nur, wenn

$$A_N = B_N = \Gamma_N = \Delta_N = 0$$

ist. (Von dem Fall $\cos\alpha = 0$ kann hier abgesehen werden; es gilt dann $\mathfrak{a}^{(N)} = \mathfrak{a}$ offensichtlich nur für $N = 4n$.) Ist nun $N = 2n$, so folgt aus Gleichung (13) und (14)

$$(23) \qquad \frac{1-\cos n\omega}{1-\cos\omega} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\sin n\omega}{\sin\omega} = 0,$$

also $n\omega = 2k\pi$. D. h.:

Das durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen aus einem Punkt P erzeugte Bild fällt dann und nur dann mit dem Originalpunkt zusammen, wenn $\omega/2\pi = \alpha/\pi$ eine rationale Zahl ist, und zwar erstmalig nach $2n_1$ Spiegelungen, wenn $\pi/\alpha = n_1/n_2$ (n_1 und n_2 teilerfremd) ist.

Ferner sieht man leicht ein, daß sich Bild und Objekt nach einer *ungeraden* Anzahl von Spiegelungen niemals decken können; denn $N = 2n+1$ müßte nach Gleichung (17) zugleich

$$\alpha_n = 0, \quad \alpha_{n+1} = 0, \quad \gamma_n = 0$$

sein, was der ersten Rekursionsformel (9) widerspricht.

Um die Verteilung der Spiegelbilder in der Bildebene noch etwas näher zu studieren, beachte man zunächst, daß alle Bilder auf dem Kreis mit dem Radius $|OP| = |\mathfrak{a}|$ um den Punkt 0 liegen; denn es ist

$$(24) \qquad \begin{cases} |\mathfrak{a}^{(2n+1)}| = |\mathfrak{a}^{(2n)}(I+\varphi_1)| = +\sqrt{(\mathfrak{a}^{(2n)} - 2\mathfrak{e}_1(\mathfrak{a}^{(2n)}\mathfrak{e}_1))^2} \\ \qquad = +\sqrt{(\mathfrak{a}^{(2n)})^2 - 4(\mathfrak{a}^{(2n)}\mathfrak{e}_1)^2 + 4\mathfrak{e}_1^2(\mathfrak{a}^{(2n)}\mathfrak{e}_1)^2} = |\mathfrak{a}^{(2n)}|, \end{cases}$$

und ebenso $|\mathfrak{a}^{(2n)}| = |\mathfrak{a}^{(2n-1)}|$. Bezeichnet man also den Winkel $\sphericalangle\,\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{(N)}$ mit ϑ_N, dann ist

Digitized by Google

(25) $$\mathfrak{a}^2 \cos \vartheta_N = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{(N)} = \mathfrak{a}^2 + A_N \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\varphi_1) + B_N \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\varphi_2) + \Gamma_N \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\varphi_{12}) - \Delta_N \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\varphi_{21}),$$

und wenn zur Abkürzung

(26) $$\mathfrak{a}\mathfrak{e}_1 = \sigma_1, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{e}_2 = \sigma_2$$

gesetzt wird, ergibt sich

(27) $$\begin{cases} \mathfrak{a}^2 \sin^2 \alpha = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \cos\alpha, \\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{(N)} = \mathfrak{a}^2 - 2A_N\sigma_1^2 - 2B_N\sigma_2^2 + 4\cos\alpha\ \sigma_1\sigma_2(\Gamma_N + \Delta_N). \end{cases}$$

Für $N = 2n$ erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) und (15)

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{(2n)} = \mathfrak{a}^2 - 2\mathfrak{a}^2 \sin^2\alpha \frac{1-\cos n\omega}{1-\cos\omega},$$

also

(28) $$\cos\vartheta_{2n} = \cos n\omega.$$

Verabredet man nun, daß die Winkel in der Bildebene positiv im Sinn der Drehung von $\mathfrak{e}_1$ nach $\mathfrak{e}_2$ $(0 < \sphericalangle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 < \pi)$ zu zählen sind, so folgt aus Gleichung (28) nur $\vartheta_{2n} = \pm n\omega + 2k\pi$. Man findet aber leicht, daß

$$\frac{1}{\mathfrak{a}^2}[\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{(2n)}] = \frac{\sin n\omega}{\sin\alpha}[\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2] = \sin n\omega \frac{[\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2]}{|[\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2]|}$$

ist, und daraus folgt offensichtlich

(29) $$\vartheta_{2n} = +n\omega + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

D. h.: *Die Bilder des Vektors* $\mathfrak{a}$ *wandern bei jeder zweiten Spiegelung im Sinn der Drehung von* $\mathfrak{e}_1$ *nach* $\mathfrak{e}_2$ *um den Winkel* $\omega = 2\alpha$ *weiter, ein Ergebnis, das sich auch leicht elementargeometrisch herleiten läßt.*

Setzt man in Gleichung (27) $N = 2n+1$, so findet man, wenn man die Gleichungen (17) benutzt und den positiv gerechneten Winkel zwischen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{a}$ mit α_1 bezeichnet, nach einigen Zwischenrechnungen

$$\cos\vartheta_{2n+1} = -\cos(n\omega + 2\alpha_1),$$

und weiter

(30) $$\vartheta_{2n+1} = (2k+1)\pi - n\omega - 2\alpha_1 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Zu demselben Resultat gelangt man dadurch, daß man das $(2n+1)$te Spiegelbild als das $2n$te Spiegelbild des ersten Bildes auffaßt. Man muß nur bedenken, daß dann das erste Bild zuerst in dem zweiten Spiegel und darauf im ersten Spiegel reflektiert wird, d. h. daß die Indizes 1 und 2 vertauscht sind und damit das Vor-

Digitized by Google

zeichen des Winkels ϑ_{2n} umgedreht wird; demzufolge hat man

$$\vartheta_{2n+1} = -\vartheta_{2n} + \vartheta_1$$

zu setzen und erhält — wenn man ϑ_1 unmittelbar berechnet — wieder Gleichung (30).

Die Gleichungen (29) und (30) bestätigen das frühere Ergebnis, nach dem ein beliebiger Punkt und sein durch genügend oft wiederholte Spiegelung erzeugtes Bild sich nur decken, wenn 1) $\omega/2\pi$ rational und 2) die Anzahl der Spiegelungen gerade ist. Denn die Gleichung

$$\vartheta_N = m\,2\pi \qquad (m \text{ ganz}) \tag{31}$$

kann für $N = 2n$ dann und nur dann erfüllt werden, wenn $\omega/2\pi$ rational ist. Im Fall $N = 2n+1$ ist dagegen der Winkel α_1, d. h. die Lage des Objektpunktes gegenüber den Spiegeln, für die Erfüllbarkeit der Gleichung (31) entscheidend, und das bedeutet, daß ein *beliebiger* Punkt durch eine ungerade Anzahl von Spiegelungen im allgemeinen nicht auf sich abgebildet werden kann.

Ist nun $\omega/2\pi = n_2/n_1$ (n_2 und n_1 ganz, teilerfremd), so gibt es auf dem Kreis — von Sonderfällen abgesehen — n_1 verschiedene Bilder mit geradem Index (der Originalpunkt wird mitgezählt) und n_1 verschiedene Bilder mit ungeradem Index [2]). Dagegen bedecken bei irrationalem $\omega/2\pi$ die Bilder eines beliebigen Punktes die Peripherie des Bildkreises dicht, weil — etwa für gerades N — die Zahlen

$$\frac{\vartheta_{2n}}{2\pi} - \left[\frac{\vartheta_{2n}}{2\pi}\right] = n\frac{\omega}{2\pi} - \left[n\frac{\omega}{2\pi}\right]$$

im Intervall $0 \ldots 1$ überall dicht liegen [3]).

2) Darauf beruht bekanntlich die Konstruktion der Kaleidoskope. Vgl. z. B. Grimsehl, Lehrbuch der Physik, 6. Aufl. von Tomaschek, Teubner 1932 Bd. II, 1 S. 631. Dort ist aber nur von dem *spitzen* Winkel zwischen den Kaleidoskopspiegeln die Rede, es fehlt die Bedingung, daß α/π rational ist. Im Lehrbuch der Physik von Müller-Pouillet (11. Aufl. Vieweg 1926 Bd. II S. 111) heißt es, daß beim Kaleidoskop der Öffnungswinkel des Winkelspiegels $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{12}$ ... von 2π betragen muß, anstatt $2\pi\, n_1/n_2$ bei beliebigem ganzzahligem n_1 und n_2.

3) Vgl. etwa G. Polya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Springer 1925, S. 71, Aufg. 166.

Digitized by Google

Über die Abschnitte von Potenzreihen, welche mit ihrer ersten Ableitung im Einheitskreise beschränkt sind[1]).

Von V. Levin.

Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ in $|z| \leqq 1$ regulär,

(1) $$|f(z)| \leqq 1,$$

(2) $$|f'(z)| \leqq 1.$$

Wir bezeichnen mit E die Klasse aller Funktionen $f(z)$, für die (1) erfüllt ist, mit E' die Klasse aller $f(z)$ für die (1) und (2) erfüllt ist (sodaß E' in E enthalten ist).

In E ist nach einem klassischen Ergebnis von Landau

$$|s_n| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \right| \leqq G_n, \quad G_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1.3 \ldots (2\nu-1)}{2.4 \ldots 2\nu} \right)^2, \quad n \geqq 1,$$

$$G_0 = 1.$$

Dabei ist G_n das Maximum von $|s_n|$ bei festem n, wenn $f(z)$ alle Funktionen aus E durchläuft.

Bei wachsendem n ist bekanntlich

$$G_n \sim \frac{1}{\pi} \ln n.$$

In E' dagegen kann man leicht die gleichmäßige Beschränktheit von s_n in n einsehen. Sie folgt aus dem Fejérschen Satz:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \right| \leqq n+1$$

in E, und der aus (2) folgenden Relation

(3) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 \leqq 1.$$

Denn es ist

$$|s_n| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu \right| \leqq 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu |a_\nu| \leqq$$

$$\leqq 1 + \frac{1}{n+1} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} 1 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 |a_\nu|^2} \leqq 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leqq 1 + \tfrac{1}{2}.$$

1) Vorgetragen in der 294. Sitzung am 28. Juni 1933.

Digitized by Google

Übrigens folgt schon auf diesem trivialen Wege

$$|s_n| \leqq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad n = 1, 2 \ldots,$$

da für $n = 1$ $|s_1| \leqq 1 + 1/4$ schon für alle $f(z)$ aus E gilt[2]), und $\sqrt{n}/(n+1)$ mit wachsendem n monoton abnimmt.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß also

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |s_n| \leqq 1$$

ausfällt, während die obere Grenze aller $|s_1|$ größer oder gleich 10/9 ist[3]).

Herr Takahashi[4]) hat nun für die $f(z)$ aus E' unter einer zusätzlichen Bedingung für a_1

$$|s_n| \leqq 1 + 5/12 = 1{,}4166 \ldots [5]),$$

und unter zwei zusätzlichen über a_1 und a_2

$$|s_n| \leqq 1 + 3/8 = 1{,}375, \quad n \geqq 1,$$

gezeigt.

Im folgenden zeigen wir, daß für alle $f(z)$ aus E'

$$|s_2| < 1{,}338, \tag{4}$$

und für $n \geqq 3$

$$|s_n| < 1 + 1/3 \tag{5}$$

gilt. Über s_2 zeigen wir genauer folgendes: x_1 durchlaufe alle komplexen Zahlen, x_2 alle mit Ausnahme von 0 und 1; es sei u die untere Grenze des Ausdruckes

$$|x_2| + \frac{|x_1|^2}{4|x_2|} + \frac{|4x_2 - x_1^2|^2}{64|x_2|^3} + \frac{|1 - x_2|}{2} + \frac{|1 - x_1|^2}{2|1 - x_2|}; \tag{6}$$

2) In E gilt nämlich

$$|a_1| \leqq 1 - |a_0|^2, \quad \text{also} \quad |s_1| \leqq |a_0| + 1 - |a_0|^2 \leqq 1 + 1/4$$

(oder $G_1 = 1 + 1/4$). Man sieht übrigens leicht ein, daß $1 + 1/4$ nicht die wahre obere Grenze von $|s_1|$ in E' ist. Vgl. indessen weiter im Text.

3) Für die von Herrn Takahashi, Japanese Journal of Mathematics, Vol. VII (1930), S. 55, angegebene Funktion

$$f(z) = \frac{2(1+z)}{3+z}$$

aus E' ist $|s_1| = 1 + 1/9$.

4) The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 35, S. 227—232.

5) Herr Erich Reißner teilt mir freundlicherweise mit, daß er die Abschätzung $|s_n| \leqq 1 + 25/64 = 1{,}3906 \ldots$ für $n \geqq 1$ in E' besitzt. Außerdem kann er $|s_n| \leqq 1 + 0(n^{-1} \ln n)$ zeigen, und findet so für $n \geqq 4$ schärfere Abschätzungen als die von uns am Schluß dieser Arbeit benutzten.

Digitized by Google

dann ist

$$|s_2| \leqq u.$$

Die Annahme $x_1 = 0{,}8476$, $x_2 = 0{,}5$ liefert

$$u < 1{,}338,$$

und damit (4).

§ 1. Abschätzung von $|s_2|$.

Es seien x_1 und x_2 beliebige komplexe Zahlen; dann ist

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0<|z|=r<1} f(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{x_1}{z^2} + \frac{x_2}{z^3} + y_0 + y_1 z\right) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0<|z|=r<1} \frac{f(z)}{z^3}(x_2 + x_1 z + z^2 + y_0 z^3 + y_1 z^4)\, dz,$$

bei beliebigen y_0 und y_1, also unter Berücksichtigung von (1)

$$|a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} |x_2 + x_1 r e^{i\varphi} + r^2 e^{2i\varphi} + y_0 r^3 e^{3i\varphi} + y_1 r^4 e^{4i\varphi}|\, d\varphi.$$

Der Grenzübergang $r \to 1$ liefert weiter mit $\zeta = e^{i\varphi}$

$$|a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x_2 + x_1 \zeta + \zeta^2 + y_0 \zeta^3 + y_1 \zeta^4|\, d\varphi.$$

Wenn $x_2 \neq 0$ ist, so gilt

$$\left(\sqrt{x_2} + \frac{x_1}{2\sqrt{x_2}}\,\zeta + \frac{4x_2 - x_1^2}{8x_2\sqrt{x_2}}\,\zeta^2\right)^2 = x_2 + x_1\zeta + \zeta^2 + y_0\zeta^3 + y_1\zeta^4,$$

sodaß mit diesen y_0 und y_1

$$(7) \quad |a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\sqrt{x_2} + \frac{x_1}{2\sqrt{x_2}}\,\zeta + \frac{4x_2 - x_1^2}{8x_2\sqrt{x_2}}\,\zeta^2\right|^2 d\varphi$$

$$= |x_2| + \frac{|x_1|^2}{4|x_2|} + \frac{|4x_2 - x_1^2|^2}{64|x_2|^3}.$$

Andererseits ist

$$(8) \quad |s_2| \leqq |a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2| + |(1 - x_1)a_1 + (1 - x_2)a_2|,$$

und

Digitized by Google

$$a_1(1-x_1)+a_2(1-x_2)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{0<|z|=r<1} f'(z)\left(\frac{1-x_1}{z}+\frac{1-x_2}{2z^2}+y_2\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{0<|z|=r<1}\frac{f'(z)}{z^2}\left(\frac{1-x_2}{2}+(1-x_1)z+y_2z^3\right)dz$$

bei beliebigem y_2, sodaß nach (2) und dem Grenzübergang $r\to 1$

$$|a_1(1-x_1)+a_2(1-x_2)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1-x_2}{2}+(1-x_1)\xi+y_2\xi^2\right|d\varphi$$

folgt. Wenn $x_2\neq 1$ ist, so gilt

$$\left(\sqrt{\frac{1-x_2}{2}}+\frac{1-x_1}{\sqrt{2-2x_2}}\xi\right)^2=\frac{1-x_2}{2}+(1-x_1)\xi+y_2\xi^2,$$

und also mit diesem y_2

$$(9)\quad |a_1(1-x_1)+a_2(1-x_2)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{\frac{1-x_2}{2}}+\frac{1-x_1}{\sqrt{2-2x_2}}\xi\right|^2 d\varphi$$

$$=\frac{|1-x_2|}{2}+\frac{|1-x_1|^2}{2|1-x_2|}.$$

Aus (7), (9) und (8) ergibt sich nun die Behauptung, die sich an (6) knüpft.

Es ist natürlich möglich auf demselben Wege auch $|s_3|$ abzuschätzen, und es müßte so ein schärferes Ergebnis erzielt werden können als dasjenige, welches wir jetzt ableiten[6]).

§ 2. Abschätzung von $|s_n|$ für $n\geqq 3$.

Wir benutzen nun einen Satz von Szegö und Rogosinski[7]) welcher als die Verallgemeinerung des oben erwähnten Fejérschen Satzes gelten kann, und lautet:

Für $f(z)$ aus E gilt mit $0<\vartheta\leqq\pi/2$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sin\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\vartheta}{\sin\vartheta}a_\nu\right|\leqq\frac{1}{\sin\vartheta}\int_0^{\vartheta}J_0^2(x)\,dx,$$

6) Die hier befolgte Methode zur Abschätzung von s_2 kann auch mit Erfolg auf die Abschätzung der Koeffizientensummen bei anderen Klassen von Funktionen angewandt werden, wie an einer anderen Stelle gezeigt werden soll.

7) Mathematische Zeitschr., 28 (1928), S. 73—94.

Digitized by Google

wo

$$J_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}x^2)^\nu}{(\nu!)^2}$$

die Besselsche Funktion nullter Ordnung bedeutet.

Mit $\vartheta = \pi/2$ und $n = 3$ liefert dieser Satz

$$\sum_{\nu=0}^{3} \cos\frac{\nu\pi}{8}\, a_\nu \leqq \int_0^{\pi/2} J_0^2(x)\, dx < 1{,}0778,$$

und also

$$|s_3| < 1{,}0778 + \left|\sum_{\nu=1}^{3}\left(1-\cos\frac{\nu\pi}{8}\right)a_\nu\right| \tag{10}$$

$$= 1{,}0778 + 2\left|\sum_{\nu=1}^{3}\sin^2\frac{\nu\pi}{16}\,a_\nu\right|.$$

Nun ist aber

$$\sin^2\frac{\nu\pi}{16}\,a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\oint_{0<|z|=r<1} f'(z)\left(\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\sin^2\nu\pi/16}{\nu}\,z^{-\nu} + y_3 + y_4 z\right)dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{0<|z|=r<1}\frac{f'(z)}{z^3}\left(\frac{1}{3}\sin^2\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\,z+\sin^2\frac{\pi}{16}\,z^2+y_3 z^3+y_4 z^4\right)dz,$$

(mit beliebigen y_3 und y_4), und nach (2) und dem Grenzübergang $r \to 1$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{3}\sin^2\frac{\nu\pi}{16}\,a_\nu\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{3}\sin^2\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\,\xi+\sin^2\frac{\pi}{16}\,\xi^2+y_3\xi^3+y_4\xi^4\right|d\varphi.$$

Bestimmen wir y_3 und y_4 wieder so, daß der Integrand das Quadrat einer in ξ quadratischen Funktion wird, so bekommen wir, wie oben,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{3}\sin^2\frac{\nu\pi}{16}\,a_\nu\right| \leqq X_0^2 + X_1^2 + X_2^2,$$

wo

$$X_0^2 = \frac{1}{3}\sin^2\frac{3\pi}{16},\quad 2X_0X_1 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8},\quad 2X_0X_2 + X_1^2 = \sin^2\frac{\pi}{16},$$

also

Digitized by Google

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$$

$$= \frac{1}{3}\sin^2\frac{3\pi}{16} + \frac{3\sin^4\pi/8}{16\sin^2 3\pi/16} + \frac{3(16\sin^2 3\pi/16\sin^2\pi/16 - 3\sin^4\pi/8)^2}{1024\sin^6 3\pi/16}$$

$$< 0{,}118.$$

Dies liefert in Verbindung mit (10)

$$|s_3| < 1{,}078 + 2 \times 0{,}118 = 1{,}314 < 1 + 1/3.$$

Für $n \geqq 4$ liefert wiederum der Szegö-Rogosinskische Satz

$$(11)\quad |s_n| < 1{,}0778 + \left|\sum_{\nu=1}^{n}(1-\cos\pi\nu/2(n+1))a_\nu\right|$$

$$\leqq 1{,}0778 + 2\sum_{\nu=1}^{n}\sin^2\pi\nu/4(n+1).|a_\nu|$$

$$\leqq 1{,}0778 + 2\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2}.\sin^4\pi\nu/4(n+1).\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2|a_\nu|^2}$$

$$\leqq 1{,}0778 + 2\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2}\sin^4\pi\nu/4(n+1)},$$

nach (3).

Für $n = 4$ ist also

$$|s_4| < 1{,}0778 + 2\left\{\sin^4\pi/20 + \frac{1}{4}\sin^4\pi/10 + \frac{1}{9}\sin^4 3\pi/20 + \frac{1}{16}\sin^4\pi/5\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$< 1{,}33 < 1 + 1/3.$$

Für $n \geqq 5$ schließlich genügt eine ganz grobe Abschätzung. Nach (11) ist

$$|s_n| < 1{,}0778 + 2\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2}\sin^4\pi\nu/4(n+1)}$$

$$\leqq 1{,}0778 + \frac{\pi^2}{8(n+1)^2}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$= 1{,}0778 + \frac{\pi^2}{8\sqrt{6}}\sqrt{\frac{n(2n+1)}{(n+1)^3}}.$$

Da $n(2n+1)/(n+1)^3$ für $n \geqq 5$ mit wachsendem n monoton abnimmt, ist also für $n \geqq 5$

$$|s_n| < 1{,}0778 + \pi^2\sqrt{55}/288 < 1 + 1/3,$$

womit der Beweis von (5) abgeschlossen ist.

Digitized by Google

Es ist noch zu bemerken, daß unsere Abschätzung für $n \geqq 4$ in einer umfassenderen Klasse als E' gilt, in der Klasse aller $f(z)$ aus E nämlich, für die

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \leqq 1$$

ausfällt.

Digitized by Google

Bemerkungen zur Kombinatorik im Anschluß an Untersuchungen von Herrn D. König[1]).

Von R. Rado, Berlin.

§ 1.

1. Man denke sich jedem System

$$m_1, m_2, \ldots, m_k \qquad (m_1 \leqq m_2 \leqq \ldots \leqq m_k) \tag{1}$$

von k positiven ganzen Zahlen, die nach steigender Größe geordnet seien, ein System von k Zeilen mit $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (später mit Zahlen) zu besetzenden Stellen zugeordnet. Dabei sollen die zu besetzenden Stellen in jeder Zeile in der ersten „Vertikalen" beginnen und in gleichem Abstand lückenlos aufeinander folgen, so daß z. B. für $m_1 = 2$, $m_2 = 4$ ein Schema

. .
. . . .

entsteht.

Sind nun

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

von einander verschiedene Dinge gegeben, die kurz mit $1, 2, \ldots, M$ bezeichnet seien, so denke man sie sich auf alle Arten auf das gegebene Zeilensystem verteilt. Dabei sollen zwei Verteilungen *äquivalent* heißen, wenn sie sich nur in der Anordnung der Elemente innerhalb der einzelnen Zeilen von einander unterscheiden. So sind z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

äquivalente Verteilungen.

Wir sagen nun, das Zahlensystem (1) besitze die Eigenschaft A_1, wenn je zwei Verteilungen durch äquivalente derart ersetzt werden können, daß die neuen Verteilungen in ihren ersten Kolonnen (abgesehen von der Reihenfolge) dieselben Elemente enthalten. Allgemeiner besitze, wie wir sagen, das Zahlensystem (1) die Eigenschaft A_ϱ $(1 \leqq \varrho \leqq m_k)$, wenn je zwei Verteilungen $\mathfrak{V}^1$, $\mathfrak{V}^2$

1) Vorgetragen in der 290. Sitzung am 22. Februar 1933.

Digitized by Google

durch äquivalente Verteilungen $\mathfrak{V}^{1,*}$, $\mathfrak{V}^{2,*}$ derart ersetzt werden können, daß jede der ϱ ersten Kolonnen von $\mathfrak{V}^{1,*}$ (abgesehen von der Reihenfolge) dieselben Elemente enthält wie die entsprechende Kolonne von $\mathfrak{V}^{2,*}$.

Die Eigenschaft A_{m_k} für ein Zahlensystem (1) sei auch mit dem Buchstaben B bezeichnet. B besagt also, daß alle Kolonnen in Betracht gezogen werden können. Offenbar folgt aus A_ϱ immer $A_{\varrho-1}$, speziell also aus B die Eigenschaft A_ϱ für alle ϱ. Dafür, daß umgekehrt ein Zahlensystem (1), das schon die Eigenschaft $A_{\varrho-1}$ besitzt, zugleich auch die Eigenschaft A_ϱ habe, ist offenbar *hinreichend*, daß das Zahlensystem

$$m_1 - \varrho + 1,\ m_2 - \varrho + 1,\ \ldots,\ m_k - \varrho + 1$$

(nach Weglassung der eventuell am Anfang auftretenden nichtpositiven Zahlen) die Eigenschaft A_1 besitzt. Es wird aus dem späteren hervorgehen, daß diese Forderung auch *notwendig* ist für das Bestehen von A_ϱ.

2. Herr König[2]) hat nun bewiesen, daß ein System einander gleicher Zahlen stets die Eigenschaft A_1 und, wie hieraus unmittelbar folgt, auch die Eigenschaft B besitzt. Im folgenden sollen allgemeiner Kriterien dafür angegeben werden, ob ein Zahlensystem (1) die Eigenschaft A_ϱ besitzt.

I. *Das Zahlensystem* (1) *besitzt dann und nur dann die Eigenschaft* A_1, *wenn für* $\varkappa = \left[\frac{k+1}{2}\right]$ *die Summe der* $\varkappa$ *ersten* m_λ *größer ist als die Summe der* $\varkappa - 1$ *letzten.*

Dieses Kriterium liefert offenbar als Spezialfall den Satz von König. Allgemeiner gilt:

II. *Das Zahlensystem* (1) *besitzt dann und nur dann die Eigenschaft* A_ϱ, *wenn*

a) *im Falle* $1 \leqq \varrho < m_1$ *für* $\varkappa = \left[\frac{k+1}{2}\right]$ *die Summe der* $\varkappa$ *ersten* m_λ *um mindestens* ϱ *größer ist als die Summe der* $\varkappa - 1$ *letzten.*

b) *im Falle* $m_1 \leqq \varrho$ die Gleichungen

$$m_2 = m_3 = \cdots = m_k \tag{2}$$

bestehen[3]).

2) Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. Mathem. Annalen 77, S. 453—465. Andere Beweise haben van der Waerden (Hamburger Abhandlungen Bd. 5, S. 185—188) und Sperner (ebendort S. 232) angegeben. Besonders einfach ist der Beweis von Herrn Sperner.

3) Es zeigt sich also, daß für (1) die Forderungen A_{m_1}, A_{m_1+1}, $\ldots$ A_{m_k} mit einander gleichbedeutend sind. Übrigens folgt ohne Mühe aus dem Königschen Satz, daß die Bedingung (2) hinreichend ist.

Digitized by Google

3. Die Bedeutung des Königschen Satzes für die Theorie der endlichen Gruppen hat schon Herr van der Waerden a. a. O. auseinandergesetzt. In § 3 behandeln wir noch einige andere gruppentheoretische Anwendungen, wobei auch die durch Satz II erzielte Verschärfung des Königschen Satzes zur Geltung kommt [4]).

4. § 4 bringt einen allgemeinen Satz über Systeme endlich vieler Mengen von beliebigen Mächtigkeiten, auf den man durch genauere Betrachtung des Beweises von Satz I geführt wird.

Die Anregung zur Beschäftigung mit Zeilen ungleicher Länge und einige weitere Bemerkungen hierzu verdanke ich Herrn Prof. J. Schur. In einer späteren Arbeit werden die analogen Fragen für Systeme unendlich vieler Zeilen behandelt werden.

§ 2.

Eine wichtige Rolle spielt im folgenden eine einfache Hilfsbetrachtung [5]). Man bezeichne eine quadratische Matrix k-ten Grades

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$$

als eine N-Matrix, wenn alle $k!$ Glieder

$$c_{1\alpha_1}\, c_{2\alpha_2} \cdots c_{k\alpha_k} \tag{3}$$

ihrer Determinante gleich Null sind. Es gilt dann die Regel:

III. *Dann und nur dann ist C eine N-Matrix, wenn sich g Zeilen und h Kolonnen mit*

$$g + h > k \tag{4}$$

in C derart angeben lassen, daß der Durchschnitt dieser Zeilen und Kolonnen mit lauter Nullen besetzt ist.

Beweis: Daß die Bedingung hinreichend ist, ist sehr leicht zu sehen. Es mögen nämlich etwa im Durchschnitt der Zeilen mit

4) Mit rein gruppentheoretischen Methoden hat G. Scorza im Bollettino della Unione Matematika Italiana, Bd. VI, S. 1—6 einen Satz bewiesen, der eine unmittelbare Folge des Königschen Satzes ist. Er lautet: Die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ habe zwei Untergruppen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ von gleichem Index r. Dann gibt es stets r Elemente aus $\mathfrak{G}$, die gleichzeitig ein Repräsentantensystem aller Rechtsnebengruppen von $\mathfrak{U}_1$ und ein Repräsentantensystem aller Linksnebengruppen von $\mathfrak{U}_2$ bilden.

5) Die Anregung zu dieser determinantentheoretischen Betrachtung haben wir den Ausführungen auf Seite 457 ff. der Königschen Arbeit entnommen.

Digitized by Google

den Indizes

$$1, 2, \ldots, g$$

und der Kolonnen mit den Indizes

$$g, g+1, \ldots, k \tag{5}$$

lauter Nullen stehen. Bildet man dann irgendein Determinantenglied (3), so muß mindestens einer der Indizes

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$$

einen Wert aus der Reihe (5) haben, was das Verschwinden von (3) nach sich zieht.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Bedingung auch notwendig ist. Für Matrizen vom Grade $k = 1$ ist sie offenbar notwendig. Die Notwendigkeit der Bedingung sei bereits für alle Matrizen von kleinerem als dem k-ten Grade bewiesen. C sei eine N-Matrix vom Grade k. Sind alle $c_{1\nu} = 0$, so ist die Bedingung für $g = 1$, $h = k$ erfüllt. Gibt es ein von Null verschiedenes $c_{1\nu}$, sei etwa $c_{1\sigma} \neq 0$, so ist offenbar die Matrix C_1, die aus C durch Streichen der ersten Zeile und der σ-ten Kolonne entsteht, wieder eine N-Matrix. Nach Induktionsannahme gibt es in C_1 dann g_1 Zeilen und h_1 Kolonnen mit

$$g_1 + h_1 > k - 1,$$

so daß im Durchschnitt dieser Zeilen und Kolonnen lauter Nullen stehen. Wäre $g_1 + h_1 > k$, so wäre für C die nachzuweisende Bedingung erfüllt. Es bleibt also noch der Fall

$$g_1 + h_1 = k$$

zu betrachten. Durch Vertauschung von Zeilen untereinander oder Kolonnen untereinander wird die Eigenschaft einer Matrix, N-Matrix zu sein, nicht geändert. Man kann daher annehmen, in C ist der Durchschnitt der g_1 ersten Zeilen mit den $h_1 = k - g_1$ letzten Kolonnen mit lauter Nullen besetzt. Also ist

$$C = \begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

wo C_2 und C_4 quadratische Matrizen vom Grade g_1 bezw. h_1 sind. Damit nun C eine N-Matrix wird, ist offenbar erforderlich, daß entweder C_2 oder C_4 eine N-Matrix ist. Ist C_2 eine solche, dann gibt es nach Induktionsannahme g_2 Zeilen und h_2 Kolonnen in C_2, also auch in C, deren Durchschnitt nur Nullen enthält, und es ist

$$g_2 + h_2 > g_1.$$

Digitized by Google

Dann erfüllt C die gesuchte Bedingung mit

$$g = g_2, \quad h = h_1 + h_2,$$

und es ist, wie es sein muß,

$$g + h = g_2 + h_1 + h_2 > g_1 + h_1 = k.$$

Man betrachte nämlich die g_2 erwähnten Zeilen, die h_2 erwähnten Kolonnen von C_2 und die h_1 letzten Kolonnen von C, in deren Durchschnitt ja nur Nullen stehen. Analog geht man vor, wenn nicht C_2, sondern C_1 eine N-Matrix ist.

2. Um nun zum Satz I zu gelangen, denke man sich zwei zu den Zahlen (1) gehörende Verteilungen $\mathfrak{V}^1$, $\mathfrak{V}^2$ der Zahlen

$$1, 2, \ldots, M$$

vorgenommen. Die Zahl $c_{\alpha\beta} \geqq 0$ gebe nun an, wie viele Elemente die α-te Zeile $\mathfrak{Z}^1_\alpha$ von $\mathfrak{V}^1$ mit der β-ten Zeile $\mathfrak{Z}^2_\beta$ von $\mathfrak{V}^2$ gemeinsam hat.

Man überlegt sich leicht, daß für das Bestehen der Eigenschaft A_1 bei unserem Zahlensystem (1) nur zu verlangen ist, daß niemals für zwei Verteilungen $\mathfrak{V}^1$ und $\mathfrak{V}^2$ die Matrix $C = (c_{\alpha\beta})$ eine N-Matrix wird. Denn es ist ja nur zu verlangen, daß man jeder Zeile $\mathfrak{Z}^1_\nu$ eine Zeile $\mathfrak{Z}^2_{\alpha_\nu}$ mit von einander verschiedenen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ zuordnen kann, derart, daß $\mathfrak{Z}^1_\nu$ und $\mathfrak{Z}^2_{\alpha_\nu}$ mindestens ein Element gemeinsam haben. Dann wird aber (3) von Null verschieden, demnach ist also C keine N-Matrix. Ist umgekehrt C keine N-Matrix, so ist eine solche Zuordnung der $\mathfrak{Z}^1_\nu$ und $\mathfrak{Z}^2_\nu$ möglich, (1) hat also die Eigenschaft A_1.

Es fragt sich also, welche Forderungen an die Zahlen (1) zu stellen sind, damit keine der zu betrachtenden Matrizen C eine N-Matrix wird.

Nimmt man erstens an, C sei eine N-Matrix, so folgt aus Satz III, daß zu gewissen g Zeilenindizes

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_g$$

$h = k + 1 - g$ Kolonnenindizes

$$\gamma_g, \gamma_{g+1}, \ldots, \gamma_k$$

gehören, so daß alle

$$c_{\beta_\delta \gamma_\varepsilon} = 0$$

werden. Bezeichnet man die von den γ_ε verschiedenen $k - h = g - 1$ Kolonnenindizes mit

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{g-1},$$

Digitized by Google

so betrachte man die Matrix

$$\begin{pmatrix} c_{\beta_1 \varkappa_1} & c_{\beta_1 \varkappa_2} & \cdots & c_{\beta_1 \varkappa_{g-1}} \\ c_{\beta_2 \varkappa_1} & c_{\beta_2 \varkappa_2} & \cdots & c_{\beta_2 \varkappa_{g-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\beta_g \varkappa_1} & c_{\beta_g \varkappa_2} & \cdots & c_{\beta_g \varkappa_{g-1}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

In dieser Matrix wird nun offenbar die Summe der Elemente der δ-ten Zeile gleich der Gesamtanzahl der Elemente der Zeile $\mathfrak{Z}^1_{\beta_\delta}$, das heißt, es ist

$$c_{\beta_\delta \varkappa_1} + c_{\beta_\delta \varkappa_2} + \cdots + c_{\beta_\delta \varkappa_{g-1}} = m_{\beta_\delta}.$$

Bildet man aber in (6) die Summe der Elemente der ε-ten Kolonne, so kann man nur schließen:

$$c_{\beta_1 \varkappa_\varepsilon} + c_{\beta_2 \varkappa_\varepsilon} + \cdots + c_{\beta_g \varkappa_\varepsilon} \leqq m_{\varkappa_\varepsilon}.$$

Hieraus folgt aber durch Summation:

$$\sum_{\delta=1}^{g} m_{\beta_\delta} \leqq \sum_{\varepsilon=1}^{g-1} m_{\varkappa_\varepsilon}. \tag{7}$$

Bisher ist also gezeigt: Wenn (1) nicht die Eigenschaft A_1 hat, so ist C eine N-Matrix, und dann wieder besteht zwischen den m_λ eine Ungleichung der Form (7).

Gilt umgekehrt eine Ungleichung der Form (7), so hat (1) nicht die Eigenschaft A_1. Man wähle nämlich die Verteilung $\mathfrak{V}^1$ irgendwie und bilde $\mathfrak{V}^2$ dann so, daß alle in den Zeilen

$$\mathfrak{Z}^1_{\beta_1}, \mathfrak{Z}^1_{\beta_2}, \ldots, \mathfrak{Z}^1_{\beta_g} \tag{8}$$

vorkommenden Zahlen auch in den Zeilen

$$\mathfrak{Z}^2_{\varkappa_1}, \mathfrak{Z}^2_{\varkappa_2}, \ldots, \mathfrak{Z}^2_{\varkappa_{g-1}} \tag{9}$$

vorkommen, was wegen (7) gewiß möglich ist. Wählt man dann aus jeder der Zeilen (8) eine beliebige Zahl, so gibt es unter diesen g Zahlen immer zwei Zahlen, welche in derselben Zeile (9) liegen. Das zeigt deutlich, daß $\mathfrak{V}^1$ und $\mathfrak{V}^2$ nicht der Definition von A_1 entsprechend durch äquivalente Verteilungen mit übereinstimmenden ersten Kolonnen ersetzt werden können.

3. Das bisherige liefert nur als notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Bestehen der Eigenschaft A_1 bei dem Zahlensystem (1), daß für alle g jede Summe von g Zahlen m_λ größer ausfällt als jede Summe der $g-1$ Zahlen m_λ. Dieses bedeutet aber nur, daß für jedes g die Summe der g ersten m_λ größer ist als die Summe der $g-1$ letzten. Diese Ungleichung wollen wir kurz mit

Digitized by Google

$\mathfrak{U}_g$ bezeichnen. Für

$$g = \varkappa = \left[\frac{k+1}{2}\right]$$

ergibt sich die in Satz I formulierte Forderung. Es ist aber leicht zu sehen, daß aus dem Bestehen dieser speziellen Ungleichung $\mathfrak{U}_\varkappa$ jede andere Ungleichung $\mathfrak{U}_g$ folgt. Z. B. lautet $\mathfrak{U}_\varkappa$ für $k = 5$, also $\varkappa = 3$:

$$m_1 + m_2 + m_3 > m_4 + m_5.$$

Wegen $m_3 \leqq m_4$ folgt hieraus

$$m_1 + m_2 > m_5,$$

und diese Ungleichung ist identisch mit $\mathfrak{U}_2$.

Satz I ist somit bewiesen.

4. Satz II ist jetzt in naheliegender Weise so zu beweisen: Es soll zunächst gezeigt werden, daß die in Satz II genannten Bedingungen für das Bestehen der Eigenschaft A_ϱ hinreichen.

Ist $1 < m_1$, so ist die unter a) angegebene Bedingung für $\varrho = 1$ identisch mit der Bedingung von Satz I, also hinreichend für das Bestehen von A_1.

Ist $2 \leqq \varrho < m_1$, und ist die unter a) angegebene Bedingung im Falle $\varrho - 1$ schon als für $A_{\varrho-1}$ hinreichend erkannt, so folgt auch aus der für ϱ angesetzten Bedingung die Eigenschaft A_ϱ. Denn die Zahlen

$$m_1 - \varrho + 1,\ m_2 - \varrho + 1,\ \ldots,\ m_k - \varrho + 1$$

erfüllen dann die für A_1 hinreichenden Bedingungen. Wie bereits in § 1 erwähnt wurde, folgt aber hieraus in Verbindung mit der Tatsache, daß die Zahlen m_λ die Eigenschaft $A_{\varrho-1}$ besitzen, für die m_λ die Eigenschaft A_ϱ.

Gilt ferner die unter b) angegebene Bedingung, so gilt dieselbe Bedingung für alle Zahlensysteme

$$\begin{aligned} &m_1 - a,\ m_2 - a,\ \ldots,\ m_k - a \quad \text{für} \quad 0 \leqq a < m_1 \\ &m_2 - b,\ \ldots,\ m_k - b \quad \text{für} \quad m_1 \leqq b < m_k, \end{aligned}$$

woraus das Bestehen der Eigenschaft B für (1) folgt.

Jetzt sei umgekehrt angenommen, für ein $\varrho \leqq m_1$ gelte die unter a) angegebene Bedingung nicht. Dann ist also

$$(10) \qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_k \leqq m_{k-\varkappa+2} + m_{k-\varkappa+3} + \cdots + m_k + \varrho - 1.$$

Man wähle dann die Verteilung $\mathfrak{V}_1$ beliebig und dann $\mathfrak{V}_2$ derart,

Digitized by Google

daß es höchstens $\varrho - 1$ Zahlen gibt, die in den Zeilen

$$\mathfrak{Z}^1_{m_1},\ \mathfrak{Z}^1_{m_2},\ \ldots,\ \mathfrak{Z}^1_{m_k}, \tag{11}$$

vorkommen, aber nicht in den Zeilen

$$\mathfrak{Z}^2_{m_{k-\varkappa+2}},\ \mathfrak{Z}^2_{m_{k-\varkappa+3}},\ \ldots,\ \mathfrak{Z}^2_{k} \tag{12}$$

vorkommen. Das ist wegen (10) gewiß möglich.

Ist jetzt $\mathfrak{Z}^{1,*}$ eine zu $\mathfrak{Z}^1$ äquivalente Verteilung, so gibt es unter den ϱ ersten Kolonnen von $\mathfrak{Z}^{1,*}$ wegen dieser Wahl der Verteilungen mindestens eine Kolonne, von der alle $\varkappa$ in den Zeilen (11) liegenden Zahlen auch in den Zeilen (12) vorkommen. Da die Zeilen (12) nur in der Anzahl $\varkappa - 1$ vorliegen, so gibt es unter diesen $\varkappa$ Zahlen dann zwei Zahlen, die in derselben Zeile (12), also in derselben Zeile von $\mathfrak{Z}^2$ liegen. Für die beiden Verteilungen $\mathfrak{Z}^1$ und $\mathfrak{Z}^2$ liegt also, wie man hiernach unmittelbar erkennt, die für das Bestehen von A_ϱ notwendige Eigenschaft nicht vor. Die Notwendigkeit der Bedingung a) von Satz II ist also bewiesen. Gleichzeitig ist für das Bestehen von A_{m_1} als notwendige Bedingung bisher gezeigt:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_\varkappa \geqq m_{k-\varkappa+2} + m_{k-\varkappa+3} + \cdots + m_k + m_1$$

oder

$$m_2 + \cdots + m_\varepsilon \geqq m_{k-\varkappa+2} + \cdots + m_k.$$

Wegen $\varkappa < k - \varkappa + 2$ und der ansteigenden Ordnung der m_λ folgt hieraus, wie behauptet, die unter b) angegebene Bedingung. Diese Bedingung ist also a fortiori notwendig für das Bestehen von A_ϱ mit einem $\varrho > m_1$, womit Satz II vollständig bewiesen ist.

Als Beispiel für eine Anwendung von Satz II wollen wir untersuchen, für welche Tripel a, N, ϱ das Zahlensystem

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ a+N \tag{13}$$

die Eigenschaft A_ϱ besitzt. Man behandelt hierbei zweckmäßig den Fall eines ungeraden und eines geraden N gesondert.

Wann hat das Zahlensystem

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ a+2n-1 \qquad (n>0) \tag{14}$$

die Eigenschaft A_ϱ? Zunächst sei $1 \leqq \varrho < a$. Die Zahl $\varkappa$ von Satz II wird

$$\varkappa = \left[\frac{2n+1}{2}\right] = n,$$

die Bedingung lautet

$$a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n-1)$$
$$\geqq (a+n+1) + (a+n+2) + \cdots + (a+2n-1) + \varrho$$

Digitized by Google

oder

$$\begin{gathered} a+(a+1-a-n-1) \\ +(a+2-a-n-2)+\cdots+(a+n-1-a-2n+1) \geqq \varrho \\ a-n(n-1) \geqq \varrho. \end{gathered} \tag{15}$$

Die Eigenschaft B liegt für (14) nur vor, wenn $n = 1$ ist.

Für das Zahlensystem

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ a+2n \qquad (n>0) \tag{16}$$

wird

$$z = \left[\frac{2n+1+1}{2}\right] = n+1.$$

Die Bedingung für das Bestehen von A_ϱ lautet hier

$$\begin{gathered} a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n) \\ \geqq (a+n+1)+(a+n+2)+\cdots+(a+2n)+\varrho \end{gathered}$$

oder

$$\begin{gathered} a+(a+1-a-n-1) \\ +(a+2-a-n-2)+\cdots+(a+n-a-2n) \geqq \varrho \\ a-n^2 \geqq \varrho. \end{gathered} \tag{17}$$

Die Eigenschaft B kann für (16) niemals bestehen.

Es zeigt sich also, daß man, wenn man Zahlensysteme (13) mit der Eigenschaft A_ϱ für irgendein festes ϱ aufstellen will, mit N höchstens bis zur Größenordnung $\sqrt{a}$ gehen darf. Man kann leicht aus (15) und (17) das genauere Resultat ableiten:

Die größte Zahl N, für die das Zahlensystem

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ a+N$$

noch die Eigenschaft A_ϱ besitzt, ist bestimmt durch

$$N_{\max} = \operatorname{Max}\left(2.[\sqrt{a-\varrho}],\ 2.\left[\frac{1+[\sqrt{4(a-\varrho)+1}]}{2}\right]-1\right).$$

Hierbei bedeutet, wie üblich, $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

§ 3.

In diesem Paragraphen sollen einige gruppentheoretische Anwendungen des Satzes II und speziell des Königschen Satzes angegeben werden.

1. Eine einfache Folgerung des Königschen Satzes ist der folgende Satz:

Digitized by Google

Eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ *habe zwei Untergruppen* $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ *von gleichem Index. Dann gibt es immer ein gemeinsames Repräsentantensystem für die Nebengruppen von* $\mathfrak{U}_1$ *und* $\mathfrak{U}_2$, *das heißt: Es gibt zwei Zerlegungen folgender Art:*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 P_1 + \mathfrak{U}_1 P_2 + \cdots + \mathfrak{U}_1 P_k$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_2 P_1 + \mathfrak{U}_2 P_2 + \cdots + \mathfrak{U}_2 P_k \qquad (P_1, P_2, \ldots, P_k < \mathfrak{G}).$$

Man kann auch nach Belieben bei einer Zerlegung oder bei beiden Zerlegungen Links- statt Rechts-Nebengruppen wählen.

Dieser Satz ist z. B. auf jedes Paar einander ähnlicher Untergruppen anwendbar[6]).

2. Noch in einer anderen Richtung kann der Königsche Satz auf die Gruppentheorie angewandt werden.

k und m seien zwei natürliche Zahlen, $\mathfrak{S}$ sei die symmetrische Gruppe in den km Vertauschungssymbolen

$$1, 2, \ldots, km. \tag{18}$$

Die Permutationen aus $\mathfrak{S}$ schreiben wir in der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & m, & m+1, & \ldots & 2m, & \ldots & km \\ a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1m}, & a_{21}, & \ldots & a_{2m}, & \ldots & a_{km} \end{pmatrix}.$$

Jeder Permutation A entspricht ein Schema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{km} \end{vmatrix} \tag{19}$$

von k Zeilen und m Kolonnen, das wir als das zu A gehörende Schema bezeichnen.

Der Königsche Satz gestattet nun, über den Aufbau dieser symmetrischen Gruppe einige interessante, bisher anscheinend noch nicht beachtete Aussagen zu machen.

Zum Einheitselement $E < \mathfrak{S}$ gehört das Schema

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & \ldots & m \\ m+1, & m+2, & \ldots & 2m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (k-1)m+1, & (k-1)m+2, & \ldots & km \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Es sei $\mathfrak{Z}$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{S}$, die aus allen Permutationen

6) Eine andere wichtige Art von Zerlegungen einer Gruppe in Teilkomplexe bildet die Frobeniussche Zerlegung nach einem Doppelmodul. Auch hier lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen, die uns aber bisher nur auf wenig prägnante Teilergebnisse geführt haben.

Digitized by Google

besteht, welche nur die Symbole innerhalb der einzelnen Zeilen von (20) untereinander permutieren. Offenbar ist $\mathfrak{Z}$ das direkte Produkt von k symmetrischen Gruppen mit je m Vertauschungssymbolen.

Entsprechend sei $\mathfrak{K}$ die Untergruppe derjenigen Permutationen aus $\mathfrak{S}$, welche nur innerhalb der einzelnen Kolonnen von (20) permutieren.

$\mathfrak{K}$ ist das direkte Produkt von m symmetrischen Gruppen mit je k Vertauschungssymbolen.

Im Sinne der vorhergehenden Paragraphen kann man (19) als eine zum Zahlensystem

$$m, m, \ldots, m \tag{21}$$

gehörende Verteilung der Zahlen (18) betrachten. Der Übergang zu einer äquivalenten Verteilung drückt sich bei der zugehörigen Permutation, wie man sich leicht überlegt, darin aus, daß vorne mit einer Permutation aus $\mathfrak{Z}$ multipliziert wird. So bedeutet z. B. die Vertauschung von a_{11} und a_{12} im Schema (19) die vordere Multiplikation von A mit der zum Schema

$$\begin{pmatrix} 2, & 1, & 3, & 4, & \ldots, & m \\ m+1, & m+2, & m+3, & m+4, & \ldots, & 2m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)m+1, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & km \end{pmatrix}$$

gehörenden Permutation. Analog ist jede Vertauschung innerhalb der einzelnen Kolonnen von (19) gleichbedeutend mit vorderer Multiplikation von A mit einer Permutation aus $\mathfrak{K}$.

Man betrachte jetzt die beiden Schemata (19) und (20). Nach König gibt es

$$Z_1, Z_2 < \mathfrak{Z}$$

derart, daß die beiden zu den Permutationen

$$Z_1 A, Z_2 E$$

gehörenden Schemata in je zwei entsprechenden Kolonnen dieselben Zahlen enthalten. Daraus folgt: Nimmt man in jeder Kolonne des Schemas von $Z_1 A$ noch eine passende Vertauschung vor, so wird das entstehende Schema identisch mit dem Schema von $Z_2 E$. Es gibt also $K_1 < \mathfrak{K}$ mit

$$K_1 Z_1 A = Z_2 E = Z_2$$

oder

$$A = Z_1^{-1} K_1^{-1} Z_2.$$

Digitized by Google

Das bedeutet: Jede Permutation $A < \mathfrak{S}$ ist in der Form

$$A = ZKZ' \text{ mit } Z, Z' < \mathfrak{Z}, K < \mathfrak{K}$$

darstellbar. Man kann auch sagen: In der Frobeniusschen Darstellungsweise ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{Z}\mathfrak{K}\mathfrak{Z}. \tag{22}$$

Oder: Zerlegt man $\mathfrak{S}$ nach dem Doppelmodul $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}$, so kann man ein Repräsentantensystem angeben, das in $\mathfrak{K}$ liegt.

Bezeichnet man mit

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

die symmetrische Gruppe in den Vertauschungssymbolen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so kann man (22) auch, etwa im Falle $k = 2$, $m = 3$, schreiben:

$$\mathfrak{S}(1,2,3,4,5,6) = (\mathfrak{S}(1,2,3) \times \mathfrak{S}(4,5,6)) . (\mathfrak{S}(1,4) \times \mathfrak{S}(2,5) \times \mathfrak{S}(3,6)) . (\mathfrak{S}(1,2,3) \times \mathfrak{S}(4,5,6)).$$

Etwas Analoges gilt für jedes Paar k, m.

Satz II lehrt, daß außer (21) allgemeiner jedes System von k Zahlen der Form

$$m_1, m_2, m_2, \ldots, m_2 \qquad (0 < m_1 \leqq m_2) \tag{23}$$

die Eigenschaft B, auf die es ja hier allein ankommt, besitzt. Das liefert noch allgemeinere Zerlegungen der symmetrischen Gruppen als (22). Man erhält sie, indem man auf das zu (23) gehörende Zeilensystem die Zahlen

$$1, 2, \ldots, m_1 + (k-1)m_2 \tag{24}$$

irgendwie verteilt und nun, genau wie vorhin, die Untergruppen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{K}$ bildet. Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}$ in den Symbolen (24) ist dann wieder nach (22) zerlegbar. Z. B. liefert $m_1 = 2$, $m_2 = k = 3$:

$$\mathfrak{S}(1,2,3,4,5,6,7,8) = (\mathfrak{S}(1,2) \times \mathfrak{S}(3,4,5) \times \mathfrak{S}(6,7,8)) . (\mathfrak{S}(1,3,6) \times \mathfrak{S}(2,4,7) \times \mathfrak{S}(5,8)) . (\mathfrak{S}(1,2) \times \mathfrak{S}(3,4,5) \times \mathfrak{S}(6,7,8)).$$

Auch die Eigenschaft A_ϱ führt auf ähnliche Zerlegungsmöglichkeiten für die symmetrischen Gruppen.

§ 4.

In diesem Paragraphen soll ein Satz behandelt werden, der eine allgemeine Aussage über gewisse Systeme endlich vieler Mengen darstellt und den man vielleicht als die eigentliche Quelle des Königschen Satzes ansprechen kann. Der Beweis dieses Satzes

Digitized by Google

wird in gewisser Beziehung parallel dem in § 2 angegebenen Beweis von Satz I verlaufen.

Man denke sich irgendeine endliche Anzahl beliebiger nicht leerer Mengen

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_N \tag{25}$$

gegeben, die etwa sämtlich Teilmengen einer Menge $\mathfrak{M}$ seien. Ein System

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

endlich vieler Elemente von $\mathfrak{M}$ nenne man ein *Repräsentantensystem* der Mengen (25), wenn unter den $x_\varkappa$ aus jeder der Mengen (25) *mindestens* ein Element vorkommt. Es wird also nicht verlangt, daß die $x_\varkappa$ sämtlich in verschiedenen $\mathfrak{M}_\nu$ liegen, sondern nur, daß sie alle Mengen $\mathfrak{M}_\nu$ durchlaufen, manche vielleicht mehrfach.

Es erhebt sich nun die Frage, wie viele Elemente ein solches Repräsentantensystem bei gegebenen $\mathfrak{M}_\nu$ mindestens enthalten muß. In einem Spezialfall, wenn man nämlich die Mengen $\mathfrak{M}_\nu$ derart in zwei Gruppen einteilen kann, daß je zwei Mengen aus derselben Gruppe zu einander elementenfremd sind, kann diese Frage, wie der folgende Satz lehrt, auf die Beantwortung einer andern Frage zurückgeführt werden, welche im konkreten Fall wohl meistens leichter zu entscheiden ist als die ursprüngliche.

IV: *Es seien* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ *endlich viele nicht leere, paarweise elementenfremde Mengen. Ebenso seien* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ *endlich viele nicht leere, paarweise elementenfremde Mengen. Alle Mengen* $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ *seien Teilmengen einer Menge* $\mathfrak{M}$. *Unter dieser Annahme gilt: Dann und nur dann sind die Mengen*

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m, \ \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n \tag{26}$$

durch k Elemente von $\mathfrak{M}$ *zu repräsentieren, wenn es unter den Mengen* (26) *keine* $k+1$ *zu einander fremde Mengen gibt.*

Beweis: 1. Es sei

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

ein Repräsentantensystem der Mengen (26). Mit

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{k+1} \tag{27}$$

seien irgendwelche $k+1$ unter den Mengen (26) bezeichnet. Jede der $k+1$ Mengen (27) enthält also mindestens eines der Elemente $x_\varkappa$. Folglich gibt es zwei unter den Mengen (27), die dasselbe $x_\varkappa$ enthalten, die daher einen nicht leeren Durchschnitt besitzen. Die angegebene Bedingung für Repräsentierbarkeit durch k Elemente ist also notwendig.

Digitized by Google

2. Um zu zeigen, daß die Bedingung auch hinreicht, verfahre man so: Man nehme an, es gäbe unter den Mengen (26) keine $k+1$ paarweise zu einander fremde Mengen. Es ist zu zeigen, daß diese Mengen dann durch k Elemente zu repräsentieren sind. Für $k = 1$ ist das gewiß der Fall. Denn aus der Bedingung folgt $m = 1$ und $n = 1$, da andernfalls $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ bezw. $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ ein System von $k+1 = 2$ paarweise zu einander fremden Mengen wäre. Ferner haben aus demselben Grunde $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ einen Durchschnitt, was mit

$$\mathfrak{A}_1 . \mathfrak{B}_1 \neq 0$$

bezeichnet sei. Wählt man also $x_1 < \mathfrak{A}_1 . \mathfrak{B}_1$, so hat man in diesem einen Element ein Repräsentantensystem.

Man kann also annehmen, für kleinere Werte von k sei der Satz schon bewiesen. Es gelte nun die Bedingung des Satzes für irgendein $k \geqq 2$. Dann ist

$$m \leqq k, \quad n \leqq k, \tag{28}$$

da andernfalls $k+1$ paarweise zu einander fremde Menge vorhanden wären. Wenn $m+n \leqq k$ ist, dann wähle man aus jedem $\mathfrak{A}_\mu$ und jedem $\mathfrak{B}_\nu$ je ein Element. So erhält man ein Repräsentantensystem, das höchstens k Elemente enthält. Es bleibt also noch der Fall

$$m+n > k \tag{29}$$

zu betrachten. In diesem Falle gibt es unter den Mengen (26) zwei Mengen mit einem Durchschnitt, da andernfalls wegen (29) $k+1$ paarweise zu einander fremde Mengen vorkämen. Man nehme etwa an:

$$\mathfrak{A}_m . \mathfrak{B}_n \neq 0.$$

Wenn die Mengen

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m-1}, \quad \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1} \tag{30}$$

durch $k-1$ Elemente zu repräsentieren sind, so füge man ein Element

$$x_k < \mathfrak{A}_m . \mathfrak{B}_n$$

hinzu und erhält so k Repräsentanten der Mengen (26). Man nehme andrerseits an, die Mengen (30) seien nicht durch $k-1$ Elemente zu repräsentieren. Dann gibt es nach Induktionsannahme unter den Mengen (30) $(k-1)+1$ paarweise zu einander fremde Mengen. Es sei etwa

$$\mathfrak{A}_\mu . \mathfrak{B}_\nu = 0 \text{ für } 1 \leqq \mu \leqq m_1, \quad 1 \leqq \nu \leqq n_1 \tag{31}$$

Digitized by Google

mit

$$m_1 + n_1 = k, \quad m_1 \leqq m-1, \quad n_1 \leqq n-1. \tag{32}$$

Wegen (28) und (32) ist

$$1 \leqq m_1, \; n_1 \leqq k-1.$$

Man zerlege nun die Aufgabe, für (26) k Repräsentanten zu finden, in folgende zwei Teilaufgaben:

1. Die Mengen

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{m_1}, \quad \mathfrak{B}_{n_1+1}, \ldots, \mathfrak{B}_n \tag{33}$$

durch m_1 Elemente zu repräsentieren.

2. Die Mengen

$$\mathfrak{A}_{m_1+1}, \ldots, \mathfrak{A}_m, \quad \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{n_1}$$

durch n_1 Elemente zu repräsentieren.

Sind diese beiden Teilaufgaben lösbar, so sind offenbar nach (32) die Mengen (26) durch k Elemente zu repräsentieren. Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, daß eine, etwa die erste dieser Teilaufgaben, nicht lösbar ist. Nach Induktionsannahme gibt es dann unter den Mengen (33) $m_1 + 1$ paarweise zu einander fremde Mengen, sie seien mit

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{m_1+1}$$

bezeichnet. Unter Beachtung von (31) folgt dann, daß die Mengen

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{n_1}, \quad \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{m_1+1}$$

paarweise zu einander fremd sind, und das widerspricht, da ihre Anzahl

$$n_1 + m_1 + 1 = k+1$$

beträgt, der über die Mengen (26) gemachten Annahme.

Wir wollen nun zeigen, wie aus dem eben bewiesenen Satz sofort Satz I folgt. Man nehme an, das Zahlensystem

$$m_1, m_2, \ldots, m_k$$

habe nicht die Eigenschaft A_1. Dann gibt es also zwei Verteilungen $\mathfrak{V}^1$ und $\mathfrak{V}^2$ auf das zugehörige Zeilensystem, die nicht durch äquivalente Verteilungen derart ersetzt werden können, daß in den ersten Kolonnen der neuen Verteilungen dieselben Zahlen stehen. Die Zeilen von $\mathfrak{V}^1$ und $\mathfrak{V}^2$ seien mit

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k \text{ bezw. } \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k \tag{34}$$

bezeichnet. Die obige Annahme über $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ ist damit gleichbedeutend, daß die Mengen (34) nicht durch k Zahlen repräsentierbar

Digitized by Google

sind. Nach Satz IV gibt es dann aber $k+1$ unter den Mengen (34), die paarweise zu einander fremd sind. Es seien etwa die Mengen

$$\mathfrak{A}_{\alpha_1}, \mathfrak{A}_{\alpha_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{\alpha_\mu}, \quad \mathfrak{B}_{\beta_\mu}, \mathfrak{B}_{\beta_{\mu+1}}, \ldots, \mathfrak{B}_{\beta_k}.$$

Da im ganzen nur

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k$$

Zahlen verteilt werden, folgt hieraus

$$(35) \qquad m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha_\mu} + m_{\beta_\mu} + \cdots + m_{\beta_k} \leqq m_1 + \cdots + m_k.$$

Es seien

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mu-1}$$

diejenigen unter den Indizes

$$1, 2, \ldots, k$$

die nicht in der Reihe der Indizes

$$\beta_\mu, \beta_{\mu-1}, \ldots, \beta_k$$

vorkommen. Dann folgt aus (35):

$$m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha_\mu} \leqq m_{\beta_1} + \cdots m_{\beta_{\mu-1}}.$$

Die Bedingung von Satz I ist also hinreichend für das Bestehen von A_1. Ihre Notwendigkeit leuchtet ebenso leicht ein.

Entsprechend dem Übergang von Satz I zu Satz II kann man auch Satz IV verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung lautet:

V: *k, m, n, ϱ seien natürliche Zahlen. Ferner seien*

$$(36) \qquad \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m, \quad \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$$

Teilmengen einer Menge $\mathfrak{M}$, deren jede mindestens ϱ Elemente enthält. Sowohl der Durchschnitt zweier $\mathfrak{A}_\mu$ als auch der Durchschnitt zweier $\mathfrak{B}_\nu$ enthalte stets weniger als ϱ Elemente. Unter dieser Annahme gilt: Dann und nur dann gibt es für die Mengen (36) *ϱ zu einander fremde Repräsentantensysteme mit je k Elementen, wenn unter den Mengen* (36) *keine $k+1$ Mengen vorkommen, deren sämtliche Durchschnitte zu je zweien weniger als ϱ Elemente enthalten.*

Satz IV ist offenbar identisch mit dem Spezialfall $\varrho = 1$ des letzten Satzes. Man kann durch eine einfache Überlegung auch umgekehrt Satz V auf Satz IV zurückführen, was wir hier nicht ausführen wollen. Aus Satz V folgt in ganz ähnlicher Weise, wie oben für den Fall $\varrho = 1$ auseinandergesetzt wurde, der Satz II.

Digitized by Google

Herstellung von vollständigen Funktionssystemen in zwei komplexen Veränderlichen [1].

Von Stefan Bergmann in Berlin.

In dem Vortrage werden gewisse spezielle ganz im Endlichen gelegene Gebiete $\mathfrak{M}^4$ des vierdimensionalen Raumes betrachtet, die von einer „Deckelhyperfläche“ $\bar{\mathfrak{i}}_0^3 = S\bar{\mathfrak{F}}_0^2(\lambda_k)$ [2]) und endlich vielen weiteren *analytischen Hyperflächen* $\bar{\mathfrak{i}}_k^3 = S\bar{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ berandet sind. Dabei bedeuten $\bar{\mathfrak{F}}_0^2(\lambda_k)$ einen Bereich in der Ebene $t_2 = e^{i\lambda_0}$, $\lambda_0 = \text{const.}$, $\bar{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ einen Bereich in der analytischen Fläche $t_1 = h_k(t_2, \lambda_k)$, $\lambda_k = \text{const.}$, $|t_2| \leqq 1$, die im folgenden mit $\bar{\mathfrak{H}}_k^2(\lambda_k)$ bezeichnet wird, und t_1, t_2 die komplexen Veränderlichen. Die $h_k(t_2, \lambda_k)$ sind für jedes festes λ_k in: $|t_2| \leqq 1$ reguläre und eindeutige Funktionen d. 1. k. V. t_2. Die Menge $\mathfrak{i}_k^1(\lambda_k)$ bedeute den Rand von $\bar{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ *auf* $\bar{\mathfrak{H}}_k^2(\lambda_k)$, ferner sei: $\mathfrak{i}_{ks}^1(\lambda_k) = \mathfrak{i}_s^1 . \mathfrak{i}_k^1(\lambda_k)$, $\mathfrak{G}_{ks}^2 = S\mathfrak{i}_{ks}^1(\lambda_k)$, $\mathfrak{F}^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{n} \mathfrak{G}_{ks}^2$.

$\mathfrak{F}^2$ *ist eine Maximumfläche von* $\mathfrak{M}^4$.

In jedem Punkte (t_1, t_2) von $\mathfrak{G}_{ks}^2$ gilt: $t_1 = h_k(t_2, \lambda_k) = h_s(t_2, \lambda_s)$; durch Wegnahme derjenigen Punkte von $\mathfrak{G}_{ks}^2$, wo außerdem

$$\frac{d}{dt_2}[h_k(t_2, \lambda_k) - h_s(t_2, \lambda_s)] = 0$$

ist, gelangen wir zu $\mathfrak{G}_{ks}^{+2}$. Die Fläche $\mathfrak{G}_{ks}^{+2}$ läßt sich durch abzählbar viele Flächenstücke $\mathfrak{R}_m^2$ überdecken, wobei in $\mathfrak{R}_m^2$: $t_p = \varphi_p(\lambda_k, \lambda_s)$, $p = 1, 2$ gilt, und die φ_p in dem $\mathfrak{R}_m^2$ entsprechenden Urgebiete $\mathfrak{U}_{ks}^{(m)^2}$ der $\lambda_k \lambda_s$-Ebene eindeutige und stetige Funktionen sind. Wir setzen $\mathfrak{v}_{ks}^2 = S_m \mathfrak{U}_{ks}^{(m)^2}$.

Unter gewissen natürlichen Voraussetzungen [3]) über $\mathfrak{M}^4$ gilt für jede in $\mathfrak{M}^4$ reguläre Funktion $f(t_1, t_2)$ d. 2. k. V. t_1, t_2 in $\mathfrak{M}^4$ die „verallgemeinerte

1) Auszug aus dem am 29. März 33 in der 291. Sitzung gehaltenen Vortrag.

2) S = Vereinigungsmenge. Wenn kein anderer Hinweis beigefügt ist, soll die Summation von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 2\pi$ erstreckt werden.

3) Ein Spezialfall der Gebiete $\mathfrak{M}^4$ wurde in der Arbeit: „Zur Veranschaulichung der Kreiskörper ....“, Jahresber. D. M. V. **42** (1933) S. 238, § IV, geschildert, wo einige dieser Voraussetzungen zu finden sind. Damit die B_{ks} in $|t_2| \leqq 1$ regulär sind, muß die Regularität der $h_k(t_2, \lambda_k)$ im ganzen E.-K. vorausgesetzt werden. In der Voraussetzung 1, S. 251 muß am Schluß der Zeile 7: „(außer $\lambda = 0$ und $\lambda = 2\pi$)“ hinzugefügt werden.

Vgl. dazu auch Math. Ann. **102** (1929) S. 442—446.

Digitized by Google

Cauchysche Integralformel“:

$$-4\pi^2 f(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{n} \iint_{\mathfrak{v}_{k0}^2} \frac{f(\varphi_1, \varphi_2) \dfrac{\partial h_k(\varphi_2, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} d\lambda_k d\lambda_0}{[h_k(t_2, \lambda_k) - t_1][e^{i\lambda_0} - t_2]} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \iint_{\mathfrak{v}_{ks}^2} \frac{f(\varphi_1, \varphi_2) B_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s) d\lambda_k d\lambda_s}{[h_k(t_2, \lambda_k) - t_1][h_s(t_2, \lambda_s) - t_1]},$$

wo

$$B_{ks} \equiv \frac{Z_{ks}}{\varphi_2 - t_2},$$

$$Z_{ks} \equiv Z_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s) \equiv h_s(t_2, \lambda_s) \frac{\partial h_k(\varphi_2, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} \frac{d\varphi_2}{d\lambda_s} + h_k(t_2, \lambda_k) \frac{\partial h_s(\varphi_2, \lambda_s)}{\partial \lambda_s} \frac{d\varphi_2}{d\lambda_k}$$

bedeutet[4]). B_{ks} ist in $|t_2| \leqq 1$ regulär, da $Z_{ks}(\varphi_2, \lambda_k, \lambda_s) = 0$ ist.

Diese Integraldarstellung von f gestattet nach einem einfachen Verfahren ein für $\mathfrak{M}^4$ vollständiges System von Orthogonalfunktionen effektiv zu konstruieren, nämlich indem man die Funktionen

$$\frac{t_2^{\nu}}{\left\{[h_k(t_2, \lambda_k^{(\mu)}) - t_1][h_s(t_2, \lambda_s^{(\tau)}) - t_1]\right\}^{1 - \frac{1}{\varrho}}},$$

$k, s = 1, \ldots n,\ s \neq k;\ \nu, \mu, \tau, \varrho = 1, 2, 3, 4, \ldots$ orthogonalisiert.

4) Diese Integralformel gewinnt man leicht aus der Formel (15) der in der Fußnote 3) zitierten Arbeit unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{dh_k(t_2, \lambda_k)}{d\lambda_k} = \frac{\partial h_k(\varphi_2, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} \text{ und auf } i_{ks}^1(\lambda_k) \text{ gilt: } dt_2 = \frac{d\varphi_2}{d\lambda_s} d\lambda_s.$$

Digitized by Google

Mitglieder-Verzeichnis. Jahrgang XXXII.

A. Persönliche Mitglieder.

Die mit einem Stern versehenen Mitglieder haben sich durch einmalige Zahlung nach § 4 der Satzung abgelöst.

Ackermann-Teubner, Hofrat Dr. Dr.-Ing. E. h. A., Domherr, Leipzig, Poststr. 3.
Apt, Studienrat Dr. Fr., Berlin NW. 87, Tile-Wardenbergstr. 3/4.
Aschert, Bankdirektor a. D. H., Berlin W., Derfflinger Str. 3.
Baldus, Prof. Dr. R., München 27, Röntgenstr. 7.
Barneck, Privatdozent Dr. A., Berlin-Zehlendorf, Treibjagdweg 41.
Beck, Prof. Dr. H., Bonn, Lennéstr. 36.
Becker, Studienassessor W., Berlin-Neukölln, Fuldastr. 23 a.
Bergmann, Dipl.-Ing., Privatdozent Dr. Stefan, Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.
Bernays, Prof. Dr. P., Göttingen, Kirchweg 6 I.
Bernstein, Prof. Dr. F., Göttingen, Lotzestr. 33.
Bieberbach, Prof. Dr. L., Berlin-Dahlem, Gelfertstr. 16.
Birkhoff, Prof. Dr. G. D., 984 Memorial Drive, Cambridge, Mass. (U.S.A.).
Blaschke, Studienrat G., Berlin-Friedenau, Büsingstr. 17.
Blaschke, Prof. Dr. W., Hamburg 37, Brahmsallee 76.
Blumenthal, Prof. Dr. O., Aachen, Rütscherstr. 38.
Bochner, Dr. S., München, Möhlstr. 12.
Böhler, Landmesser H., Berlin-Steglitz, Schloßstr. 49.
Böhmer, Prof. Dr. P. E., Dresden-A., Wallotstr. 22 II.
Boelk, Studienrat Dr. P., Berlin-Charlottenburg, Wallstr. 54.
Bollé, Dr. E., Berlin-Charlottenburg 2, Fraunhoferstr. 17.
Bornitz, Studienrat F., Berlin-Halensee, Schweidnitzer Str. 5.
Boß, Studienrätin A., Berlin-Hohenschönhausen, Goeckestr. 12 p.
Brauer, Privatdozent Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 57.
Brelot, Dr., M. Cepoy Loirets, Frankreich.
v. Brill, Prof. Dr. A., Tübingen, Eugenstr. 3.
Brun, Prof. V., Trondhjem (Norwegen).
Byk, Prof. Dr. A., Berlin W. 15, Pariserstr. 27.
Carathéodory, Prof. Dr. C., München, Rauchstr. 8.
Cauer, Privatdozent Dr.-Ing. W., Göttingen, Friedländerweg 35.
Cohn-Vossen, Dr. Stephan, Köln, Universität, mathem. Seminar.
Cranz, GRR. Prof. Dr. C., Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 32 a.
Cremer, Privatdozent Dr. H., Köln, Eifelstr. 19 II bei Klein.
Degosang, Studienrat, Berlin-Karlshorst, Königswinterstr. 20.
Denizot, Prof. Dr. A., Posen, Physikalisches Institut der Universität.
Dingeldey, Prof. Dr. F., Darmstadt, Hoffmannstr. 41.
Dörge, Privatdozent Dr. K., Köln, Aduchtstr. 9.
Duarte, Prof. F. J., Genf (Schweiz), 5, rue Henri-Mussard.
Dubislav, Prof. Dr. W., Berlin-Friedenau, Bennigsenstr. 6. Port. 2.
Duffing, Oberingenieur G., Berlin-Niederschönhausen, Altenbergstr. 9 a.
Dumas, Prof. Dr. G., Béthusy-Lausanne, Cabrières Av. Mt Charmant (Schweiz).
Ebeling, Direktor Dr. phil. Dr.-Ing. E. h. A., Berlin-Charlottenburg 9, Schwarzburg-Allee 14.
Ehrlich, Studienrat L., Berlin NO. 55, Marienburger Str. 36.
Emde, Prof. Dr.-Ing. E. h. F., Stuttgart, Seestr. 114.
Engel, Prof. Dr. Dr. h. c. F., Gießen, Ludwigsplatz 9.

Digitized by Google

Epstein, Prof. Dr. P., Frankfurt a. M., Eschersheim, Körberstr. 16.
Fejér, Prof. Dr. L., Budapest I, (Ungarn), Kristztina-körut 165.
Feigl, Prof. Dr. G., Berlin-Lankwitz, Kaiser Wilhelmstr. 139.
Finsler, Prof. Dr. P., Zürich (Schweiz), Schmelzbergstr. 27.
Fischer, Studienrat P. B., Berlin-Lichterfelde-W., Drakestr. 36 I.
Fladt, Studienrat Dr. K., Vaihingen a. F. bei Stuttgart, Christofstr. 18.
Fleck, San.-Rat Dr. A., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 22.
Föttinger, Prof. Dr.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg, Techn. Hochschule EB 205, Berliner Str. 171.
Fraenkel, Prof. Dr. A., Amsterdam, Sarphatistr. 26.
*Franck, Dr. P., Hamburg, Wolfshagen 18 I.
Fuchs, Prof. Dr. R., Berlin-Halensee, Ringbahnstr. 7.
Fujiwara, Prof. M., Universität Sendai (Japan).
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Wien XVIII, Messerschmidtgasse 45.
Galle, GRR. Prof. Dr. A., Potsdam, Neue Königstr. 103.
Geilen, Studienrat V., Marienburg, Langgasse 6.
Germanski, Dr. B., Berlin NW. 87, Flensburgerstr. 10, bei Ludwig.
Grammel, Prof. Dr. phil. Dr. techn. h. c. R., Stuttgart, Bobserwaldstr. 16.
Graf, Dr.-Ing., Dipl.-Ing., Berlin-Steglitz, Schloßstr. 16.
Grunsky, Dr., Berlin-Schlachtensee, Mariannenstr. 2 III.
Gruschke, Oberingenieur Dr. G., Berlin-Wilmersdorf, Hildegardstr. 24.
Grüß, Privatdozent Dr.-Ing. G., Berlin-Charlottenburg 9, Westendallee 75.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Berlin-Tempelhof, Sachsenring 22.
Haenzel, Prof. Dr.-Ing. G., Karlsruhe (Baden), Kaiserallee 99.
Hamburger, Prof. Dr. H., Köln a. Rh., Alter Burgen-Wall 18.
Hamel, Prof. Dr. G., Berlin W. 30, Eisenacherstr. 35.
Hammerstein, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 9.
*Haniel, Maler F., Düsseldorf, Goldsteinstr. 27.
Happel, Prof. Dr. H., Breslau XVI, (Zimbel), Friedrich Ebertstr. 37.
Hausdorff, Prof. Dr. F., Bonn a. Rh., Hindenburgstr. 61.
Haußner, GHR. Prof. Dr., Jena, Stoystr. 1.
Heegaard, Prof. Dr. P., Lilleaker, box 105, Norwegen.
Heegner, Dr. K., Berlin-Steglitz, Elisenstr. 7 (Landhaus).
Hellinger, Prof. Dr. E., Frankfurt a. M., Marbachweg 339.
Hensel, GRR. Prof. Dr. K., Marburg (Lahn), Breiter Weg 7.
Hertwig, GRR. Prof. Dr.-Ing. E. h., Berlin-Charlottenburg 2, Kurfürstenallee, Baracke 15.
Herzberger, Dr. M., Jena, Blumenstr. 5.
Hinrichs, Dr., Berlin-Schöneberg, Wexstr. 61 I, bei Tuscher.
Hirsch, Dr. K., Berlin-Wilmersdorf, Bingerstr. 7 pt.
Hoecken, Oberingenieur K., Berlin-Friedenau, Wielandstr. 19 III.
Hoheisel, Prof. Dr. G., Breslau 1, Kaiserstr. 26.
Hoff, Prof. Dr.-Ing., Berlin-Johannisthal, Sternplatz 9.
Hoffmann, Oberstudiendirektor Prof. Dr. C., Ravensburg (Württ.), Schützenstr. 19.
Holtze, Studienrat i. R. Dipl.-Ing. H., Naumburg/Saale, Jägerplatz 16.
Holzer, Dr. L., Assistent a. d. Technischen Hochschule in Graz.
Hopf, Prof. Dr. E., Cambridge, Mass. U. S. A., Institute of Technology.
Hopf, Prof. Dr. H., Zürich (Schweiz), Schlössli-Gasse 2.
Hurwitz, Frl. Dr. Lotte, Studienrat, Berlin-Wilmersdorf, Sigmaringerstr. 23.
v. Ignatowsky, Dr. W., Leningrad, Nabereschnaja 9—oe, Janwarja No. 32. Wohnung 8.
Jacobsthal, Prof. Dr. E., Berlin-Zehlendorf, Am Fischtal 2 a.
Jacobsthal, Oberstudiendirektor Dr. W., Berlin-Wilmersdorf, Hindenburgstr. 36.
Jaenichen, Studienrat Dr. W., Berlin-Zehlendorf-West, Niklasstr. 33.
Jochmann, Studienrat, Berlin-Lichterfelde, Hindenburgdamm 95 a.
Jolles, GRR. Prof. Dr. St., Berlin-Halensee, Kurfürstendamm 130.
Jonas, Studienrat Dr. H. J., Berlin-Steglitz, Klingsorstr. 3.
Kahlau, Studienreferendar R., Berlin-Baumschulenweg, Scheiblerstr. 28.
v. Kármán, Dr. Th. ordentl. Professor an der Techn. Hochschule Aachen.

Digitized by Google

Keller, Privatdozent Dr. Ott-Heinrich, Mathematisches Seminar an der Techn. Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Knopp, Prof. Dr. K., Tübingen, Neckarhalde 56.
Koebe, Prof. Dr. P., Leipzig, Fockestr. 9.
Koebke, Oberingenieur Dr. E., Berlin-Charlottenburg 5, Lietzensee-Ufer 1.
Köhler, Studienrat O., Berlin-Tempelhof, Hohenzollernkorso 34 g.
Kopff, Prof. Dr. A., Berlin-Dahlem, Altensteinstr. 40.
Korn, Prof. Dr. A., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 25.
*Koschmieder, Prof. Dr. L., Brünn C. S. R., Landwirtschaftsgasse 36.
Krafft, Prof. Dr. M., Marburg/Lahn, Savignystr. 7.
Kramer, Studiendirektor Dr., Alt-Döbern N.-L., Staatl. Aufbauschule.
v. Krbek, Dr. F., Bonn a. Rh., Universitätssternwarte.
Kreuter, Oberregierungsrat G., Berlin-Friedenau, Odenwaldstr. 26.
Kubota, Prof. T., Sendai (Japan). College of Science Imp. Univ.
v. Kuhl, Fräulein Dr. H., Studienassessorin, Berlin-Steglitz, Breitestr. 36.
Kullrich, Oberstudiendirektor i. R. Dr. E., Berlin-Tempelhof, Gäßnerweg 37.
Küpfmüller, Prof. K., Danzig-Langfuhr, Pommersche Chaussee 2.
Landau, Prof. Dr. E., Göttingen, Herzberger Landstr. 48.
Lasker, Dr. E., Berlin-Wilmersdorf, Aschaffenburgerstr. 6 a.
v. Laue, Prof. Dr., Berlin-Zehlendorf, Albertinenstr. 17.
Lechner, Dr. G., Berlin-Eichkamp, Königsweg 114.
Lemke, Studienrat Dr. H., Berlin-Wilmersdorf, Wegenerstr. 10/11.
Levi-Civita, Prof. Dr. T., Rom 25 (Italien), Via Sardegna 50.
Levin, Dr.-Ing., Dipl.-Ing. V., Berlin-Neukölln, Thüringer Str. 1.
Lietzmann, Oberstudiendirektor Dr. W., Göttingen, Calsowstr. 18.
Löwner, Prof. Dr. K., Prag X, Palackéhot. 68.
Loewy, Prof. Dr. A., Freiburg i. B., Reichsgrafenstr. 14.
Lorenz, Privatdozent Dr. P., Berlin-Charlottenburg, Kantstr. 71.
Lorey, Prof. Dr. W., Oberstudiendirektor der öff. Handelslehranstalt u. Dozent am Inst. f. Versicherungswissenschaft d. Universität Leipzig, Fockestr. 7.
Loria, Prof. Dr. G., Genua (Italien), Piazza Manin 41.
Ludwig, Prof. Dr. W., Dresden-A., Zeschaustr. 8.
Mann, Prof. Dr.-Ing. L., Breslau, Hobrechtufer 15.
Martens, Prof. Dr. F. F., Berlin NW. 87, Levetzowstr. 16 a.
Matthée, Direktor der staatlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht, Berlin NW. 40, Invalidenstr. 57—62.
Mayer-Alberti, Frau Dipl.-Ing. Edith, Koblenz, Bismarckstr. 29.
*Meder, Prof. A., Riga, Schulenstr. 19 W. 3.
Mehmke, Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. R., Degerloch-Stuttgart, Löwenstr. 102.
Meier, Zivilingenieur E., Taubenmühle bei Leichholz (Neumark).
Metzner, Ministerialrat Prof. Dr., Berlin-Friedenau, Fregestr. 65/66.
Meyer, GRR. Prof. Dr. F., Königsberg (Pr.), Villenkolonie Maraunenhof, Hoverbeckstr. 13.
Meyer-Wülfing, Dr. phil., Berlin-Schöneberg, Nymphenburgerstr. 10.
Moeske, Studienrat P., Berlin-Pankow, Hartwigstr. 29.
Mühlendyck, Dr. O., Berlin-Wilmersdorf, Gieselerstr. 26, Port. 2.
Müller, Prof. Dr. Conrad H., Hannover, Brahmsstr. 4.
Müller, K., Berlin-Lichterfelde, Arndtstr. 6 a.
Müntz, Prof. Dr. Ch., Leningrad, Krassnyeh Zorj 73 qn. 47.
Munzer, Fräulein Studienrätin Edith, Berlin-Wilmersdorf, Weimarische Str. 27 III.
Nachtsheim, Studienrat A., Berlin-Wilmersdorf, Mannheimerstr. 9 a.
Nakajima, S., Taihoku Imperial University, Taiwan (Japan).
Nakamura, K., Math. Seminar der Tokyo Bunrika Daigaku, Tokyo, University of Lit. and Science.
Neiß, Privatdozent Dr. F., Berlin-Charlottenburg 5, Friedrich Karlplatz 16.
Neugebauer, Patentingenieur H., Berlin-Lichterfelde-Ost, Luisenstr. 12.
Neumann, Dr. B., Berlin-Charlottenburg 9, Lindenallee 26.
v. Neumann, Prof. Dr. Joh., Princeton, U. S. A. University.
Obrechkoff, Prof. Dr. N., ord. Prof. a. d. Univ. Sofia, S. Stefanosstr. 4.
Oseen, Prof. C. W., Upsala (Schweden), Kungsgatan 37.
*Ostrowski, Prof. Dr. A., Basel (Schweiz), Arlesheimer Str. 7 I.

Digitized by Google

Pannwitz, Fräulein Dr. E., Berlin-Wilmersdorf, Prinzregentenstr. 91.
Papperitz, GRR. Prof. Dr. E., Freiberg i. S., Leipzigerstr. 8.
du Pasquier, Prof. Dr., Universität Neuchâtel, Schweiz.
Peters, Prof. Dr., Berlin-Lichterfelde, Weddigenweg 25.
*Peters, Studienrat J., Köln-Nippes, Niehler Kirchweg 147.
Pfeiffer, Prof. Dr. F., Stuttgart, Pflaumstr. 84.
Pfeiffer, Prof. Dr. G. W., Kiew (Ukraine), Leninstr. 59/5.
Piefke, Studienrat Walter, Berlin-Charlottenburg 9, Reichsstr. 78.
Pinl, Dr. M., Berlin W. 30, Heilbronner Str. 19 I.
Pollaczek, Dr. F., Paris, rue du Louvre, poste restante centrale.
Pollaczek, Frau Dr. H., Berlin NW. 87, Lessingstr. 36.
Prandtl, Prof. Dr., Göttingen, Calsowstr. 15.
Prange, Prof. Dr. G., Hannover, Alleestr. 15.
Prüfer, Prof. Dr. H., Münster, Marientalstr. 36.
Rademacher, Prof. Dr. H., Breslau, Tiergartenstr. 123.
Rado, Dr. R.
Rehbock, Dr. F., Bonn, Gneisenaustr. 10.
Reissner, Prof. Dr.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg, Grolmanstr. 4—5.
Remak, Privatdozent Dr. R., Berlin-Lichterfelde-West, Manteuffelstr. 23 I.
Rembs, Studienrat Dr. E., Berlin-Friedenau, Begasstr. 5 I.
Respondek, Patentanwalt Dr. G., Berlin-Zehlendorf-West, Goethestr. 48.
Rey-Pastor, Prof. Dr. J., Seminaro matematico de la Universidat, Buenos Aires-Péru 294.
Ribeiro, Luiz F., Pernambuco (Brasilien) Rua Augusta 456.
Riesz, Prof. Dr. F., Szeged (Ungarn), Dugonics-tér 13.
Riesz, Prof. Dr. M., Lund (Schweden), Universität.
Rohrbach, H., Berlin-Johannisthal, Nieberstr. 4.
Rosenthal, Prof. Dr. A., Heidelberg, Blumenthalstr. 7.
Roßbach, Dipl.-Ing. H., Berlin-Charlottenburg 1, Cauerstr. 33 III.
Rothe, Frau Dr. H., Breslau 16, Sternstr. 128.
Rothe, Prof. Dr. R., Berlin-Lichterfelde, Esmarchstr. 27.
Rühle, Studienreferendar A., Adresse unbekannt.
Ruhm, Prof. G., Bonn, Blücherstr. 26.
Sadowski, Privatdozent Dr.-Ing. M., 703 Delaware St. S. E. Minneapolis, Minn. U.S.A.
Salkowski, Prof. Dr. E., Neubabelsberg bei Berlin, Odinstr. 6.
Schauffler, R., Regierungsrat, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter im auswärtigen Amt, Berlin-Wilmersdorf, Wiesbadener Str. 58 e.
Scheffers, GRR. Prof. Dr. Dr. h. c. G., Berlin-Dahlem, Willdenowstr. 40.
Schings, Studienrat A., Solingen (Rhld.), Schlickerweg 8.
Schleusner, Dipl.-Ing. A., Berlin-Charlottenburg, Suarezstr. 54.
Schmidt, Prof. Dr. Erhard, Berlin NW., Altonaerstr. 30.
Schnee, Prof. Dr. W., Leipzig, Universität.
Schneider, Studienrat Dr. E., Berlin-Steglitz, Mariendorfer Str. 24.
Schneider, Reichstagsstenograph R., Berlin-Steglitz, Rückertstr. 4.
Schnirelmann, Prof. Dr. L., Moskau, Ostozenka, 2 Satschatjersky per, No. 2 Wohnung No. 29.
Schotte, Studienrat Dr. V., Berlin W. 57, Elsholzstr. 3.
Schottky, Geheimrat Prof. Dr. F., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 12 a.
Schrutka, Edler von Rechtenstamm, Prof. Dr. L., Wien, Onno Kloppstr. 8.
Schülke, Oberstudiendirektor i. R. A., Berlin NW 87, Tile Wardenbergstr. 18.
Schur, Prof. Dr. I., Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.
Shoda, K., Tokio-Koishikawa, Haramachi 126 (Japan).
Singer, Dr. O., Berlin NW. 87, Klopstockstr. 48 I.
Slaby, Dipl.-Ing. R., Berlin-Charlottenburg, Sophienstr. 33.
Sommer, Prof. Dr. J., Danzig-Langfuhr, Johannistal 2.
Specht, Dr. W., Berlin-Halensee, Joachim-Friedrich Str. 19 III.
Sperling, Fräulein K., Berlin-Schöneberg, Sedanstr. 5.
Spielrein, Prof. Dipl.-Ing. J., Moskau, Taganka, Nischnaja Raditschewa 10.
Stein, Dr. Joh., Altona a. E., Lessingstr. 30 p.
Steinbacher, Studienrat Dr. F., Berlin-Friedrichshagen, Waldowstr. 19.

Digitized by Google

Strelitz, Fräulein P., Berlin-Lichterfelde, Steglitzerstr. 50.
Süß, Prof. Dr. W., Greifswald, Karlsplatz 3.
Szász, Prof. Dr. O., Cambridge, Mass. U. S. A., Institute of Technology.
Szegö, Prof. Dr. G., Königsberg (Pr.), Cäcilienallee 9.
Tauber, Prof. Dr. A., Wien IV, Karlsgasse 18.
Thürmel, Oberingenieur Direktor Dr. E., Siemens u. Halske, A.-G., Wernerwerk, Berln-Siemensstadt.
220 Timerding, Prof. Dr. H. E., Braunschweig, Kasernenstr. 23.
Timpe, Prof. Dr. A., Berlin-Schlachtensee, Dianastr. 21.
*Tietze, Prof. Dr. H., München, Universität.
Toeplitz, Prof. Dr. O., Bonn, Wittelsbacherring 1.
Trefftz, Prof. Dr. E., Dresden, Kulmstr. 1.
Tropfke, Oberstudiendirektor GStR. Dr. J., Berlin NW. 7, Marienstr. 14.
Tschakaloff, Prof. L., Sofia (Bulgarien), Boulevard Skobeleff 13.
Unger, Dr. W., Berlin W., Friedrich Wilhelmstr. 26.
*Volterra, Prof. Dr. Vito, Senatore del Regno, Rom (Italien), Via in Lucina 17.
Wagner, Präsident a. D. Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. K. W., Berlin NW. 87, Franklinstr. 1.
230 Walther, Prof. Dr. A., Darmstadt, Mathem. Institut der Techn. Hochschule.
Wehage, Fräulein Dr.-Ing. Dora, Berlin-Steglitz, Lauenburger Str. 14.
Weinstein, Dr. A., Genf-Cologny (Schweiz), Cer. de Ruth.
Weiß, Prof. Dr. E. A., Bonn a. Rh., Endenicher Allee 20.
Weiß, Studienrat H., Berlin-Lichterfelde, Rankestr. 70.
Willers, Prof. Dr. Fr., Freiburg (Sa.), Goethestr. 2.
Winkelmann, Prof. Dr. M., Jena, Bismarckstr. 17.
Witt, Prof. Dr. G., Berlin NW. 21, Crefelderstr. 18.
Wolff, RR. Dr. Hans, Neubabelsberg, Luisenstr. 10.
Wolff, Dr. Th., Schriftsteller, Berlin-Friedenau, Kaiser-Allee 79.
240 Zacharias, Studienrat Dr. M., Berlin NW. 52, Melanchthonstr. 27.
Zarankiewicz, Dr. K., Warschau, ul. Nowowrejska 27.
242 Zühlke, Oberschulrat Prof. Dr. P., Cassel-Kirchditmold, Geröderweg 25.

Digitized by Google

B. Korporative Mitglieder.

Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft, Direktion, Berlin NW. 87. Huttenstr. 12—16.
Felten & Guilleaume Carlswerk A.-G., Köln-Mülheim.
Gesellschaft für drahtlose Telegraphie (Telefunken), Berlin SW. 11, Hallesches Ufer 10/12.
Siemens & Halske A.-G., Wernerwerk, Berlin-Siemensstadt.
Siemens-Schuckertwerke A.-G. Berlin-Siemensstadt.
Carl Zeiss, Jena.
Elektrotechnischer Verein, E. V., Berlin-Charlottenburg 4, Bismarckstr. 33.
Mathematisches Seminar der Universität Berlin.
Institut für angewandte Mathematik an der Techn. Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg.
Institut für Technische Hydro- und Aerodynamik, sowie Strömungsmaschinen, Berlin-Charlottenburg, Techn. Hochschule EB 205.
Mathematisches Seminar der Universität Bonn.
Mathematisches Seminar der Universität Breslau, Breslau 16, Technische Hochschule.
Mathematisches Seminar am Friedrichs-Polytechnikum, Cöthen (Anhalt).
Mathematisches Institut der Universität Göttingen.
Mathematisches Institut der Universität Jena.
Mathematisches Institut der Universität Leipzig, Talstr. 35.
Mathematisches Seminar der Universität Münster.
Mathematisches Seminar der Techn. Hochschule Dresden.
Mathematisches Seminar der Universität Marburg, Marburg/Lahn.
Bayerische Staatsbibliothek, München, Ludwigstr. 23.
Hauptbücherei der Technischen Hochschule, Stuttgart.
Bibliothek der Techn. Hochschule zu Berlin, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstr. 171.
Bibliothek der Sächsischen Technischen Hochschule, Dresden-A. 24. Bismarckplatz 18 II.
Bibliothek der Techn. Hochschule Fridericiana, Karlsruhe.
Universitätsbibliothek Tübingen, Tübingen.
Hochschulbibliothek Darmstadt.
Staats- und Universitätsbibliothek zu Hamburg, Hamburg 1, Speersort.
Universitätsbibliothek in München, München, Ludwigstr. 17 II.
Universitätsbibliothek in Basel.
Universitätsbibliothek in Erlangen.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXXIII. JAHRGANG

1. STÜCK

INHALT:

	Seite
Nachruf auf Hermann Zeitz. Von **A. Brauer**	2—6
Über eine Transformation orientierter Strahlen. Von **O. Mühlendyck** .	7—14
Zur Theorie der linearen Abbildungen. Von **E. Jacobsthal**	15—34
295. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 25. Oktober 1933	1
296. „ am 29. November 1933	1

1934

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

Mitteilungen.

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Oberinspektor M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 12 a).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse und nicht an die Adresse des Schriftführers zu senden.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

295. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 25. Oktober 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 27 Mitglieder und Gäste.

Zu Beginn der Sitzung gedenkt der Vorsitzende der seit dem Juni verstorbenen Mitglieder der Gesellschaft, zu deren Ehren sich die Anwesenden von ihren Plätzen erheben. Sodann ergreift Herr A. Brauer das Wort zu einem Nachruf auf Hermann Zeitz. Hierauf beginnt der geschäftliche Teil:

Der Bericht des Kassenwartes und der Kassenprüfer wird entgegen genommen und dem Kassenwart Entlastung erteilt; sodann werden die alten Kassenprüfer durch Zuruf wiedergewählt.

In die Redaktionskommission werden für die ausscheidenden Herren Hamel und Toeplitz neu hineingewählt die Herren Feigl und Erhard Schmidt.

Wissenschaftlicher Teil:

Herr O. Mühlendyck: Über eine Transformation orientierter Strahlen.

296. Sitzung am 29. November 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Reinhardt: Dichteste gitterförmige Lagerung in der Ebene.

Namens der Redaktionskommission legt der Vorsitzende eine Note von E. Jacobsthal vor: Zur Theorie der linearen Abbildungen.

Digitized by Google

Nachruf auf Hermann Zeitz.

Von Alfred Brauer in Berlin[1]).

In Hermann Zeitz verliert die Berliner Mathematische Gesellschaft ein Mitglied, das erst in hohem Lebensalter in den Kreisen der Mathematiker bekannt geworden ist. Nicht durch seinen Beruf, sondern nur durch seine Liebe zur Mathematik wurde er zu uns geführt. Aber gerade aus diesem Grunde und wegen seines wohl einzigartigen mathematischen Werdeganges fühlen wir uns verpflichtet, hier seiner zu gedenken.

Bei der raschen Entwicklung unserer Wissenschaft in den letzten Jahrzehnten ist es zur Selbstverständlichkeit geworden, daß nur ein geringer Prozentsatz von den vielen, die auf deutschen Universitäten und Hochschulen ein mathematisches Studium beenden, produktiv an der Weiterentwicklung der mathematischen Wissenschaft mitarbeitet. Und es ist sehr selten, daß dies jemandem gelingt, der keine abgeschlossene Hochschulbildung besitzt. Hermann Zeitz aber hatte nicht nur nie eine mathematische Vorlesung gehört, sondern auch niemals mathematischen Schulunterricht genossen, und trotzdem ist es ihm gelungen, bis zur hohen Stufe eigener wissenschaftlicher Arbeit emporzusteigen. In dieser Hinsicht stand er wohl einzigartig unter den heutigen deutschen Mathematikern da.

Hermann Zeitz wurde am 18. Dezember 1870 zu Friedrichsthal in der Lausitz als Sohn eines Glasbläsers geboren. Seine einzige Schulbildung verdankte er der Volksschule zu Radeberg bei Dresden. Nach beendeter Schulzeit wurde er kaufmännischer Lehrling in einer Glasfabrik und arbeitete später in einer Theateragentur als kaufmännischer Angestellter. Dann kam er als Stenotypist zum Schaffhausenschen Bankverein, wo er sich — von Stufe zu Stufe emporsteigend — bis zum stellvertretenden Direktor hinaufarbeitete. In dieser Stellung blieb er auch bei der Übernahme der Firma durch die Diskontogesellschaft und rückte hier bald zum Direktor auf. Bei der Diskontogesellschaft blieb er bis zu seiner Ende 1931 erfolgten Pensionierung.

Dieser für deutsche Verhältnisse sehr seltene äußere Werdegang könnte vermuten lassen, daß Zeitz sich nur wenig mit wissenschaftlichen Studien abgegeben hat, zumal ihm seine Berufstätigkeit und sein glückliches Familienleben nur wenig freie Zeit ließen. Aber im Gegenteil: schon frühzeitig wandte er sich der Beschäftigung mit fremden Sprachen zu und beherrschte bald fließend Englisch, Französisch, Spanisch und Italienisch.

1) Vorgetragen in der 295. Sitzung am 25. Oktober 1933.

Digitized by Google

Man könnte vielleicht sagen, daß Sprachkenntnisse für seinen Beruf wünschenswert waren, aber es ist bezeichnend für Zeitz, daß er sich mit der gleichen Begeisterung der reinen Wissenschaft zuwandte. Hier war es zuerst die Astronomie, die ihn fesselte. Dabei begnügte er sich nicht mit dem Studium astronomischer Werke, sondern ließ sich eine eigene kleine Sternwarte bauen, um selbst Beobachtungen machen zu können. Durch die Astronomie wurde er zur Mathematik geführt. In kurzer Zeit eignete er sich die Grundbegriffe an. Als er hierbei auch zahlentheoretische Fragen kennenlernte, begeisterte ihn diese Disziplin derart, daß er darüber sehr bald die Astronomie und die übrigen Teile der Mathematik vernachlässigte und sich mit ganzer Kraft auf das Studium zahlentheoretischer Werke warf. Die Schriften und Bücher von Euler, Legendre, Tschebyscheff, Wertheim und Dirichlet studierte er mit größtem Eifer und glühendstem Interesse. Gewiß wurde ihm bei seiner Vorbildung das Studium nicht immer leicht. Oft brauchte er viele Stunden zum Verständnis einer einzigen Seite. An zahlreichen Beispielen machte er sich dann erst den Inhalt der Sätze klar, bis es ihm gelang, ihre Bedeutung und ihre Beweise völlig zu verstehen. Jede freie Minute nutzte er dafür aus. So pflegte er selbst die Mittagspausen während seiner Banktätigkeit zu benutzen, um im Café mathematisch zu arbeiten. Immer aber war er sich darüber klar, daß ihm vieles, was auch auf den Schulen gelehrt wird, verschlossen bleiben würde. So ist er z. B. in die Grundbegriffe der Analysis nie eingedrungen. Aber auch in der Zahlentheorie wußte er sich weise zu beschränken und beschäftigte sich im Gegensatz zu vielen anderen Laien nicht mit Problemen, denen er sich nicht gewachsen fühlte.

Ohne jede Anleitung hat Zeitz seine Studien betrieben. Er wandte sich zwar 1912 einmal an H. A. Schwarz mit einer mathematischen Frage. Da er aber kein Entgegenkommen fand, wagte er es in seiner Bescheidenheit jahrelang nicht, mit Fachmathematikern in Fühlung zu treten. Erst 1927 kam es wieder dazu. Er hatte eine Lösung einer zahlentheoretischen Aufgabe der Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht eingesandt, die ihm jedoch als falsch zurückgegeben wurde. Da Zeitz aber von der Richtigkeit seiner Lösung fest überzeugt war, wandte er sich an I. Schur mit der Bitte, ihm jemanden zu nennen, der die Lösung prüfen könne. Auf diese Weise lernte ich Zeitz kennen. Wie ich feststellen konnte, war seine Lösung der Aufgabe vollkommen richtig. Überhaupt habe ich im Laufe der Jahre, in denen ich so manche kleine Untersuchung von ihm durchgesehen habe, niemals einen Fehler gefunden. Wer öfters Gelegenheit hat, Arbeiten von Laien zu prüfen, weiß was das bedeutet.

In einer dieser Untersuchungen fand sich als Hilfssatz folgende Frage: Es seien a und b teilerfremde ganze Zahlen, und es sei $0 < |a| < |b|$;

Digitized by Google

dann hat die diophantische Gleichung

$$ax + by = z$$

mindestens eine und höchstens zwei Lösungen in ganzen Zahlen, für die

$$|x| < \sqrt{|b|}, \quad |y| < \sqrt{|b|}, \quad 0 < |z| < \sqrt{|b|}$$

und x und y teilerfremd sind.

Mir schien diese Frage nicht ohne Interesse zu sein, und so schlug ich Zeitz vor, den Satz als Aufgabe im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu veröffentlichen. Sie erschien im Band 38 (1929). Zu dieser ersten Veröffentlichung, wie auch zu seinen späteren Publikationen, war er nur sehr schwer zu bewegen. Er fürchtete die Kritik der Fachmathematiker. Wie unberechtigt diese Scheu war, zeigt wohl am besten die Tatsache, daß noch 1933 — nachdem bereits früher eine Lösung veröffentlicht war — eine Lösung von Tschebotareff abgedruckt wurde.

Beim Studium der Zahlentheorie von Legendre wurde er auch auf den Satz von der arithmetischen Progression geführt. Lange Zeit mühte er sich ab, die Richtigkeit des Beweises von Legendre zu verstehen. Legendre benutzt bei seinem Beweis die folgende Behauptung: Bezeichnet p_n die n-te Primzahl, so gibt es höchstens $p_{n-1} - 1$ aufeinander folgende ungerade Zahlen derart, daß alle diese Zahlen durch mindestens eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ teilbar sind. Für diese Behauptung gibt er den folgenden vermeintlichen Beweis.

Es sei x für $n \geqq 3$ eine Lösung der simultanen Kongruenzen

$$(1) \qquad \begin{cases} x \equiv 0 & (\mathrm{mod}\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p_{n-2}) \\ x \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ p_{n-1}) \\ x \equiv -1 & (\mathrm{mod}\ p_n). \end{cases}$$

Die Zahlen

$$(2) \quad x - (p_{n-1} - 2),\ x - (p_{n-1} - 4),\ \ldots,\ x - 1,\ x + 1,\ \ldots,\ x + (p_{n-1} - 2)$$

haben die Form

$$x \pm (2\alpha + 1) \qquad (2\alpha + 1 = 1, 3, \ldots, p_{n-1} - 2).$$

Ist nun für eine Primzahl q

$$2\alpha + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ q),$$

so ist wegen (1) und $q \leqq p_{n-2}$ auch

$$x \pm (2\alpha + 1) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ q).$$

Da $x - 1$ und $x + 1$ durch p_{n-1} bezw. p_n teilbar sind, bilden folglich die Zahlen (2) eine Sequenz von $p_{n-1} - 1$ ungeraden zu $\prod_{\nu=1}^{n} p$ nicht teilerfremden Zahlen.

Digitized by Google

Zeitz sah nun nicht — was Legendre als selbstverständlich annahm — daß die so konstruierte Sequenz eine solche von maximaler Länge sei. Er wußte nicht, daß dieser Legendresche Beweis schon von Dirichlet als falsch erkannt worden war. Dirichlet selbst hatte dann versucht, die Legendresche Behauptung zu beweisen, es war ihn jedoch nicht gelungen. Im Jahre 1858 stellte die Pariser Akademie die Untersuchung der Legendreschen Behauptung sogar als Preisaufgabe. Die eingegangenen fünf Arbeiten brachten keine befriedigende Lösung der Frage. Der Preisträger A. Dupré zeigte, daß die Legendresche Behauptung jedenfalls nicht allgemein gelten könne, da sie für $p_n = 23$ und $p_n = 37$ und für $43 \leqq p_n \leqq 103$ falsch sei.

Dies alles war Zeitz unbekannt. Da er nun die Richtigkeit der Legendreschen Behauptung nicht einsehen konnte, versuchte er selbst, die Frage in Angriff zu nehmen. Er entwickelte eine Methode, die es ermöglichte, die Falschheit der Legendreschen Behauptung für alle Primzahlen $p_n \geqq 43$ nachzuweisen. Er hat diese Methode in einem Privatdruck: Elementare Betrachtungen über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre (Berlin 1930), veröffentlicht. In einer gemeinsamen Arbeit haben Zeitz und ich den Beweis mit analytischen Hilfsmitteln vervollständigt und die Resultate verschärft. Diese gemeinsame Arbeit wurde vor drei Jahren hier vorgetragen und ist im 29. Jahrgang der Sitzungsberichte unserer Gesellschaft erschienen.

Die letzte veröffentlichte Arbeit von Zeitz knüpft an ein Problem an, auf das er durch die Lektüre des Buches von Rademacher und Toeplitz: Von Zahlen und Figuren, geführt wurde. In diesem Buch befindet sich ein Kapitel, in dem gezeigt wird, daß 30 die größte Zahl ist mit der Eigenschaft, daß alle kleineren, zu ihr teilerfremden Zahlen durchweg Primzahlen sind. Dieser Satz beruht auf folgender Abschätzung für die n-te Primzahl:

$$p_n < \sqrt{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}. \tag{3}$$

Mit Hilfe des Tschebyscheffschen Satzes erhält man dieses Resultat sofort. Landau hat zuerst gezeigt, daß sich diese Abschätzung auch elementar erhalten läßt. Bonse gab einen noch einfacheren Beweis und zeigte sogar, daß für hinreichend große n auch

$$p_n < \sqrt[3]{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} \quad \text{und} \quad p_n < \sqrt[4]{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}$$

gilt. Remak und ebenso Landau zeigten schließlich

$$p_n < \sqrt[r]{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} \tag{4}$$

für beliebiges r und hinreichend große n.

Ohne all diese Beweise zu kennen, gab Zeitz für die Ungleichungen

Digitized by Google

(3) und (4) neue besonders einfache Beweise, die er in der Sitzung vom 16. Dezember 1931 vortrug und die im 31. Jahrgange der Sitzungsberichte unserer Gesellschaft erschienen sind.

In den letzten Monaten vor seinem am 23. September dieses Jahres erfolgten Tode beschäftigte sich Zeitz mit der Frage des kleinsten quadratischen Nichtrestes. Ist p eine Primzahl der Form $4n+1$, so läßt sich bekanntlich sehr einfach zeigen, daß der kleinste quadratische Nichtrest d der Ungleichung $d < \sqrt{p}$ genügt. Mit analytischen Hilfsmitteln hat Winogradoff dieses Resultat bedeutend verschärft. Ich hatte nun Zeitz erzählt, daß I. Schur mit elementaren, nicht veröffentlichten Methoden die Abschätzung $d < \frac{1}{3}\sqrt{p}$ für alle p oberhalb einer angebbaren Schranke erreichen kann. Zeitz griff diese Fragestellung mit großem Eifer auf, und es gelang ihm, wie er mir mitteilte, die Abschätzung auf elementarem Wege zu $d < \frac{1}{4}\sqrt{p}$ zu verbessern. Er wollte mir jedoch den Beweis erst vorführen, wenn er ihn genügend vereinfacht und die Methode weiter ausgebaut habe. Dazu ist es leider nicht mehr gekommen.

Es war ein großer Kummer für Zeitz, daß er in den letzten Jahren seines Lebens durch seinen Gesundheitszustand so sehr in seiner Arbeit behindert war. Um so erstaunlicher ist es, daß er in so hohem Lebensalter beginnen konnte, noch mathematische Arbeiten zu veröffentlichen. Als seine erste Arbeit erschien, war er fast sechzig Jahre alt. Daß es ihm, der nie mathematischen Unterricht genossen hatte, vergönnt war, im Kreise von Fachmathematiker über eigene Untersuchungen vorzutragen, war eine der größten Freuden seines Lebens. Trotz seiner Erfolge im Beruf und in der Mathematik blieb er aber eine im tiefsten Wesen bescheidene Persönlichkeit. Insbesondere sah er mit größter Verachtung auf die vielen Laien herab, die wissenschaftliche Fragen ohne genügende Kenntnisse glauben lösen zu können und sich hierbei in bewußten Gegensatz zu den Fachwissenschaftlern stellen. Nur einen Vorwurf erhob Zeitz oft gegen uns Mathematiker, daß wir nämlich nicht genug dafür täten, die Laien für unsere Wissenschaft zu interessieren. Es wäre unsere Pflicht, dafür zu sorgen, daß Menschen, die Freude an scharfem Denken hätten, sich statt mit Kreuzworträtseln mit mathematischen Aufgaben beschäftigen könnten.

Für Zeitz war der Wissenschaftler das höchste Ideal. Und obgleich er keinen wissenschaftlichen Beruf hatte, müssen wir Mathematiker gestehen, daß Hermann Zeitz der Typ eines echten Wissenschaftlers war. Denn nicht um finanzieller Erfolge, nicht um äußerer Ehren willen, sondern nur aus Liebe zur Wahrheit, aus Liebe zur Wissenschaft beschäftigte er sich mit mathematischen Problemen. Hierin kann er uns allen ein leuchtendes Vorbild sein. Wir werden ihm stets ein ehrendes Andenken bewahren.

Digitized by Google

Über eine Transformation orientierter Strahlen [1]).

Von O. Mühlendyck in Berlin.

Bevor ich mich mit der Transformation beschäftige, muß ich einiges vorausschicken, das zwar im wesentlichen bekannt ist, das aber doch zum Verständnis des Nachfolgenden angeführt werden muß.

1. Vorbemerkungen.

Ein Strahl im Raum sei durch die 6 rechtwinkligen homogenen Plückerschen Koordinaten p_i, q_i $(i = 1, 2, 3)$ gegeben. Wir orientieren den Strahl, indem wir eine weitere Koordinate $p_0 = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$ hinzufügen. Die 7 homogenen Koordinaten des orientierten Strahls genügen den Gleichungen.

$$p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2 = 0, \quad p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3 = 0. \tag{1}$$

Wir fassen die Koordinaten p_1, p_2, p_3 und q_1, q_2, q_3 zu den Vektoren p und q zusammen.

Es soll der Reihe nach bezeichnet werden mit

$$(ab),\ [ab],\ (abc)$$

das skalare Produkt der Vektoren a, b, das Vektorprodukt derselben, die Determinante der Vektoren a, b, c.

Zunächst betrachten wir ein Büschel orientierter Strahlen

$$\lambda p_0+\mu p_0', \quad \lambda p+\mu p', \quad \lambda q+\mu q'. \tag{2}$$

Damit für die verschiedenen λ, μ wieder orientierte Strahlen entstehen, müssen die Bedingungen

$$p_0p_0'-(pp') = 0, \quad (pq')+(p'q) = 0 \tag{3}$$

erfüllt sein. Aus diesen Bedingungen läßt sich schließen, daß das Büschel entweder in einer Minimalebene liegen oder ein Parallelenbüschel sein muß. Es sei eine Minimalebene gegeben und in ihr ein orientierter Strahl p_0, p, q. Der Vektor w stehe senkrecht auf der Minimalebene, ω sei ein willkürlicher Vektor. Dann besteht die Identität

$$(wp\omega)^2 = -p_0^2(w\omega)^2. \tag{4}$$

1) Vorgetragen in der 295. Sitzung am 25. Oktober 1933.

Digitized by Google

Aus ihr folgt

$$(5) \qquad (wpw) = \pm i p_0 (ww).$$

Ist der orientierte Strahl euklidisch und gilt in (5) das obere Vorzeichen, so heißt er ein rechtseitiger, gilt das untere Vorzeichen, so heißt er ein linkseitiger orientierter Strahl der Minimalebene. Ein in einer Minimalebene gelegenes Büschel orientierter euklidischer Strahlen besitzt entweder lauter rechtseitige oder lauter linkseitige orientierte Strahlen. Im ersten Fall sprechen wir von einem rechtseitigen, im zweiten von einem linkseitigen isotropen Büschel. Es gibt im ganzen *5 Arten von Büscheln orientierter euklidischer Strahlen*, nämlich *das Parallelenbüschel in euklidischer Ebene, das rechtseitige und das linkseitige isotrope Büschel mit eigentlichem Scheitel, das rechtseitige und das linkseitige isotrope Parallelenbüschel.*

Von zweidimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten orientierter euklidischer Strahlen gibt es 3 Arten: das *Parallelenbündel*, das *rechtseitige isotrope Feld*, das aus allen rechtseitigen orientierten Strahlen einer Minimalebene besteht, und entsprechend das *linkseitige isotrope Feld.*

Eine Rolle spielen nachher noch die isotropen planaren Komplexe orientierter Strahlen. Der *rechtseitige (linkseitige) isotrope planare Komplex* besteht aus allen orientierten Strahlen, die zu einem gegebenen rechtseitigen (linkseitigen) isotropen Feld orientierter Strahlen parallel sind.

Es sei eine Kongruenz orientierter Strahlen gegeben:

$$(6) \qquad p_0 = 1, \quad p = p(u, v), \quad q = q(u, v).$$

Da Minimalstrahlenkongruenzen von der Betrachtung ausgeschlossen werden, ist zur Vereinfachung $p_0 = 1$ gesetzt worden. Die Kongruenz soll nichtzylindrisch sein. Das wird ausgedrückt durch

$$(7) \qquad (p\, p_u\, p_v) \not\equiv 0,$$

wo die Indizes die Ableitungen nach u und v andeuten.

Die benachbarten orientierten Strahlen (u, v) und $(u + du, v + dv)$ der Kongruenz mögen miteinander den Winkel $d\vartheta$ bilden und den Abstand $d\eta$ besitzen. Dann wird

$$(8) \qquad \sigma = \frac{d\eta}{d\vartheta}$$

als die *Steigung* bezeichnet, die zu der Stelle (u, v) und der Fortschreitungsrichtung $du : dv$ gehört. Man bezeichnet die Steigung auch als *Drall.* Man erhält für die Steigung den Ausdruck

Digitized by Google

$$\sigma = \frac{R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2}{U\,du^2 + 2V\,du\,dv + W\,dv^2}, \tag{9}$$

wo

$$\begin{cases} R = (p_u q_u), & S = \frac{1}{2}(p_u q_v) + \frac{1}{2}(p_v q_u), & T = (p_v q_v), \\ U = (p_u p_u), & V = (p_u p_v), & W = (p_v p_v). \end{cases} \tag{10}$$

R, S, T, U, V, W sind die *Fundamentalgrößen* der Kongruenz. Die Steigung σ ist von der Orientierung der Kongruenzstrahlen unabhängig. Entsprechend den Hauptkrümmungen, der mittleren Krümmung und dem Krümmungsmaß bei einer Fläche kann man hier die *Hauptsteigungen* σ_1, σ_2, die *mittlere Steigung* $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ und das *Steigungsmaß* $\sigma_1 \sigma_2$ erklären. Für die mittlere Steigung und das Steigungsmaß ergeben sich die Ausdrücke

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{RW - 2SV + TU}{2(UW - V^2)}, \quad \sigma_1 \sigma_2 = \frac{RT - S^2}{UW - V^2}. \tag{11}$$

Unter den Kongruenzen orientierter Strahlen nehmen diejenigen eine Sonderstellung ein, bei denen das Quadrat der mittleren Steigung gleich dem Steigungsmaß ist.

$$p_0 = 1, \quad p = p(u, v), \quad q = q(u, v) \tag{12}$$

sei eine solche Kongruenz. Die Parameter u, v seien so gewählt, daß die Fundamentalgrößen U und W identisch verschwinden:

$$U = W = 0. \tag{13}$$

Dann wird durch

$$RT = 0 \tag{14}$$

ausgedrückt, daß für die Kongruenz das Quadrat der mittleren Steigung gleich dem Steigungsmaß ist. Nehmen wir $R = 0$, $T \neq 0$ an, so ergibt sich wegen $(p_u p_u) = (p_u q_u) = 0$, daß die Scharen orientierter Strahlen $v =$ konst. auf Minimalebenen liegen und zwar auf rechtseitigen isotropen Feldern orientierter Strahlen (s. o.), falls

$$(p_u p\,\omega) = i(p_u \omega), \tag{15}$$

auf linkseitigen, falls

$$(p_u p\,\omega) = -i(p_u \omega) \tag{16}$$

ist, wo ω einen willkürlichen Vektor bedeutet (s. o.). Ist außer $R = 0$ auch $T = 0$, so haben wir es mit einer *isotropen Kongruenz* zu tun. Jetzt liegen wegen $(p_v p_v) = (p_v q_v) = 0$ auch die

Digitized by Google

Scharen orientierter Strahlen u = konst. auf isotropen Feldern, und es ist entweder

$$(17) \qquad (p_u p\,\omega) = i(p_u\omega), \quad (p_v p\,\omega) = -i(p_v\omega)$$

oder

$$(18) \qquad (p_u p\,\omega) = -i(p_u\omega), \quad (p_v p\,\omega) = i(p_v\omega),$$

d. h.: bei einer isotropen Kongruenz orientierter Strahlen lassen sich die orientierten Strahlen der Kongruenz sowohl auf eine Schar rechtseitiger wie auf eine Schar linkseitiger isotroper Felder verteilen.

Liegt eine Strahlenkongruenz vor, bei der das Quadrat der mittleren Steigung gleich dem Steigungsmaß ist, so ist es nach dem Vorausgegangenen *immer möglich, die Kongruenzstrahlen so zu orientieren, daß sie sich auf eine Schar (beispielsweise) rechtseitiger isotroper Felder verteilen lassen.* Auf diese Bemerkung komme ich nachher zurück.

2. Die Transformation.

§ 1. Die Transformationsgleichungen.

Wir betrachten jetzt die Transformation orientierter Strahlen

$$(19) \quad \begin{cases} P_0 = (p_1 + ip_2)kp_0, \\ P = (p_1 + ip_2)kp + [k - ip_0(p_1 + ip_2)]m, \\ Q = -i(p_1 + ip_2)[k - ip_0(p_1 + ip_2)]p + (p_1 + ip_2)^2[pq], \\ k = (p_0 + p_3)(q_1 + iq_2) - (p_1 + ip_2)q_3, \\ m = \{p_0(p_0 + p_3) - p_1(p_1 + ip_2),\ ip_0(p_0 + p_3) - p_2(p_1 + ip_2), \\ \qquad -(p_0 + p_3)(p_1 + ip_2)\}. \end{cases}$$

Der Vektor m ist ein Minimalvektor, $[pq]$ bedeutet das Vektorprodukt von p und q. Durch die Transformation wird einem orientierten Strahl p_0, p, q ein orientierter Strahl P_0, P, Q zugeordnet. *Die Transformation ist involutorisch,* wovon man sich durch Rechnung überzeugen kann.

§ 2. Die α-Kongruenz.

Bei unsrer Transformation bleiben orientierte Strahlen fest, die eine Kongruenz bilden. Ich will sie die α-Kongruenz nennen. Man kann die Transformation auch als Spiegelung an der α-Kongruenz bezeichnen. *Die α-Kongruenz enthält ∞^1 linkseitige isotrope Büschel orientierter Strahlen, deren Scheitel auf dem Minimalstrahl*

$$(20) \qquad p_1 : p_2 : p_3 : q_1 : q_2 : q_3 = 2 : 2i : 0 : -i : 1 : 0$$

Digitized by Google

liegen, und die den Minimalkegel berühren, der im Ursprung seinen Scheitel hat.

Man kann die α-Kongruenz in folgender Weise darstellen:

$$(21)\qquad \begin{cases} q_1 = \dfrac{i}{2}p_1 - \dfrac{ip_0(p_0-p_3)}{2(p_1+ip_2)}, \\ q_2 = \dfrac{i}{2}p_2 + \dfrac{p_0(p_0-p_3)}{2(p_1+ip_2)}, \\ q_3 = -\dfrac{i}{2}(p_0-p_3). \end{cases}$$

Die Gleichungen liefern zu gegebenem p_0, p das zugehörige q.

§ 3. Geometrische Konstruktion der Transformation.

Ich will jetzt eine geometrische Konstruktion der Spiegelung an der α-Kongruenz angeben. Es sei ein orientierter Strahl A gegeben. Wir legen durch A das rechtseitige isotrope Feld F_1. F_1 schneide die α-Kongruenz im orientierten Strahl B. Nun legen wir durch den orientierten Strahl A das Parallelenbündel. Es schneide die α-Kongruenz im orientierten Strahl C. Durch C legen wir das rechtseitige isotrope Feld F_2. F_2 ist parallel zu F_1. Auf der durch A und den Ursprung gelegten Ebene errichten wir jetzt im Ursprung die Senkrechte. Diese schneide die Minimalebene des Feldes F_2 im Punkt s. Durch s legen wir zu dem orientierten Strahl B die Parallele und erhalten so den orientierten Strahl D. Dieser liegt im Feld F_2 und ist das Spiegelbild des orientierten Strahls A in bezug auf die α-Kongruenz. Übt man dieselbe Konstruktion auf den orientierten Strahl D aus, so erhält man, wie sich leicht zeigen läßt, wieder den orientierten Strahl A.

§ 4. Das Gebiet regulären Verhaltens.

Es sei ein orientierter Strahl gegeben. Wenn er durch Spiegelung an der α-Kongruenz in einen bestimmten orientierten Strahl übergeht und wenn auch die nochmalige Spiegelung an der α-Kongruenz nicht unbestimmt wird, dann sagen wir von dem gegebenen orientierten Strahl, er liege im *Gebiet regulären Verhaltens.* Das Gebiet regulären Verhaltens besteht aus allen orientierten Strahlen p_0, p, q, die der Ungleichung

$$(22)\qquad p_0(p_1+ip_2)k \neq 0$$

genügen. *Jeder im Gebiet regulären Verhaltens gelegene orientierte Strahl geht, wenn man ihn zweimal nacheinander an der α-Kongruenz spiegelt, in sich selbst über.*

Digitized by Google

§ 5. Eigenschaften der Transformation.

Wir fällen vom Ursprung auf den orientierten Strahl P_0, P, Q die Senkrechte. Zu dem Fußpunkt der Senkrechten gehöre der Radiusvektor x. Dann ist

$$x = \frac{[PQ]}{P_0^2}, \tag{23}$$

und es folgt aus (19):

$$(mx) + p_0(p_1 + ip_2) = 0. \tag{24}$$

Es sei durch p_0, p ein im Gebiet regulären Verhaltens liegendes Bündel paralleler orientierter Strahlen gegeben. Den orientierten Strahlen des Bündels entsprechen als Bilder orientierte Strahlen P_0, P, Q, und die Fußpunkte der vom Ursprung auf diese Strahlen gefällten Senkrechten liegen in der Minimalebene (24). Aus

$$(mP) = 0 \tag{25}$$

folgt, daß auch die orientierten Strahlen P_0, P, Q selbst in der Minimalebene (24) liegen, und aus

$$(mP\omega) = iP_0(m\omega) \tag{26}$$

geht hervor, daß sie rechtseitige orientierte Strahlen (s. o.) dieser Minimalebene sind. Dem durch p_0, p gegebenen Parallelenbündel entspricht somit das rechtseitige isotrope Feld (s. o.), das in der Minimalebene (24) liegt.

Umgekehrt geht jedes im Gebiet regulären Verhaltens gelegene rechtseitige isotrope Feld, dessen Minimalebene durch

$$(ax) + a_0 = 0 \tag{27}$$

gegeben sei, durch Spiegelung an der α-Kongruenz in ein durch

$$\left.\begin{aligned} p_0 : p_1 : p_2 : p_3 = {} & a_0(a_1 + ia_2) : a_0a_3 - a_1(a_1 + ia_2) \\ & : ia_0a_3 - a_2(a_1 + ia_2) : -(a_0 + a_3)(a_1 + ia_2) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

gegebenes Parallelenbündel über.

Im Gebiet regulären Verhaltens seien zwei parallele orientierte Strahlen p_0, p, q und p_0, p, q' gegeben. Dann ist das durch sie bestimmte Parallelenbüschel gegeben durch

$$p_0, p, q + \lambda(q' - q). \tag{29}$$

Setzen wir diese Werte in die Transformationsgleichungen (19) ein, so werden die rechten Seiten lineare Funktionen von λ. Das bedeutet aber, daß das Bild des gegebenen Parallelenbüschels wieder ein Büschel ist. Wir müssen noch feststellen, welcher Art

Digitized by Google

das Büschel ist. Das gegebene Parallelenbüschel liegt in einem Parallelenbündel, dem als Bild ein rechtseitiges isotropes Feld entspricht. In diesem liegt das in Frage stehende Büschel, also muß es rechtseitiges isotropes Büschel sein.

Umgekehrt geht jedes rechtseitige isotrope Büschel in ein Parallelenbüschel über. Jedes rechtseitige isotrope Parallelenbüschel geht in ein ebensolches Büschel über. Jeder rechtseitige isotrope planare Komplex (s. o.) geht in sich selbst über. Vorausgesetzt ist natürlich immer, daß die Gebilde im Gebiet regulären Verhaltens liegen.

Wir stellen die Ergebnisse in einem Satz zusammen:

Satz 1. *Im Gebiet regulären Verhaltens gehen folgende von orientierten Strahlen erzeugten Gebilde durch Spiegelung an der α-Kongruenz ineinander über:*

Parallelenbüschel.	*Rechtseitiges isotropes Büschel.*
Rechtseitiges isotropes Parallelenbüschel.	*Rechtseitiges isotropes Parallelenbüschel.*
Parallelenbündel.	*Rechtseitiges isotropes Feld.*
Rechtseitiger isotroper planarer Komplex.	*Rechtseitiger isotroper planarer Komplex.*

Es sei eine zylindrische Kongruenz orientierter Strahlen gegeben:

$$p_0 = 1, \quad p = p(u), \quad q = q(u, v). \tag{30}$$

Sie liege im Gebiet regulären Verhaltens. Wir wollen es so einrichten, daß das Bild der gegebenen Kongruenz nicht in eine zylindrische Kongruenz ausartet, daß also

$$(P P_u P_v) = -p_0 (p_1 + i p_2)^3 k (m p_u)(m q_v) \not\equiv 0 \tag{31}$$

wird. Da die gegebene Kongruenz im Gebiet regulären Verhaltens liegt, können $p_0, p_1 + i p_2, k$ nicht identisch verschwinden. Es bleiben die Bedingungen übrig:

$$(m p_u) \not\equiv 0, \quad (m q_v) \not\equiv 0. \tag{32}$$

Wegen $(mm) = (pm) = (p p_u) = 0$, $(mp\omega) = i(m\omega)$ sagt die erste Bedingung (32) aus, daß die gegebene Kongruenz nicht in einem rechtseitigen isotropen planaren Komplex orientierter Strahlen liegen darf. Der Vektor $q_v(u, v)$ steht auf dem durch den orientierten Strahl $p(u, v)$, $q(u, v)$ gehenden Zylinder der Kongruenz an der Stelle (u, v) senkrecht. Beachtet man dies und berücksichtigt man wieder $(mm) = (pm) = (p q_v) = 0$, $(mp\omega) = i(m\omega)$, so erkennt man, daß die zweite Bedingung (32) bedeutet,

Digitized by Google

daß die Zylinder der Kongruenz nicht lauter rechtseitige isotrope Parallelenbüschel sein dürfen. Man kann auch so sagen: (32) bedeutet, daß die gegebene Kongruenz kein rechtseitiges isotropes Feld sein darf und daß sich ihre orientierten Strahlen auch nicht auf eine Schar rechtseitiger isotroper Felder verteilen lassen dürfen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das Bild der gegebenen Kongruenz eine nichtzylindrische Kongruenz. Rechnen wir jetzt für diese die Fundamentalgrößen R und U (s. (10)) aus, so finden wir, daß sie identisch verschwinden. Das aber hat wegen (11) zur Folge, daß für die Kongruenz das Quadrat der mittleren Steigung gleich dem Steigungsmaß ist. Es hat sich somit ergeben:

Satz 2. *Jede im Gebiet regulären Verhaltens liegende zylindrische Kongruenz orientierter Strahlen, die kein rechtseitiges isotropes Feld ist, und deren orientierte Strahlen sich auch nicht auf eine Schar rechtseitiger isotroper Felder verteilen lassen, geht durch Spiegelung an der α-Kongruenz in eine Kongruenz orientierter Strahlen über, bei der das Quadrat der mittleren Steigung gleich dem Steigungsmaß ist.*

Es sei jetzt eine Strahlenkongruenz gegeben, bei der das Quadrat der mittleren Steigung gleich dem Steigungsmaß ist. Wir orientieren die Strahlen der Kongruenz so, daß sie sich auf eine Schar rechtseitiger isotroper Felder verteilen lassen. Das ist, wie ich oben auseinandergesetzt habe, immer möglich. Die so erhaltene Kongruenz orientierter Strahlen liege im Gebiet regulären Verhaltens. Da den rechtseitigen isotropen Feldern als Bilder Parallelenbündel entsprechen, gehen die auf den Feldern gelegenen Kongruenzstrahlenscharen in Strahlenscharen über, die in Parallelenbündeln liegen, d. h. in Zylinder. Es gilt der

Satz 3. *Es liege eine Strahlenkongruenz vor, bei der das Quadrat der mittleren Steigung gleich dem Steigungsmaß ist. Wir orientieren ihre Strahlen so, daß sie sich auf eine Schar rechtseitiger isotroper Felder verteilen lassen. Liegt die so erhaltene Kongruenz orientierter Strahlen im Gebiet regulären Verhaltens, so wird sie durch Spiegelung an der α-Kongruenz in eine zylindrische Kongruenz orientierter Strahlen verwandelt.*

Digitized by Google

Zur Theorie der linearen Abbildungen*).

Herrn Rudolf Rothe zum 60. Geburtstage gewidmet.

Von E. Jacobsthal.

In den folgenden Zeilen wird die Theorie der linearen Abbildungen unter Heranziehung neuer Hilfsmittel behandelt. Dabei erfahren manche bekannte Tatsachen eine Begründung, die von der sonst üblichen erheblich abweicht; sie zeigt in methodischer Hinsicht einen stark formalen und abstrakten Charakter, birgt aber dafür in sich die Möglichkeit zu einer eleganten Gestaltung der Rechnung. Die beiden ersten Paragraphen dienen der Entwicklung der allgemeinen Hilfsmittel; die beiden letzten behandeln die geometrischen Fragen, die linearen Abbildungen und die Spiegelungen.

§ 1.

Bedeutet Γ die Gruppe, die von allen quadratischen Matrizen eines festen Grades n mit nicht verschwindender Determinante durch die Matrizenmultiplikation erzeugt wird und ist E die Einheitsmatrix, so bilden alle Matrizen αE[1]) in Γ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ von Γ, und die Faktorgruppe $\Gamma/\mathfrak{D} = \Phi$ heißt die Gruppe der Kollineationen. Jedes Element von Φ ist der Komplex aller Matrizen, die sich nur durch nicht verschwindende Zahlfaktoren von einander unterscheiden. Das Einheitselement von Φ ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, die Gesamtheit aller Matrizen αE[1]).

Man nennt bekanntlich $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ ähnlich, wenn

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{Q}$$

ist und sagt: $\mathfrak{Q}$ transformiere $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$. Diese Ähnlichkeitsbeziehung ist transitiv und in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ symmetrisch. Ist $\mathfrak{Q}_0$ ein spezieller Transformator, der $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ transformiert, so ist der allgemeine, der dies leistet:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0\mathfrak{Q}',$$

*) Vorgelegt in der 296. Sitzung am 29. Nov. 1933.

1) $\alpha \neq 0$. Matrizen bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben, die Elemente von Φ mit großen deutschen Buchstaben.

Digitized by Google

worin $\mathfrak{Q}'$ das allgemeine Element der Gruppe aller mit $\mathfrak{T}$ vertauschbaren Elemente von Φ bedeutet.

Ist S die Matrix $(a_{\varkappa\lambda})$ und ist $\bar{a}_{\varkappa\lambda}$ zu $a_{\varkappa\lambda}$ konjugiert komplex, so setzen wir die zu S konjugiert komplexe Matrix $(\bar{a}_{\varkappa\lambda}) = \bar{S}$. Bestimmt S das Element $\mathfrak{S}$ von Φ, so bezeichnen wir das Element von Φ, das $\bar{S}$ enthält, mit $\bar{\mathfrak{S}}$ und nennen $\mathfrak{S}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ zu einander konjugiert komplex. Zu jeder in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Matrix S befindet sich die konjugiert komplexe in $\bar{\mathfrak{S}}$. Ist $\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{S}}$, so nennen wir $\mathfrak{S}$ reell.

$\mathfrak{T}$ möge im folgenden zu $\mathfrak{S}$ *verwandt* heißen, wenn

$$\mathfrak{T} = \bar{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{Q} \tag{1}$$

ist. Wir sagen auch: $\mathfrak{Q}$ verwandle $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$. Da auch wegen $\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{Q}}'^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{Q}'$ mit $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^{-1}$ offenbar $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{T}$ verwandt ist, ist diese Verwandtschaftsbeziehung in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ symmetrisch, und sie ist auch transitiv, wie man sofort übersieht. Ist der Verwandler $\mathfrak{Q}$ reell, so sind die verwandten Elemente $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ ähnlich.

Alle Elemente $\mathfrak{A}$ von Φ, für die bei festem $\mathfrak{T}$

$$\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{A} \tag{2}$$

ist, bilden eine durch $\mathfrak{T}$ bestimmte Untergruppe von Φ; ist $\mathfrak{Q}'$ das allgemeine Element dieser Untergruppe, und ist $\mathfrak{Q}_0$ ein spezielles Element, das $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ verwandelt, also

$$\mathfrak{T} = \bar{\mathfrak{Q}}_0^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{Q}_0,$$

so ist das allgemeinste $\mathfrak{Q}$, das $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ verwandelt:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0\mathfrak{Q}'. \tag{3}$$

Wir betrachten nun im folgenden solche Elemente $\mathfrak{S}$ von Φ, für die

$$\mathfrak{S}\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{E} \tag{4}$$

ist. Für jedes solche $\mathfrak{S}$ ist also:

$$\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}^{-1}, \quad \bar{\mathfrak{S}}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{E}. \tag{4a}$$

Die (4) genügenden Elemente $\mathfrak{S}$ von Φ mögen *Kreiselemente*[2]) heißen. Mit $\mathfrak{S}$ zugleich ist auch $\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}^{-1}$ ein Kreiselement.

Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein Kreiselement und S eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene Matrix. Da $\bar{S}$ in $\bar{\mathfrak{S}}$ und $S\bar{S}$ in $\mathfrak{S}\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{E}$ vorkommt, so ist:

$$S\bar{S} = \mu E; \quad \bar{S} = \mu S^{-1}; \quad \bar{S}S = S\bar{S} = \mu E; \tag{5}$$

2) Sie bilden keine Gruppe.

Digitized by Google

also ist S mit $\bar{S}$ vertauschbar. Zugleich folgt, daß μ reell ist:

$$\mu = \bar{\mu}. \tag{5a}$$

Das Vorzeichen von μ ist dabei für alle in $\mathfrak{S}$ gelegenen Matrizen S das gleiche. Denn ist S_1 in $\mathfrak{S}$, also:

$$S_1 \bar{S}_1 = \mu_1 E; \quad S_1 = \lambda S, \quad \bar{S}_1 = \bar{\lambda} \bar{S},$$

so ist:

$$S_1 \bar{S}_1 = \mu_1 E = |\lambda|^2 S\bar{S} = |\lambda|^2 \mu E; \quad \mu_1 = |\lambda|^2 \mu.$$

Daher wird $\operatorname{sign} \mu = \operatorname{sign} \mu_1$. Dieses für alle S in $\mathfrak{S}$ gemeinsame Vorzeichen soll die *Charakteristik* von $\mathfrak{S}$ heißen. Jede Matrix S, die (mit $\mu \neq 0$) die Gleichung (5) befriedigt, definiert umgekehrt ein Kreiselement $\mathfrak{S}$. Durch Übergang zu den Determinanten folgt aus (5) die Beziehung:

$$|S|\,|\bar{S}| = \mu^n. \tag{6}$$

Hieraus ergibt sich: *Bei ungeradem n gibt es nur Kreiselemente positiver Charakteristik.* Dagegen treten bei geradem n sowohl Kreiselemente von positiver als auch solche mit negativer Charakteristik auf. So definiert z. B. für $n = 2$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & pi \\ qi & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

bei reellem p, q ein Kreiselement, dessen Charakteristik $\operatorname{sign}(\alpha\bar{\alpha} + pq)$ ist, also je nach Wahl von α, p, q positiv oder negativ ist. Bei beliebigem geraden n erhält man z. B. durch folgende Matrix A_0 ein Kreiselement negativer Charakteristik: $A_0 = (a_{\varkappa\lambda})$, wobei außer in der Nebendiagonale $a_{\varkappa\lambda} = 0$ ist; in der Nebendiagonale soll jedoch mit $n = 2m$ folgende Festsetzung gelten:

$$\begin{aligned} a_{\lambda,\, n+1-\lambda} &= -1 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \lambda \leqq m, \\ &= +1 \quad \text{für} \quad m < \lambda \leqq n = 2m. \end{aligned}$$

Mit diesem Kreiselement $\mathfrak{A}_0$ ist für jedes gerade n die Existenz von Kreiselementen negativer Charakteristik gesichert.

Wir zeigen nun folgende vier Sätze.

Satz 1: *Ist $\mathfrak{S}$ ein Kreiselement, so ist auch $\mathfrak{S}^m$ ein solches.*

Satz 2: *Hat das Kreiselement $\mathfrak{S}$ die Charakteristik ε, so ist die von $\mathfrak{S}^m$ gleich ε^m.*

Satz 3: *Jedes zu einem Kreiselement $\mathfrak{S}$ verwandte Element $\mathfrak{S}_1$ ist auch ein Kreiselement und zwar von derselben Charakteristik wie $\mathfrak{S}$.*

Satz 4: *Alle Kreiselemente gleicher Charakteristik sind verwandt.*

Digitized by Google

Wir kommen zu den Beweisen dieser Sätze.

Beweis von 1: Wir brauchen uns nur auf positives ganzes m zu beschränken, da $\mathfrak{S}^{-1} = \overline{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{S}^0 = \mathfrak{E}$ Kreiselemente sind. Für $m = 1, 2, 3, \ldots$ folgt aber aus

$$\mathfrak{S}^{m+1}\overline{\mathfrak{S}}^{m+1} = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}^m\overline{\mathfrak{S}}^m)\overline{\mathfrak{S}}$$

durch Induktion sofort die Behauptung.

Beweis von 2: Gehört die Matrix S zu $\mathfrak{S}$ und ist

$$S\bar{S} = \mu E, \quad \operatorname{sign}\mu = \varepsilon,$$

so gehört S^m zu $\mathfrak{S}^m$ und aus

$$(S\bar{S})^m = \mu^m E = S^m\bar{S}^m$$

folgt mit $\operatorname{sign}(\mu^m) = \varepsilon^m$ die Behauptung.

Beweis von 3: Es ist $\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}_1 = \overline{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{Q}$. Daher wird:

$$\mathfrak{S}_1\overline{\mathfrak{S}}_1 = \overline{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\mathfrak{S}}\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{S}}\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{Q}}^{-1}\overline{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{E}.$$

Also ist $\mathfrak{S}_1$ ein Kreiselement; es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ gleiche Charakteristik haben. Es sei nun die Matrix S in $\mathfrak{S}$ und die Matrix Q in $\mathfrak{Q}$ enthalten; ferner sei $S\bar{S} = \mu E$; $\operatorname{sign}\mu = \varepsilon$ ist die Charakteristik von $\mathfrak{S}$; $\overline{Q}^{-1}$ ist in $\overline{\mathfrak{Q}}^{-1}$ gelegen und $S_1 = \overline{Q}^{-1}SQ$ ist eine in $\mathfrak{S}_1$ gelegene Matrix. Für sie ist

$$S_1\bar{S}_1 = \overline{Q}^{-1}SQQ^{-1}\bar{S}\,\bar{Q} = \overline{Q}^{-1}\mu E\overline{Q} = \mu E.$$

Also ist die Charakteristik von $\mathfrak{S}_1$ auch $\operatorname{sign}\mu = \varepsilon$, d. h. gleich der von $\mathfrak{S}$.

Bevor wir uns dem Beweise des vierten Satzes zuwenden, machen wir noch als Erläuterung zu den bisherigen Sätzen folgende Bemerkung. Stets ist $\mathfrak{S}^m$ und $\mathfrak{S}^{m+2}$ verwandt. Denn ist $\mathfrak{S}$ ein Kreiselement, so ist $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}$ und daher wird:

$$\mathfrak{S}^{m+2} = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{S}^m\mathfrak{S},$$

sodaß also $\mathfrak{S}$ das Kreiselement $\mathfrak{S}^m$ in $\mathfrak{S}^{m+2}$ verwandelt.

Beweis von 4: Es seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ zwei Kreiselemente gleicher Charakteristik. Um ihre Verwandtschaft zu zeigen, weisen wir zunächst folgendes nach: es gibt in $\mathfrak{S}$ eine Matrix S^* und dazu in $\mathfrak{S}_1$ eine Matrix S_1^*, daß

$$S^*\bar{S}^* = S_1^*\bar{S}_1^*$$

und gleichzeitig

$$|S^* + \bar{S}_1^*| \neq 0$$

ist. Denn greift man aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ die Matrizen S und S_1

Digitized by Google

heraus, so ist

$$S\bar{S} = \mu E, \quad S_1\bar{S}_1 = \mu_1 E,$$

und μ und μ_1 haben hierin gleiches Zeichen, da $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ gleiche Charakteristik besitzen. Mit

$$S_1^* = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}}\, S_1$$

wird dann

$$S_1^*\bar{S}_1^* = \frac{\mu}{\mu_1} S_1\bar{S}_1 = \mu E = S\bar{S}.$$

Ferner ist:

$$|\bar{S}_1^* + xS| \not\equiv 0.$$

Also ist für ein passendes $x = \alpha$ vom absoluten Betrage 1 mit $\alpha S = S^*$:

$$S^*\bar{S}^* = S\bar{S} = S_1^*\bar{S}_1^* \text{ und } |S^* + \bar{S}_1^*| \neq 0.$$

Setzt man nun $S^* + \bar{S}_1^* = Q$, so bestimmt wegen $|Q| \neq 0$ die Matrix Q ein Element $\mathfrak{Q}$ von Φ. Es wird dann:

$$\begin{aligned}\bar{Q}S^* &= (\bar{S}^* + S_1^*)S^* = \bar{S}^*S^* + S_1^*S^* = S^*\bar{S}^* + S_1^*S^* = S_1^*\bar{S}_1^* + S_1^*S^* \\ &= S_1^*(\bar{S}_1^* + S^*) = S_1^*Q,\end{aligned}$$

$$S^* = \bar{Q}^{-1}S_1^*Q, \quad \mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{S}_1\mathfrak{Q}, \text{ w. z. b. w.}$$

Aus diesem Satz folgt, daß bei *ungeradem* n alle Kreiselemente untereinander verwandt sind, insbesondere alle zu $\mathfrak{E}$ verwandt sind; also haben in diesem Falle alle Kreiselemente die Gestalt:

$$\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{Q}. \tag{7}$$

Im Falle eines *geraden* $n = 2m$ dagegen haben nur die Kreiselemente positiver Charakteristik die Gestalt (7). Dagegen sind die untereinander verwandten Kreiselemente negativer Charakteristik alle von der Gestalt:

$$\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{A}_0\mathfrak{Q}, \tag{8}$$

worin $\mathfrak{A}_0$ das oben definierte Kreiselement negativer Charakteristik bedeutet.

Ist $\mathfrak{S}$ ein gegebenes Kreiselement positiver Charakteristik und stellt man es in der Gestalt (7) dar, so findet man das allgemeinste hierzu brauchbare $\mathfrak{Q}$ aus einem speziellen $\mathfrak{Q}_0$ durch:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{Q}_0, \tag{7a}$$

worin $\mathfrak{R}$ ein willkürliches reelles Element von Φ ist, wie man sofort aus (2) und (3) erkennt. Ein passendes $\mathfrak{Q}_0$ findet man aus dem Gange des Beweises zu Satz 4.

Digitized by Google

Setzt man dagegen ein gegebenes Kreiselement $\mathfrak{S}$ negativer Charakteristik in die Form (8), so ergibt sich auf Grund von (2) und (3) das allgemeinste hierzu brauchbare $\mathfrak{Q}$ aus einem speziellen $\mathfrak{Q}_0$ durch:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q}_0. \tag{8a}$$

Hierin ist $\mathfrak{A}$ das allgemeine Element, das mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{A}_0$ die Beziehung (2) erfüllt, sodaß also

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}_0 \tag{8b}$$

ist. Die durch diese $\mathfrak{A}$ erzeugte Untergruppe von Φ sei Θ, die der reellen Elemente von Φ sei P. Zerlegt man Φ nach der Untergruppe P in rechtsseitige Nebengruppen, so liefern alle $\mathfrak{Q}$ aus derselben Nebengruppe nach (7), (7a) dasselbe Kreiselement positiver Charakteristik, dagegen ergeben zwei aus verschiedenen Nebengruppen entnommene $\mathfrak{Q}$ mit (7) verschiedene Kreiselemente positiver Charakteristik.

Für die Kreiselemente negativer Charakteristik hat man entsprechend Φ in rechtsseitige Nebengruppen nach der Untergruppe Θ zu zerlegen, und dann gelten die entsprechenden Tatsachen, wenn man nun die Gleichungen (8), (8a) und (8b) benutzt.

Um im Falle $n = 2m$ die Gruppe Θ zu bilden, hat man alle Elemente $\mathfrak{A}$ von Φ zu nehmen, die (8b) erfüllen. Jedes solche $\mathfrak{A}$ ist durch eine Matrix A bestimmt, die die Beziehung

$$\lambda A_0 A = \bar{A} A_0, \ (\lambda \neq 0), \tag{8c}$$

befriedigt. Um alle diese Matrizen A zu finden, dürfen wir zunächst den Faktor $\lambda = 1$ setzen. Dies ergibt sich so. Es ist: $\bar{A}_0 = A_0$, $A_0^2 = -E$, also folgt aus (8c), daß

$$\lambda A_0 A A_0 = -\bar{A}, \quad \bar{\lambda} A_0 \bar{A} A_0 = -A$$

ist. Trägt man aus der ersten dieser beiden Gleichungen den Wert für $\bar{A}$ in die zweite ein, so folgt: $|\lambda|^2 A = A$ und hieraus ergibt sich, daß $|\lambda| = 1$ ist. Indem wir nun $\lambda = \frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ setzen und für ϱA einfach wieder A schreiben, da es ja zur Bestimmung von $\mathfrak{A}$ bei der Matrix auf einen Zahlfaktor nicht ankommt, verwandelt sich die Gleichung (8c) in $A_0 A = \bar{A} A_0$; das bedeutet eben, daß wir $\lambda = 1$ setzen durften. Um nun aus der so vereinfachten Gleichung (8c) A zu bestimmen, setzen wir

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -M \\ M & 0 \end{pmatrix},$$

Digitized by Google

wobei wir unter M die m-reihige quadratische Matrix verstehen, die in der Nebendiagonale lauter Einsen, sonst aber lauter Nullen enthält. Teilt man nun ganz entsprechend A in vier quadratische Matrizen des Typus (m, m) auf:

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

so geht die Gleichung $\bar{A} A_0 = A_0 A$ in folgende Beziehung über:

$$\begin{pmatrix} \bar{P} & \bar{Q} \\ \bar{R} & \bar{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -M \\ M & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -M \\ M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}.$$

Indem man beiderseits die Matrizen ausmultipliziert, vergleicht und $M^2 = E$ benutzt, erhält man:

$$R = -M\bar{Q}M, \quad S = M\bar{P}M.$$

Somit ergibt sich schließlich:

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ -M\bar{Q}M & M\bar{P}M \end{pmatrix}. \tag{8 d}$$

Hierin ist P und Q so zu wählen, daß $|A| \neq 0$ ist. Jede so gefundene Matrix bestimmt ein Element $\mathfrak{A}$ von Θ; dabei werden auch alle $\mathfrak{A}$ gewonnen.

Ich schließe hier noch folgende Bemerkung an. Ist $\mathfrak{S}$ ein Kreiselement und S eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene Matrix, $S\bar{S} = \mu E$ und spaltet man S in Reelles und Imaginäres auf:

$$S = S' + iS'', \tag{9}$$

so hat die Matrix des Typus $(2n, 2n)$:

$$N = \begin{pmatrix} S' & S'' \\ S'' & -S' \end{pmatrix} \tag{10}$$

die Eigenschaft, daß für sie

$$N^2 = \mu E, \quad |N - xE| = (x^2 - \mu)^n \tag{10 a}$$

ist, wie ohne Beweis erwähnt werde.

Der folgende Paragraph ist nur dem Falle $n = 2$ gewidmet.

§ 2.

Es wurde bereits für den Fall $n = 2$ mitgeteilt, daß jede Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & pi \\ qi & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

bei reellem p, q und $\alpha\bar{\alpha} + pq \neq 0$ eine *Kreismatrix* ist, d. h. ein

Digitized by Google

Kreiselement $\mathfrak{S}$ definiert, dessen Charakteristik sign $(\alpha\bar{\alpha}+pq)$ ist, da $S\bar{S}=(\alpha\bar{\alpha}+pq)E$ wird. Man zeigt nun umgekehrt:

Satz 5: *Ist $\mathfrak{S}$ ein Kreiselement, dann enthält $\mathfrak{S}$ sicher eine Matrix der Gestalt*

$$S=\begin{pmatrix}\alpha & pi\\ qi & \bar{\alpha}\end{pmatrix}, \tag{11}$$

worin p, q reell sind. Alle derartigen normierten in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Matrizen unterscheiden sich nur durch reelle Zahlfaktoren.

Beweis: 1. $\mathfrak{S}$ habe positive Charakteristik; $\mathfrak{S}$ hat die Gestalt $\mathfrak{S}=\bar{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{Q}$, (§ 1, Gl. 7). Enthält nun $\mathfrak{Q}$ die Matrix $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, so ist in $\bar{\mathfrak{Q}}^{-1}$ die Matrix $\begin{pmatrix}\bar{d} & -\bar{b}\\ -\bar{c} & \bar{a}\end{pmatrix}$ enthalten; daher kommt in $\mathfrak{S}$ die Matrix

$$S=\begin{pmatrix}\bar{d} & -\bar{b}\\ -\bar{c} & \bar{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\bar{d}-\bar{b}c, & b\bar{d}-\bar{b}d\\ -\bar{c}a+\bar{a}c, & \bar{a}d-b\bar{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & pi\\ qi & \bar{\alpha}\end{pmatrix}$$

vor.

2. $\mathfrak{S}$ habe negative Charakteristik. In diesem Falle hat $\mathfrak{S}$ die Gestalt $\mathfrak{S}=\bar{\mathfrak{Q}}^{-1}\mathfrak{A}_0\mathfrak{Q}$, (§ 1, Gl. 8). Dabei ist $\mathfrak{A}_0$ durch $A_0=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ oder auch durch $\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ definiert. Somit enthält mit den im Falle der positiven Charakteristik benutzten Bezeichnungen $\mathfrak{S}$ die Matrix

$$S=\begin{pmatrix}\bar{d} & -\bar{b}\\ -\bar{c} & \bar{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i(a\bar{b}+c\bar{d}), & -i(b\bar{b}+d\bar{d})\\ i(a\bar{a}+c\bar{c}), & +i(\bar{a}b+\bar{c}d)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha & pi\\ qi & \bar{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Der letzte Teil des Satzes erledigt sich so. Ist $S_1=\begin{pmatrix}\beta & ri\\ si & \bar{\beta}\end{pmatrix}$ eine zweite in $\mathfrak{S}$ enthaltene normierte Matrix, also r, s reell, so ist $S=\tau S_1$ und daher

$$\alpha\bar{\alpha}+pq=\tau^2(\beta\bar{\beta}+rs).$$

Hierin haben $\alpha\bar{\alpha}+pq$ und $\beta\bar{\beta}+rs$ das gleiche Vorzeichen (die Charakteristik von $\mathfrak{S}$). Somit ist τ^2 positiv und τ reell.

Satz 6: *Ist S eine zu $\mathfrak{S}$ gehörende normierte Kreismatrix, so ist S^m eine solche von $\mathfrak{S}^m$ $(m=1,2,3,\ldots)$.*

Beweis: Ist S normiert, also von der Gestalt (11), so rechnet man durch Bildung von S^2 sofort nach, daß die Hauptdiagonale von S^2 konjugiert komplexe, die Nebendiagonale rein imaginäre

Digitized by Google

Zahlen enthält. Setzt man

$$S^m = \begin{pmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ \gamma_m & \delta_m \end{pmatrix} \tag{12}$$

und nimmt als richtig an, daß

$$\delta_m = \bar{\alpha}_m, \quad \beta_m = ip_m, \quad \gamma_m = iq_m$$

mit reellem p_m, q_m ist, so folgt aus

$$S^{m+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{m+1} & \beta_{m+1} \\ \gamma_{m+1} & \delta_{m+1} \end{pmatrix} = SS^m = S^m S$$

durch Vergleich:

a) $pq_m = p_m q$; b) $\alpha p_m + p\bar{\alpha}_m = \alpha_m p + p_m \bar{\alpha}$;

c) $q\alpha_m + q_m\bar{\alpha} = q_m\alpha + q\bar{\alpha}_m$; d) $\alpha_{m+1} = \alpha\alpha_m - pq_m = \alpha\alpha_m - p_m q$;

e) $\delta_{m+1} = \bar{\alpha}_{m+1}$; f) $\beta_{m+1} = i(\alpha p_m + p\bar{\alpha}_m)$; g) $\gamma_{m+1} = i(q\alpha_m + q_m\bar{\alpha})$.

Hierin sind β_{m+1}, γ_{m+1} auf Grund von b) und c) wirklich rein imaginär; also ist S^{m+1} wirklich normiert. Mit

$$\beta_{m+1} = ip_{m+1}, \quad \gamma_{m+1} = iq_{m+1}$$

haben wir als Rekursionsformel für

$$S^m = \begin{pmatrix} \alpha_m & p_m i \\ q_m i & \bar{\alpha}_m \end{pmatrix}: \tag{12a}$$

$$\begin{cases} \alpha_{m+1} = \alpha\alpha_m - pq_m = \alpha\alpha_m - p_m q; \\ p_{m+1} = \alpha p_m + p\bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}p_m + p\alpha_m; \\ q_{m+1} = \alpha q_m + q\bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}q_m + q\alpha_m. \end{cases} \tag{12b}$$

Mit $\alpha_0 = 1$, $p_0 = q_0 = 0$ ergibt sich hieraus: $\alpha_1 = \alpha$, $p_1 = p$, $q_1 = q$ usw. Die geometrische Seite des Falles $n = 2$ wird uns nun im folgenden Paragraphen beschäftigen.

§ 3.

Bekanntlich kann man im Falle $n = 2$ die Gruppe Φ als die Gruppe aller linearen Abbildungen auffassen. Denn ist $\mathfrak{S}$ ein Element von Φ und $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine ganz beliebige in $\mathfrak{S}$ enthaltene Matrix, so ist die lineare Abbildung, die durch

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{13}$$

definiert ist, nicht von der Auswahl von S, sondern nur von $\mathfrak{S}$ abhängig und soll daher mit

Digitized by Google

(13 a) $$w = \mathfrak{S}(z)$$

bezeichnet werden. Bei $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{E}$ besitzt sie zwei getrennte oder zwei zusammenfallende Fixpunkte. Bei $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ handelt es sich um die identische Abbildung; jeder Punkt ist dann Fixpunkt. Sind mehr als zwei Fixpunkte vorhanden, so ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$, also jeder Punkt Fixpunkt.

Satz 7: *Ist $\mathfrak{K}$ ein Element von Φ und ist*

(14) $$w = \mathfrak{K}(z)$$

die zugehörige lineare Abbildung und gibt es dazu drei verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 derart, daß

$$w_\lambda = \mathfrak{K}(z_\lambda) = \bar{z}_\lambda$$

ist, dann ist $\mathfrak{K}$ ein Kreiselement positiver Charakteristik, und es gibt dann unendlich viele Punkte z, für die

(15) $$\bar{z} = \mathfrak{K}(z)$$

ist; sie liegen alle auf einem reellen Kreise, dessen Gleichung gerade (15) *ist.*

Beweis: Es ist für $\lambda = 1, 2, 3$: $\bar{z}_\lambda = \mathfrak{K}(z_\lambda)$, also

$$z_\lambda = \overline{\mathfrak{K}}(\bar{z}_\lambda) = \overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{K}(z_\lambda).$$

Somit hat die zusammengesetzte Abbildung $w^* = \overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{K}(z)$ drei Fixpunkte z_1, z_2, z_3. Daher ist $\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$, d. h. $\mathfrak{K}$ ein Kreiselement. Deshalb läßt sich (14) in die Form setzen:

(16) $$w = \frac{\alpha z + pi}{qiz + \bar{\alpha}}.$$

Setzt man nun

(17) $$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & pi \\ qi & \bar{\alpha} \end{vmatrix}$$

und ist unter den drei Werten z_λ etwa z_1 endlich, so folgt aus (17) in Verbindung mit

$$\bar{z}_1 = \frac{\alpha z_1 + pi}{qiz_1 + \bar{\alpha}},$$

daß

(17 a) $$\Delta = |qiz_1 + \bar{\alpha}|^2$$

ist; also hat $\mathfrak{K}$ positive Charakteristik. Daß die Gleichung (15) eine Kreisgleichung darstellt, sieht man sofort; bei $q = 0$ ist es die Darstellung einer reellen Geraden. Bei $q \neq 0$ handelt es sich um einen reellen Kreis. In diesem Falle ist die Gleichung (15) mit

Digitized by Google

(15a) $$\Delta = |q i z + \bar{\alpha}|^2, \quad \left| z - \frac{i\bar{\alpha}}{q} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|q|}$$

gleichwertig; hieraus kann sofort der Mittelpunkt und der Radius entnommen werden. Für jedes Kreiselement $\mathfrak{K}$ positiver Charakteristik stellt (15) stets einen reellen Kreis oder eine reelle Gerade dar; bei negativer Charakteristik aber einen imaginären Kreis, d. h. einen Kreis mit reellem Mittelpunkt und negativem Radiusquadrat. Und umgekehrt führt jede Gleichung eines reellen oder imaginären Kreises oder einer reellen Geraden durch Auflösen nach $\bar{z}$ auf eine lineare Funktion von z, die zu einem Kreiselement gehört.

Daß unter den Voraussetzungen des Satzes 7 $\mathfrak{K}$ positive Charakteristik besitzt, hätte man auch so erschließen können. Mit

$$H(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

ist offenbar (14) gleichwertig mit

$$\overline{H}(w) = H(z).$$

Wenn also H zu $\mathfrak{H}$ von Φ gehört, so ist demnach:

(18) $$\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{H}}^{-1} \mathfrak{H}$$

und hieraus folgt nach § 1 sofort, daß $\mathfrak{K}$ positive Charakteristik hat.

Wir sahen, daß durch (14) sich jedem Kreiselement ein Kreis oder eine Gerade zuordnete[3]). Wir bezeichnen die so zugeordneten geometrischen Gebilde mit entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben. Als Beispiele für diese Zuordnung seien genannt: $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ ordnet sich die reelle Achse zu; der imaginären Achse entspricht das durch die Matrix $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ definierte Kreiselement; zum Einheitskreis gehört das durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ definierte Kreiselement; schließlich gehört der imaginäre Kreis $z\bar{z} = -1$ gerade zu dem Kreiselement $\mathfrak{A}_0$ negativer Charakteristik.

Erklärung: *Ist* $\mathfrak{k}$ *ein Kreis und* $\bar{z} = \mathfrak{K}(z)$ *seine Gleichung, so heißt* z_2 *zu* z_1 *invers (spiegelbildlich) in Bezug auf* $\mathfrak{k}$, *wenn*

(19) $$\bar{z}_2 = \mathfrak{K}(z_1)$$

ist.

3) Die Geraden werden im folgenden mit zu den Kreisen gerechnet $z = \mathfrak{K}(\bar{z})$ ist zu $\bar{z} = \mathfrak{K}(z)$ das Spiegelbild an der reellen Achse. Wir bevorzugen die Form $\bar{z} = \mathfrak{K}(z)$; dadurch ist $\mathfrak{k}$ festgelegt.

Digitized by Google

Hieraus folgt mit $\mathfrak{R}^{-1} = \overline{\mathfrak{R}}$, daß $\bar{z}_1 = \mathfrak{R}(z_2)$, also auch z_1 zu z_2 in Bezug auf $\mathfrak{k}$ invers ist. Die durch (19) erklärte Beziehung zwischen z_1 und z_2 ist also in z_1 und z_2 symmetrisch. Der Übergang von z_1 zu z_2 heißt *Spiegelung an* $\mathfrak{k}$.

Satz 8: *Der Kreis* $\mathfrak{k}$ *der z-Ebene*[4]) *wird durch die lineare Abbildung* $z = \mathfrak{S}(w)$ *auf den Kreis* $\mathfrak{k}_1$ *der w-Ebene abgebildet, dessen Gleichung* $\overline{w} = \mathfrak{R}_1(w)$ *ist, worin das Kreiselement* $\mathfrak{R}_1 = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ *ist.*

Beweis: $\bar{z} = \mathfrak{R}(z)$ und $z = \mathfrak{S}(w)$ liefern zusammen:

$$\overline{w} = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}(\bar{z}) = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}(z) = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{S}(w)$$

und $\mathfrak{R}_1 = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ ist ein Kreiselement.

Satz 9: *Spiegelt man einen Kreis* $\mathfrak{k}_1$ *an einem zweiten Kreise* $\mathfrak{k}_2$, *so ist das Spiegelbild von* $\mathfrak{k}_1$ *der Kreis* $\mathfrak{k}_3$, *der zum Kreiselement* $\mathfrak{R}_3 = \overline{\mathfrak{R}}_2^{-1}\overline{\mathfrak{R}}_1\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2\overline{\mathfrak{R}}_1\mathfrak{R}_2$ *gehört, also die Gleichung* $\bar{z} = \mathfrak{R}_3(z) = \mathfrak{R}_2\overline{\mathfrak{R}}_1\mathfrak{R}_2(z)$ *besitzt.*

Beweis: Denn liegt z_1 auf $\mathfrak{k}_1$ und ist z invers zu z_1 in Bezug auf $\mathfrak{k}_2$, so ist: $\bar{z}_1 = \mathfrak{R}_1(z_1)$, $z_1 = \overline{\mathfrak{R}}_1(\bar{z}_1)$; $\bar{z} = \mathfrak{R}_2(z_1) = \mathfrak{R}_2\overline{\mathfrak{R}}_1(\bar{z}_1)$. Ferner ist $\bar{z}_1 = \mathfrak{R}_2(z)$. Also wird schließlich:

$$\bar{z} = \mathfrak{R}_2\overline{\mathfrak{R}}_1\mathfrak{R}_2(z) = \overline{\mathfrak{R}}_2^{-1}\overline{\mathfrak{R}}_1\mathfrak{R}_2(z), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 10: *Sind* z_1 *und* z_2 *spiegelbildlich in Bezug auf den Kreis* $\mathfrak{k}$ *und führt eine lineare Abbildung* $z = \mathfrak{S}(w)$ *oder eine Spiegelung an einem Kreise* $\mathfrak{k}_1$ *die Punkte* z_1, z_2 *in* w_1, w_2 *und* $\mathfrak{k}$ *in* $\mathfrak{k}_2$ *über, so sind* w_1, w_2 *invers in Bezug auf* $\mathfrak{k}_2$.

Beweis: Es ist $\bar{z}_2 = \mathfrak{R}(z_1)$. Handelt es sich nun erstens um die lineare Abbildung $z = \mathfrak{S}(w)$, so ist für $\lambda = 1, 2$:

$$w_\lambda = \mathfrak{S}^{-1}(z_\lambda) \text{ und } \mathfrak{R}_2 = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{S}.$$

Es wird dann:

$$\overline{w}_2 = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}(\bar{z}_2) = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}(z_1) = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{S}(w_1) = \mathfrak{R}_2(w_1),$$

womit alles gezeigt ist.

Für den Fall der Spiegelung an $\mathfrak{k}_1$ aber ist $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1\overline{\mathfrak{R}}\mathfrak{R}_1$ und $\overline{w}_1 = \mathfrak{R}_1(z_1)$, $\overline{w}_2 = \mathfrak{R}_1(z_2)$. Also ist in diesem Falle:

$$\overline{w}_2 = \mathfrak{R}_1(z_2) = \mathfrak{R}_1\overline{\mathfrak{R}}(\bar{z}_1) = \mathfrak{R}_1\overline{\mathfrak{R}}\mathfrak{R}_1(w_1) = \mathfrak{R}_2(w_1), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 11: *Führt eine lineare Abbildung* $w = \mathfrak{S}(z)$ *drei Punkte* z_λ, $(\lambda = 1, 2, 3)$, *eines Kreises* $\mathfrak{k}_1$ *in ihre Spiegelbilder* $w_\lambda = \mathfrak{S}(z_\lambda)$ *in Bezug auf einen Kreis* $\mathfrak{k}_2$ *über, dann führt sie jeden Punkt von* $\mathfrak{k}_1$ *in sein Spiegelbild bezüglich* $\mathfrak{k}_2$ *über. Es ist dann* $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{R}}_2\mathfrak{R}_1$, *d. h.*

4) Seine Gleichung ist $\bar{z} = \mathfrak{R}(z)$.

Digitized by Google

für jeden Punkt z^* auf $\mathfrak{k}_1$ ist $\overline{\mathfrak{K}}_2 \mathfrak{K}_1(z^*)$ sein Spiegelbild in Bezug auf $\mathfrak{k}_2$. Außerdem ist $\mathfrak{S}$ zu einem Kreiselement $\mathfrak{K}$ ähnlich, also

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{H}^{-1} \mathfrak{K} \mathfrak{H}^{5}).$$

Es handelt sich in diesem Satze um eine Verallgemeinerung von Satz 7, der mit $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{E}$ ein Sonderfall von Satz 11 ist.

Beweis: Für $\lambda = 1, 2, 3$ ist $w_\lambda = \mathfrak{S}(z_\lambda)$ und $\overline{w}_\lambda = \mathfrak{K}_2(z_\lambda) = \overline{\mathfrak{S}}(\overline{z}_\lambda) = \overline{\mathfrak{S}} \mathfrak{K}_1(z_\lambda)$. Daher wird $z_\lambda = \mathfrak{K}_2^{-1} \overline{\mathfrak{S}} \mathfrak{K}_1(z_\lambda)$. Somit besitzt $\mathfrak{K}_2^{-1} \overline{\mathfrak{S}} \mathfrak{K}_1$ drei Fixpunkte und ist deshalb gleich $\mathfrak{E}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{K}}_2 \mathfrak{K}_1$ ist. Für jedes z^* auf $\mathfrak{k}_1$ ist $\overline{z}^* = \mathfrak{K}_1(z^*)$, also für alle diese $z^*: w = \mathfrak{S}(z^*) = \overline{\mathfrak{K}}_2 \mathfrak{K}_1(z^*) = \overline{\mathfrak{K}}_2(\overline{z}^*)$, $\overline{w} = \mathfrak{K}_2(z^*)$. Somit ist $w = \mathfrak{S}(z^*)$ zu z^* invers in Bezug auf $\mathfrak{k}_2$. Ferner hat bei reellem $\mathfrak{k}_2$ das Kreiselement $\mathfrak{K}_2$ positive Charakteristik und ist daher von der Form $\mathfrak{K}_2 = \overline{\mathfrak{H}}^{-1} \mathfrak{H}$; also wird nun $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}^{-1} \overline{\mathfrak{H}} \mathfrak{K}_1 \mathfrak{H}^{-1} \mathfrak{H}$; setzt man noch das Kreiselement $\overline{\mathfrak{H}} \mathfrak{K}_1 \mathfrak{H}^{-1} = \mathfrak{K}$, so wird schließlich $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}^{-1} \mathfrak{K} \mathfrak{H}$. Man erkennt übrigens leicht die Umkehrung: Ist $\mathfrak{S}$ zu einem Kreiselement ähnlich, dann gibt es sicher zwei Kreise $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ derart, daß $w = \mathfrak{S}(z)$ jeden Punkt z von $\mathfrak{k}_1$ in sein Spiegelbild bezüglich $\mathfrak{k}_2$ überführt; dabei ist $\mathfrak{k}_2$ reell. Denn mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}^{-1} \mathfrak{K} \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}_1 = \overline{\mathfrak{H}}^{-1} \mathfrak{K} \mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}_2 = \overline{\mathfrak{H}}^{-1} \mathfrak{H}$ wird $\overline{\mathfrak{K}}_2 \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{S}$ und $w = \mathfrak{S}(z) = \overline{\mathfrak{K}}_2 \mathfrak{K}_1(z)$ führt jeden Punkt z auf $\mathfrak{k}_1$ in sein Spiegelbild bezüglich $\mathfrak{k}_2$ über.

Satz 12: *Enthält ein Kreis $\mathfrak{k}_1$ zwei verschiedene Punkte z_1, z_2, die in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{k}_2$ invers sind, dann besteht $\mathfrak{k}_1$ aus lauter Paaren von Punkten, die in Bezug auf $\mathfrak{k}_2$ invers zu einander sind, und es ist dann:*

$$\overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 = \overline{\mathfrak{K}}_2 \mathfrak{K}_1 \tag{20}$$

und diese Beziehung zieht umgekehrt die Tatsache nach sich, daß $\mathfrak{k}_1$ aus lauter Paaren bezüglich $\mathfrak{k}_2$ inverser Punkte besteht. Die Gleichung (20) ist also die notwendige und hinreichende Bedingung für die Orthogonalität der beiden Kreise.

Beweis: Da z_1, z_2 auf $\mathfrak{k}_1$ liegen und zu einander invers in Bezug auf $\mathfrak{k}_2$ sind, so ist neben der Bedingung $\overline{z}_2 = \mathfrak{K}_1(z_2)$ auch noch $\overline{z}_2 = \mathfrak{K}_2 \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2(z_2)$ erfüllt; denn spiegelt man $\mathfrak{k}_1$ an $\mathfrak{k}_2$, so enthält der nach Satz 9 entstehende Kreis $\overline{z} = \mathfrak{K}_2 \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2(z)$ das Spiegelbild von z_1 in Bezug auf $\mathfrak{k}_2$, d. h. den Punkt z_2, was der Sinn der letzten Gleichung ist. Somit ergibt sich

$$\mathfrak{K}_1(z_2) = \mathfrak{K}_2 \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2(z_2)$$

5) Die letzte Behauptung setzt $\mathfrak{k}_2$ als reell voraus.

Digitized by Google

oder:

$$\overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 (z_2) = z_2, \tag{a}$$

und genau ebenso ist:

$$\overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 (z_1) = z_1. \tag{b}$$

Also besitzt $w = \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 (z)$ die beiden verschiedenen Fixpunkte z_1 und z_2. Aus $\bar{z}_2 = \mathfrak{K}_1 (z_2) = \mathfrak{K}_2 (z_1)$ folgt aber:

$$\overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 (z_1) = z_2, \tag{c}$$

und entsprechend:

$$\overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 (z_2) = z_1. \tag{d}$$

Also hat mit $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2$ die Abbildung $w = \mathfrak{S}(z)$ weder z_1 noch z_2 zu Fixpunkten; also besitzt sie einen Fixpunkt z_3, der von z_1 und z_2 verschieden ist. Daher hat $w = \mathfrak{S}^2(z)$ ebenfalls z_3 zum Fixpunkt und nach (a) und (b) auch noch die Fixpunkte z_1 und z_2. Da somit $w = \mathfrak{S}^2(z)$ mehr als zwei Fixpunkte hat, ist $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{E}$ und diese Gleichung ist mit (20) gleichbedeutend. Schreibt man die damit bewiesene Gleichung (20) in der Gestalt: $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 \overline{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2$, so besagt sie nach Satz 9, daß der Kreis $\mathfrak{k}_1$ bei der Spiegelung an $\mathfrak{k}_2$ in sich selbst übergeht; also liegt für jedes z auf $\mathfrak{k}_1$ sein in Bezug auf $\mathfrak{k}_2$ inverser Punkt auch auf $\mathfrak{k}_1$, womit alles gezeigt ist.

Ich schließe mit folgender Bemerkung: mit jedem Kreise $\bar{z} = \mathfrak{K}(z)$ sind zugleich auch für jedes ganze m durch $\bar{z} = \mathfrak{K}^m(z)$ weitere Kreise gegeben. Über ihre gegenseitigen Beziehungen lassen sich allerlei Aussagen machen; doch gehen wir darauf nicht ein.

§ 4.

Wir betrachten jetzt die Spiegelungen an Kreisen und die Zusammensetzung dieser Spiegelungen untereinander und mit linearen Abbildungen. Spiegelungen bezeichnen wir mit σ, σ_1, usw. Genauer: die Spiegelung am Kreise $\mathfrak{k}$ mit $\sigma_\mathfrak{k}$; das bedeutet also den Übergang von z_1 zu z_2, falls $\bar{z}_2 = \mathfrak{K}(z_1)$ ist. Die Spiegelung an der reellen Achse werde mit σ_0 bezeichnet. Dann ist:

$$\sigma_\mathfrak{E} = \sigma_0; \quad \sigma_0(z) = \bar{z}. \tag{21}$$

Ferner gilt:

$$\sigma^{-1} = \sigma, \quad \sigma^2 = \mathfrak{E}. \tag{22}$$

Bedeutet nun $\mathfrak{S}$ irgend ein Element von Φ, so ist weiter:

$$\overline{\mathfrak{S}} = \sigma_0 \mathfrak{S} \sigma_0. \tag{23}$$

Digitized by Google

Denn mit $\mathfrak{S}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ wird $\bar{\mathfrak{S}}(z) = \frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}}$ und

$$\mathfrak{S}\sigma_0(z) = \mathfrak{S}(\bar{z}) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}.$$

Also folgt schließlich:

$$\sigma_0\mathfrak{S}\sigma_0(z) = \frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}} = \bar{\mathfrak{S}}(z).$$

Wegen (23) sind also die Kreiselemente durch $(\sigma_0\mathfrak{S})^2 = \mathfrak{E}$ charakterisiert. Aus (22) und (23) folgt für jedes $\mathfrak{S}$:

$$\sigma_0\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{S}}\sigma_0. \tag{24}$$

Als Ausdruck für die Spiegelung am Kreise $\mathfrak{k}$ haben wir nun:

$$\sigma_\mathfrak{k} = \sigma_0\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{K}}\sigma_0. \tag{25}$$

Denn für den zu z bezüglich $\mathfrak{k}$ spiegelbildlichen Punkt z_1 ist $\bar{z}_1 = \mathfrak{K}(z)$, also $z_1 = \bar{\mathfrak{K}}(\bar{z}) = \sigma_\mathfrak{k}(z) = \bar{\mathfrak{K}}\sigma_0(z)$, woraus ja (25) folgt. Führt man nun zwei Spiegelungen hinter einander aus, erst an $\mathfrak{k}_1$ und dann an $\mathfrak{k}_2$, so folgt aus (22) und (25):

$$\sigma_{\mathfrak{k}_2}\sigma_{\mathfrak{k}_1} = \bar{\mathfrak{K}}_2\sigma_0\sigma_0\mathfrak{K}_1 = \bar{\mathfrak{K}}_2\mathfrak{K}_1.$$

Also haben wir:

$$\sigma_{\mathfrak{k}_2}\sigma_{\mathfrak{k}_1} = \bar{\mathfrak{K}}_2\mathfrak{K}_1. \tag{26}$$

In Verbindung mit Satz 12 ergibt sich daraus:

Satz 13: *Zwei Spiegelungen sind dann und nur dann vertauschbar, wenn die Kreise, an denen die Spiegelungen vorgenommen werden, zu einander orthogonal sind. Das Produkt zweier Spiegelungen ist eine lineare Abbildung; sie gehört zu einem Element aus Φ, das sich als Produkt zweier Kreiselemente darstellt.*

Satz 14: *Sind σ und σ_1 die Spiegelungen an den Kreisen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_1$, so stellt $\sigma_2 = \sigma^{-1}\sigma_1\sigma = \sigma\sigma_1\sigma$ die Spiegelung an dem Kreise $\mathfrak{k}_2$ dar, der zum Kreiselement $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}_1\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{K}}^{-1}\bar{\mathfrak{K}}_1\mathfrak{K}$ gehört und dessen Gleichung also $\bar{z} = \mathfrak{K}_2(z)$ ist. Nach Satz 9 ist $\mathfrak{k}_2$ das Spiegelbild von $\mathfrak{k}_1$, wenn man diesen Kreis an $\mathfrak{k}$ spiegelt.*

Beweis: Mit $\sigma = \sigma_0\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{K}}\sigma_0$ und $\sigma_1 = \sigma_0\mathfrak{K}_1$ wird:

$$\sigma_2 = \sigma\sigma_1\sigma = \bar{\mathfrak{K}}\sigma_0\sigma_0\mathfrak{K}_1\sigma_0\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{K}}\mathfrak{K}_1\sigma_0\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{K}}\sigma_0\bar{\mathfrak{K}}_1\mathfrak{K} = \sigma_0\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}_1\mathfrak{K} = \sigma_0\mathfrak{K}_2,$$

woraus nach Gleichung (25) und Satz 9 alles folgt.

Satz 15: *Ist σ die Spiegelung am Kreise $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{S}$ irgend ein*

Digitized by Google

Element von Φ, so ist $\sigma_1 = \mathfrak{S}^{-1}\sigma\mathfrak{S}$ die Spiegelung an dem Kreise $\mathfrak{k}_1$, der aus dem Kreise $\mathfrak{k}$ der z-Ebene mittels der Abbildung $z = \mathfrak{S}(w)$ in der w-Ebene entsteht.

Beweis: $\mathfrak{S}^{-1}\sigma\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1}\sigma_0\mathfrak{R}\mathfrak{S} = \sigma_0\bar{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{S} = \sigma_0\mathfrak{R}_1$. Hierbei bedeutet $\mathfrak{R}_1$ das Kreiselement $\bar{\mathfrak{S}}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$, woraus nach Satz 8 unser Satz unter Beachtung von (25) bewiesen ist.

Satz 16: *Setzt sich ein Element $\mathfrak{S}$ aus $2r$ Spiegelungen zusammen und ist $\mathfrak{S}_1$ zu $\mathfrak{S}$ ähnlich, also $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$, so läßt sich auch $\mathfrak{S}_1$ aus $2r$ Spiegelungen zusammensetzen.*

Beweis: Ist $\mathfrak{S} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{2r}$ und setzt man $\mathfrak{T}^{-1}\sigma_\lambda\mathfrak{T} = \sigma'_\lambda$, so ist nach Satz 15 σ'_λ eine Spiegelung, und wir erhalten für $\mathfrak{S}_1$ die Darstellung:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{2r}\mathfrak{T} = \sigma'_1\sigma'_2\ldots\sigma'_{2r},$$

womit alles gezeigt ist.

Ist $\mathfrak{S}$ irgend ein Element von Φ und $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ irgend eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene Matrix, so ist

$$Q = \frac{(a+d)^2}{ad-bc} \tag{27}$$

für alle S aus $\mathfrak{S}$ ein und dieselbe Größe, also eine Invariante von $\mathfrak{S}$; wir können sie mit $Q(\mathfrak{S})$ bezeichnen. Ganz analog hat man bei beliebigem n, falls dann $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene Matrix ist und $S(A) = \sum_1^n{}_{\varkappa} a_{\varkappa\varkappa}$ die Spur von A bezeichnet, als eine Invariante von $\mathfrak{S}$ den Ausdruck:

$$Q(\mathfrak{S}) = \frac{(S(A))^n}{|A|} = \frac{\left(\sum_1^n{}_{\varkappa} a_{\varkappa\varkappa}\right)^n}{|a_{\varkappa\lambda}|}. \tag{27a}$$

Satz 17: *Ist $\mathfrak{S}_1$ zu $\mathfrak{S}$ ähnlich, also $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$, so ist $Q(\mathfrak{S}_1) = Q(\mathfrak{S})$.*

Beweis: Zunächst hat offenbar der Ausdruck (27a) für alle in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Matrizen denselben Wert. Ist nun in $\mathfrak{S}$ die Matrix A, in $\mathfrak{T}$ die Matrix T enthalten, so ist in $\mathfrak{S}_1$ die Matrix $A_1 = T^{-1}AT$ enthalten; A_1 und A besitzen gleiche Determinanten und gleiche Spuren, weil ja die Spur die Summe der charakteristischen Wurzeln ist und diese bei A_1 und A übereinstimmen. Aus alledem folgt die Richtigkeit des Satzes.

Teilt man nun Φ in Klassen unter einander ähnlicher Elemente ein, so ist für alle $\mathfrak{S}$ einer und derselben Klasse $Q(\mathfrak{S})$ auf Grund des letzten Satzes eine feste Zahl, die also der Klasse eigentümlich ist. Für den Fall $n = 2$ aber ergibt sich sogar,

Digitized by Google

daß auch umgekehrt zu zwei verschiedenen Klassen verschiedene Q gehören (von einer Ausnahme abgesehen), sodaß i. A. jede Klasse bereits durch Angabe von Q charakterisiert ist. Der Ausnahmefall liegt nur bei $Q = 4$ vor, wie sich zeigen wird. Am schnellsten gelangen wir zu diesen Dingen durch Benutzung der Fixpunkte linearer Abbildungen.

Rechnet man für $w = \mathfrak{S}(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ die Fixpunkte aus, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für das Zusammenfallen der Fixpunkte[6]: $Q = 4$. Bei $Q \neq 4$ haben wir also getrennte Fixpunkte. Nun gilt folgender

Satz 18: *Teilt man Φ in Klassen unter einander ähnlicher Elemente $\mathfrak{S}$ ein, so enthält jede Klasse ein Element $\mathfrak{S}^*$, für das $w = \mathfrak{S}^*(z)$ eine ganze Funktion ist, und zwar ist bei $Q \neq 4$ dies $\mathfrak{S}^*$ durch die Matrix $S^* = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $k \neq 1$ definiert; dagegen ist bei $Q = 4$ dieses $\mathfrak{S}^*$ durch die Matrix $S^* = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ definiert.*

Beweis: Das Element $\mathfrak{E}$ von Φ bildet für sich allein eine Klasse; für sie ist $Q = 4$, $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{E}$, $S^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Von dieser Klasse dürfen wir jetzt absehen, da ja für sie die Behauptung richtig ist. Betrachten wir daher irgend eine andere beliebige Klasse; man überzeugt sich leicht, daß es in ihr ein Element $\mathfrak{S}$ gibt, für das $w = \mathfrak{S}(z)$ keine ganze Funktion ist. Ihre Fixpunkte ξ_1, ξ_2 sind dann endlich; bei $Q \neq 4$ ist $\xi_1 \neq \xi_2$; bei $Q = 4$ aber ist $\xi_1 = \xi_2 = \xi$.

Im Falle $Q \neq 4$ bringt man dann bekanntlich $w = \mathfrak{S}(z)$ auf die Gestalt:

$$\frac{w-\xi_1}{w-\xi_2} = k\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2},$$

und wenn man dann

$$\frac{w-\xi_1}{w-\xi_2} = w', \quad w = \mathfrak{T}(w'); \qquad \frac{z-\xi_1}{z-\xi_2} = z', \quad z = \mathfrak{T}(z')$$

setzt, wird:

$$w' = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{T}(z') = \mathfrak{S}^*(z') = kz'.$$

$\mathfrak{S}^*$ ist zu $\mathfrak{S}$ ähnlich und also mit $\mathfrak{S}$ in einer Klasse gelegen. Es

6) Falls $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{E}$ ist. Bei $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ ist $Q = 4$, aber dann ist jeder Punkt Fixpunkt.

Digitized by Google

ist dann $S^* = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen $k + \frac{1}{k} + 2 = Q \neq 4$ ist $k \neq 1$. k ist durch die Invariante Q zweiwertig bestimmt; ist $k = k_1$ der eine Wert, so ist der zweite $k_2 = \frac{1}{k_1}$.

Im Falle $Q = 4$ aber haben wir nur den einen endlichen Fixpunkt ξ; dann bringt man bekanntlich $w = \mathfrak{S}(z)$ auf die Form:

$$\frac{1}{w - \xi} = \frac{1}{z - \xi} + b;$$

setzt man dann noch

$$w = \xi + \frac{1}{w'} = \mathfrak{T}(w'), \quad z = \xi + \frac{1}{z'} = \mathfrak{T}(z'),$$

so wird $w' = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{T}(z') = \mathfrak{S}^*(z') = z' + b$. $\mathfrak{S}^*$ ist zu $\mathfrak{S}$ ähnlich, liegt also mit $\mathfrak{S}$ in einer Klasse, und es ist $S^* = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, womit alles bewiesen ist.

Sind nun zwei Elemente $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ aus Φ gegeben und ist $Q(\mathfrak{S}_1) = Q(\mathfrak{S}_2)$, so folgt i. A. daraus, daß $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zu einander ähnlich sind, also in derselben Klasse liegen. Wir zeigen das folgendermaßen.

Ist nämlich erstens $Q = Q(\mathfrak{S}_1) = Q(\mathfrak{S}_2) \neq 4$, so ist nach Satz 18 $\mathfrak{S}_1^*$ zu $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2^*$ zu $\mathfrak{S}_2$ ähnlich, wobei $\mathfrak{S}_1^*$ durch $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{S}_2^*$ durch $\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bestimmt sind und

$$k_1 + \frac{1}{k_1} + 2 = k_2 + \frac{1}{k_2} + 2 = Q$$

ist; also ist entweder $k_1 = k_2$ oder $k_1 = \frac{1}{k_2}$. Bei $k_1 = k_2$ ist gewiß wegen $\mathfrak{S}_1^* = \mathfrak{S}_2^*$ das Element $\mathfrak{S}_1$ zu $\mathfrak{S}_2$ ähnlich. Im Falle $k_1 = \frac{1}{k_2}$ zeigt aber:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

daß $\mathfrak{S}_1^*$ zu $\mathfrak{S}_2^*$, also auch $\mathfrak{S}_1$ zu $\mathfrak{S}_2$ ähnlich ist.

Ist nun zweitens $Q = 4$, dann ist auf Grund von Satz 18 $\mathfrak{S}_1^*$ zu $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2^*$ zu $\mathfrak{S}_2$ ähnlich, wobei die Elemente $\mathfrak{S}_i^*$ durch $\begin{pmatrix} 1 & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bestimmt sind. Hierbei ist $b_\lambda \neq 0$, da wir $\mathfrak{S}_\lambda \neq \mathfrak{E}$ an-

Digitized by Google

nehmen wollen. Nun zeigt in diesem Falle

$$\begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = b_1 b_2 \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

daß $\mathfrak{S}_1^*$ zu $\mathfrak{S}_2^*$, also auch $\mathfrak{S}_1$ zu $\mathfrak{S}_2$ ähnlich ist; also liegen nun wirklich $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ in einer und derselben Klasse. Damit ist für den Fall $n = 2$ folgender Satz bewiesen:

Satz 19: *Teilt man Φ in lauter Klassen zu einander ähnlicher Elemente $\mathfrak{S}$ ein, so ist i. A. jede Klasse bereits völlig durch die Invariante Q bestimmt. Nur bei $Q = 4$ gibt es zwei Klassen, deren eine aus dem einzigen Elemente $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ besteht.*

Will man die Zusammensetzung einer linearen Abbildung aus Spiegelungen untersuchen, insbesondere erörtern, mit wieviel Spiegelungen man auskommt, so reduziert sich wegen Satz 16 und Satz 18, — weil es sich ja nur um eine gerade Anzahl von Spiegelungen handeln kann, — die Frage auf den Fall, daß $w = \mathfrak{S}(z) = kz$, $k \neq 1$, oder $w = z + b$ ist. Der Fall $w = z + b$ ist mit $Q = 4$ identisch. Es handelt sich hier also um die identische Abbildung oder eine Parallelverschiebung. In beiden Fällen ist dann gewiß $w = \mathfrak{S}(z)$ das Produkt zweier Spiegelungen (bei $b \neq 0$ an zwei zueinander parallelen Geraden). Ist aber $Q \neq 4$, dann haben wir die Abbildung $w = \mathfrak{S}(z) = kz$ mit $k \neq 1$ auf die Zusammensetzung aus Spiegelungen zu untersuchen. Wann läßt sich diese Abbildung aus zwei Spiegelungen zusammensetzen und wann nicht? Da der unendlich ferne Punkt Fixpunkt ist, kommt für den Fall, daß es mit nur zwei Spiegelungen gehen soll, nur eine solche Doppelspiegelung in Frage, bei der der unendlich ferne Punkt in sich selbst übergeht. Dabei ist außer Betracht zu lassen die zum Falle $Q = 4$ gehörende Spiegelung an zwei parallelen Geraden. Es bleiben also nur noch folgende Möglichkeiten übrig: a) die Spiegelung an zwei sich schneidenden Geraden; b) die Spiegelung an zwei konzentrischen Kreisen. Bei jeder andern Doppelspiegelung geht der unendlich ferne Punkt in einen endlichen über. Der Fall a) bedeutet eine reine Drehung; also: $k = e^{i\vartheta}$, wobei $0 < \vartheta < 2\pi$ ist. Der Fall b) ist für den Fall, daß es sich um zwei reelle oder zwei imaginäre Kreise handelt, eine reine Streckung mit $k > 0$; ist aber der eine Kreis reell und der andere Kreis imaginär, so handelt es sich auch um eine Streckung mit negativem k. In den Fällen $k = e^{i\vartheta}$ und $k > 0$ ist $Q = k + \frac{1}{k} \geqq 0$, und wenn $Q \geqq 0$ ist, ist umgekehrt $k > 0$ oder $k = e^{i\vartheta}$. Dagegen

Digitized by Google

ist in dem Falle der Doppelspiegelung an einem reellen und einem imaginären Kreise, also bei $k < 0$, die Invariante Q negativ, und wenn Q negativ ist, so ist auch k negativ, wie die quadratische Gleichung ergibt. Also läßt sich $w = \mathfrak{S}(z)$ bei $Q \geqq 0$ aus zwei Spiegelungen an reellen Kreisen zusammensetzen und umgekehrt. Dagegen ist bei negativem Q die Zusammensetzung aus zwei Spiegelungen noch möglich, wenn man einen imaginären Kreis als Spiegel zuläßt. Beschränkt man sich aber nur auf Spiegelungen an reellen Kreisen, dann braucht man bei negativem Q bereits vier Spiegelungen. Bei nicht reellem Q braucht man, wie die Gleichung $k = re^{i\vartheta}$ lehrt, unter allen Umständen vier Spiegelungen. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Satz 20: *Teilt man die Gruppe Φ aller linearen Abbildungen in Klassen ähnlicher ein, so lassen sich die Abbildungen einer Klasse, für die Q reell ist, bereits aus zwei Spiegelungen zusammensetzen; dagegen sind für die Abbildungen aller anderen Klassen zur Erzeugung vier Spiegelungen erforderlich. Beschränkt man sich nur auf Spiegelungen an reellen Kreisen, dann ist für die Zusammensetzung aus zwei Spiegelungen die Bedingung $Q \geqq 0$ charakteristisch. Bei negativem oder nicht reellem Q sind dann vier Spiegelungen erforderlich*[7]).

In Verbindung mit Gleichung (26) folgt nun für den Fall $n = 2$ aus Satz 20:

Satz 21: *Jedes Element $\mathfrak{S}$ aus Φ läßt sich aus zwei oder vier Kreiselementen zusammensetzen. Der erste Fall ist durch reelles Q charakterisiert, der zweite dadurch, daß Q nicht reell ist. Man kann die Zusammensetzung auch schon allein aus Kreiselementen positiver Charakteristik bewirken; dann ist der Fall, daß man mit zwei Kreiselementen auskommt, durch $Q \geqq 0$ gegeben; bei negativem oder nicht reellem Q dagegen braucht man dann vier Kreiselemente.*

7) Die Beantwortung der Frage nach den invarianten Kreisen bezw. Kreisbüscheln einer linearen Abbildung hängt im wesentlichen allein von der Kenntnis von Q ab.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXXIII. JAHRGANG

2. STÜCK

INHALT:

	Seite
Über die Strukturen einer Geometrie orientierter Punkte und einer Geometrie orientierter Geraden. Von **U. Graf**	37—46
Über die Erhaltung gewisser Flüssigkeitszustände. Von **A. Korn**	47—54
Über das Rechnen mit unendlich hohen Frequenzen in der Mechanik. Von **A. Korn**	55—61
Der Minkowskische Linearformensatz. Von **E. Jacobsthal**	62—64
Transformationstheorie der quadratischen Differentialgleichung erster Ordnung: $Ay'^2 + 2Byy' + Cy^2 + 2Dy' + 2Ey + F = 0$. Von **G. Hamel**	65—95
Über die Entwicklung nach Funktionen, die aus denen eines vollständigen Orthogonalsystems durch Integration hervorgehen. Von **A. Hammerstein**	96—101
Ein Beitrag zur Geometrie des Zirkels. Von **G. Scheffers**	102—109
Über eine Transformation von Variations- und Randwertproblemen. Von **H. O. Hirschfeld**	110—122
Berichte über die Sitzungen	35—36

1934

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

Mitteilungen.

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Oberinspektor M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschstraße 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 12 a).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

DREIUNDDREISSIGSTER JAHRGANG

1934
GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Brauer, A., Nachruf auf Hermann Zeitz	2—6
Graf, G., Über die Strukturen einer Geometrie orientierter Punkte und einer Geometrie orientierter Geraden	37—46
Hamel, G., Transformationstheorie der quadratischen Differentialgleichung erster Ordnung: $Ay'^2+2Byy'+Cy^2+2Dy'+2Ey+F=0$	65—95
Hammerstein, A., Über die Entwicklung nach Funktionen, die aus denen eines vollständigen Orthogonalsystems durch Integration hervorgehen	96—101
Hirschfeld, H. O., Über eine Transformation von Variations- und Randwertproblemen	110—122
Jacobsthal, E., Zur Theorie der linearen Abbildungen	15—34
Jacobsthal, E., Der Minkowskische Linearformensatz	62—64
Korn, A., Über die Erhaltung gewisser Flüssigkeitszustände	47—54
Korn, A., Über das Rechnen mit unendlich hohen Frequenzen in der Mechanik	55—61
Mühlendyck, O., Über eine Transformation orientierter Strahlen . .	7—14
Scheffers, G., Ein Beitrag zur Geometrie des Zirkels	102—109
295. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 25. Oktober 1933	1
296. „ am 29. November 1933	1
297. „ „ 13. Dezember „	35
298. „ „ 31. Januar 1934	35
299. „ „ 28. Februar „	35
300. „ „ 21. März „	35
301. „ „ 25. April „	35
302. „ „ 30. Mai „	36
303. „ „ 27. Juni „	36

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

297. Sitzung am 13. Dezember 1933.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 15 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Graf: Über die Strukturen einer Geometrie orientierter Punkte und einer Geometrie orientierter Geraden.

Herr Heegner: Ein Satz über elliptische Funktionen.

298. Sitzung am 31. Januar 1934.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 24 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Korn: 1. Über die Erhaltung gewisser Flüssigkeitszustände.

2. Über das Rechnen mit unendlich hohen Frequenzen in der Mechanik. (Ein neues Rechenverfahren.)

299. Sitzung am 28. Februar 1934.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 16 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr E. Jacobsthal: Über den Minkowskischen Linearformensatz.

Herr Haentzschel: Ein allgemeiner Satz aus der Theorie der diophantischen Gleichungen vierten Grades.

300. Sitzung am 21. März 1934.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 40 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr R. Rothe: Zur 300. Sitzung. Eine Erinnerung.

Herr Hamel: Über gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zweiten Grades.

301. Sitzung am 25. April 1934.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 21 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Hammerstein: Über die Approximation stetiger Funktionen durch ein gegebenes Funktionensystem.

Herr Fuchs: Über eine in der Tragflügeltheorie auftretende Integralgleichung.

Digitized by Google

302. Sitzung am 30. Mai 1934.

Vorsitzender: Herr E. Jacobsthal. Anwesend: 32 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Scheffers: Ein Beitrag zur Geometrie des Zirkels.

Herr Salkowski: Über die Projektivnormale.

303. Sitzung am 27. Juni 1934.

Vorsitzender: Herr E. Jacobsthal. Anwesend: 31 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Hirschfeld: Über eine Transformation von Variations- und Randwertproblemen.

Herr R. Rothe: Bemerkungen zur Bestimmung der Schußbahn.

Digitized by Google

Über die Strukturen einer Geometrie orientierter Punkte und einer Geometrie orientierter Geraden[1]).

Von Ulrich Graf in Berlin.

Als duales Gegenstück der Laguerreschen Geometrie orientierter Geraden (Speere) in der Ebene läßt sich in analoger Weise eine Geometrie mit dem orientierten Punkt als Element entwickeln. Im Falle einer hyperbolischen oder elliptischen Maßbestimmung in der Ebene wird diese Geometrie unmittelbar mit Hilfe der absoluten Polarität aus der Laguerreschen gewonnen; im Falle einer euklidischen Metrik dagegen bedingt die Singularität des Fundamentalgebildes eine verschiedene Struktur der beiden Geometrien. Ähnlich, wie die engere Laguerresche Gruppe der Ebene auf Grund der zyklographischen Projektion als Lorentzgruppe der speziellen Relativitätstheorie in einer dreidimensionalen „Welt" erscheint, erweist sich die entsprechende Gruppe in der Geometrie orientierter Punkte als isomorph den Galilei-Newton-Transformationen der klassischen Mechanik.

Die Maßbestimmung in der Ebene gründe sich bei Benutzung der homogenen Punktkoordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ auf den Kegelschnitt

$$k^2 x_1^2 + k^2 x_2^2 - x_3^2 = 0$$

als absolutes Gebilde. In den inhomogenen Koordinaten

$$x : y : 1 = x_1 : x_2 : x_3$$

lautet seine Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Je nachdem k^2 gleich $+1, 0, -1$ gesetzt wird, liegt die hyperbolische, euklidische, elliptische Geometrie vor.

Die Punkte des Fundamentalgebildes lassen sich durch einen Parameter λ in der Form

$$x_1 : x_2 : x_3 = 2\lambda : (1 - \lambda^2) : k(1 + \lambda^2)$$

darstellen. Sind zwei Punkte auf dem absoluten Kegelschnitt

1) Vorgetragen in der 297. Sitzung am 13. Dezember 1933.

Digitized by Google

durch ihre Parameterwerte λ und μ gegeben, so bestimmen sich die Koordinaten

$x_1 : x_2 : x_3$ des Schnittpunktes ihrer isotropen Geraden zu

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\lambda+\mu) : (1-\lambda\mu) : k(1+\lambda\mu).$$

$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ ihrer Verbindungsgeraden zu

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = k(\lambda+\mu) : k(1-\lambda\mu) : -(1+\lambda\mu).$$

Werden die beiden absoluten Punkte (λ) und (μ) in eine bestimmte Reihenfolge gesetzt, die sich symbolisch durch $\{\lambda\mu\}$ bzw. $\{\mu\lambda\}$ darstellen läßt, so bestimmt diese Anordnung

um den Punkt $x_1 : x_2 : x_3$ einen Drehsinn. Ein mit einer Umdrehungsrichtung versehener Punkt wird als orientierter Punkt bezeichnet; zu seiner Charakterisierung wird als Orientierungskoordinate

$$x_0 = ik \cdot (\lambda - \mu)$$

eingeführt [1]).

Zwischen den Koordinaten x_λ besteht die quadratische Relation

$$(1\,a) \quad x_0^2 + k^2 x_1^2 + k^2 x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

auf der Geraden $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ einen Durchlaufungssinn. Eine mit einem Durchlaufungssinne versehene Gerade wird als orientierte Gerade (Speer) bezeichnet; zu ihrer Charakterisierung wird als Orientierungskoordinate

$$\xi_0 = k(\lambda - \mu)$$

eingeführt [1]).

Zwischen den Koordinaten ξ_λ besteht die quadratische Relation

$$(1\,b) \quad \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + k^2 \xi_3^2 = 0.$$

Jedes Element $x_1 : x_2 : x_3$ bzw. $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ trägt zwei zueinander entgegengesetzt orientierte Elemente, die sich durch das Vorzeichen der Orientierungskoordinate x_0 bzw. ξ_0 unterscheiden. Auf einem absoluten Punkt $(x_0 = 0)$ bzw. einer isotropen Geraden $(\xi_0 = 0)$ liegt nur ein einziges orientiertes Element, das zu sich selbst entgegengesetzt heißt. Die Gesamtheit aller zu sich selbst entgegengesetzten Punkte bzw. Geraden stellt den absoluten Kegelschnitt als Ordnungs- bzw. Klassengebilde dar.

Werden die Koordinaten x_λ bzw. ξ_λ eines orientierten Elementes als homogene Ebenenkoordinaten H_λ gedeutet:

$$(2\,a) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \varkappa H_0 : H_1 : H_2 : H_3$$

bzw.

$$(2\,b) \quad \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \varkappa H_0 : H_1 : H_2 : H_3,$$

1) Bei dieser Wahl der Orientierungskoordinate können die x_λ bzw. ξ_λ für *eigentliche* Punkte bzw. Gerade *reell* genommen werden. Vergl. die Einführung orientierter Elemente z. B. bei H. Beck „Koordinatengeometrie", Berlin 1919, S. 297.

Digitized by Google

wobei $\varkappa$ die Werte 1 oder i annehmen kann, so erscheint die quadratische Relation (1) in der Form

(3a) $$\varkappa^2 H_0^2 + k^2 H_1^2 + k^2 H_2^2 - H_3^2 = 0$$

bzw.

(3b) $$\varkappa^2 H_0^2 - H_1^2 - H_2^2 + k^2 H_3^2 = 0,$$

d. h. als Gleichung einer Fläche zweiter Klasse. Jeder Tangentialebene dieser Fläche ist eineindeutig ein orientiertes Element der Ebene zugeordnet.

Einem Punkte A $(A_0 : A_1 : A_2 : A_3)$ des Raumes entspricht die durch eine homogene lineare Gleichung

(4a) $$(Ax) \equiv \varkappa^{-1} A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

bzw.

(4b) $$(A\xi) \equiv \varkappa^{-1} A_0 \xi_0 + A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3 = 0$$

festgelegte Mannigfaltigkeit von ∞^1 orientierten Elementen derart, daß diese die Bilder der ∞^1 Tangentialebenen der Fläche durch den Raumpunkt sind.

Die Geometrie orientierter Elemente in der Ebene ist so als Geometrie in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit unter Auszeichnung des quadratischen Gebildes (3a) bzw. 3b) gedeutet.

Im Falle einer hyperbolischen ($k^2 = +1$) oder elliptischen ($k^2 = -1$) Maßbestimmung sind die beiden Flächen (3) nicht singulär. Die Geometrie orientierter Punkte und die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden besitzen demnach dieselbe Struktur, nämlich die einer räumlichen Geometrie mit *nicht singulärer* quadratischer Fundamentalfläche. Die Ausdrücke (4) stellen Zykel, d. h. orientierte Kreise dar; nach (2) entsprechen den ∞^3 Zykeln der Ebene eineindeutig die ∞^3 Punkte des Raumes.

Die Flächen (3a) und (3b) prägen als absolute Fundamentalgebilde dem dreidimensionalen Raume eine Metrik auf. Im Sinne dieser Maßbestimmung ist die Entfernung $\overline{AB}$ zweier Punkte A $(A_0 : A_1 : A_2 : A_3)$ und B $(B_0 : B_1 : B_2 : B_3)$ auf Grund der Cayleyschen Metrikdefinition[3]) durch

(5) $$\overline{AB} = \frac{1}{2k} \cdot \ln \frac{\{AB\} + \sqrt{\{AB\}^2 - \{AA\}\{BB\}}}{\{AB\} - \sqrt{\{AB\}^2 - \{AA\}\{BB\}}}$$

---

3) Vergl. z. B. F. Klein: „Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie", Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 268.

Digitized by Google

mit

$$\{XY\} \equiv k^2 X_0 Y_0 + \varkappa^2 X_1' Y_1 + \varkappa^2 X_2 Y_2 - \varkappa^2 k^2 X_3 Y_3 \tag{6a}$$

bzw.

$$\{XY\} \equiv k^2 X_0 Y_0 - \varkappa^2 k^2 X_1 Y_1 - \varkappa^2 k^2 X_2 Y_2 + \varkappa^2 X_3 Y_3 \tag{6b}$$

bestimmt.

Durch die Abbildung (2a) sind den Punkten A und B die beiden Punktzykel $(Ax) = 0$ und $(Bx) = 0$ zugeordnet. Die Berechnung des Schnittwinkels φ dieser Zykel und der Vergleich mit dem Ausdruck (5) zeigt, daß φ durch die Entfernung $\overline{AB}$ der beiden Raumpunkte auf Grund der Beziehung

$$k \cdot \overline{AB} = i \cdot \varphi \tag{7a}$$

festgelegt ist.

Durch die Abbildung (2b) sind den Punkten A und B die beiden Speerzykel $(A\xi) = 0$ und $(B\xi) = 0$ zugeordnet. Die Distanz d dieser Zykel, d. h. die Länge der ihnen gemeinsamen Tangente, gemessen von Berührungspunkt zu Berührungspunkt, erweist sich gleich der Entfernung $\overline{AB}$ der beiden Raumpunkte A und B:

$$\overline{AB} = d. \tag{7b}$$

Die sechsgliedrige Gruppe der bezüglich der Fläche (3) automorphen Kollineationen, d. h. der starren Transformationen der räumlichen Maßbestimmung, ist derjenigen sechsgliedrigen Transformationsgruppe der Ebene isomorph, die orientierte Elemente und Zykel in je ebensolche überführt. Für die Speergeometrie ist diese Gruppe die Laguerresche Gruppe.

Invariant bleibt bei diesen Transformationen der Ebene der Schnittwinkel φ bzw. die Distanz d zweier Zykel; ihre Invarianz geht mit der Invarianz der Metrik gegenüber den starren Transformationen des Raumes Hand in Hand.

Den Zusammenhang zwischen der Geometrie orientierter Punkte und der Geometrie orientierter Geraden vermittelt die absolute Polarität, die im elliptischen Falle einem eigentlichen Punkt eine eigentliche Gerade, im hyperbolischen Falle einem eigentlichen Punkt eine ideelle Gerade zuordnet.

Im Falle der euklidischen Metrik ($k^2 = 0$) in der Grundebene ist die Fläche (3a)

$$\varkappa^2 H_0^2 - H_3^2 = 0 \tag{8a}$$

ein zweifach, die Fläche (3b)

Digitized by Google

(8 b) $$x^2 H_0^2 - H_1^2 - H_2^2 = 0$$

dagegen ein einfach singuläres Gebilde zweiter Klasse; in einer euklidischen Ebene haben demnach die Geometrie orientierter Punkte und die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden verschiedene Strukturen. Der Grund hierfür liegt in der Singularität des der euklidischen Metrik zu Grunde liegenden imaginären Kreispunktepaares, zu dessen Darstellung als Ordnungsgebilde zwei Gleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \qquad x_3 = 0$$

erforderlich sind, während es als Klassengebilde durch eine Gleichung

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$$

festgelegt ist.

Für die *Speergeometrie* stellt der Ausdruck (4b) einen orientierten Kreis mit dem Mittelpunkt $a = \frac{a_1}{a_3}$, $b = \frac{a_2}{a_3}$ und dem Radius $r = \frac{a_0}{\varkappa a_3}$ dar. Die Bezugsfläche (8b) erscheint bei Benutzung der inhomogenen Punktkoordinaten

$$x : y : z : 1 = X_1 : X_2 : X_0 : X_3$$

als Schnitt des Kegels

(9) $$x^2 + y^2 - \varkappa^2 z^2 = 0$$

mit der uneigentlichen Ebene. Die durch (2b) gegebene Abbildung ist für $\varkappa = 1$ die zyklographische Projektion, für $\varkappa = i$ die Minimalprojektion; jedem Zykel mit dem Mittelpunkt a, b und dem Radius r wird eineindeutig der Punkt a, b, $\varkappa r$ im Raume zugeordnet.

Die zyklographische Projektion kann zur Deutung einer Transformationsgruppe der Physik in der Kreisgeometrie der Ebene dienen [4]). Diese Zuordnung bildet nämlich die engere Laguerresche Gruppe L_6 in der euklidischen Ebene auf diejenige Gruppe von affinen Transformationen des Raumes ab, die den reellen uneigentlichen Kegelschnitt (8b) fest lassen, d. h. auf die starren Transformationen der durch (8b) als Fundamentalgebilde gegebenen pseudoeuklidischen räumlichen Maßbestimmung, und diese sechsgliedrige Gruppe ist die *Lorentzgruppe* der speziellen Relativitätstheorie in einer dreidimensionalen „Welt". Wird an Stelle der z-Koordinate die Zeiteinheit ct eingeführt, so sind diese Trans-

4) Vergl. diese Abbildung z. B. bei W. Blaschke „Vorlesungen über Differentialgeometrie III", Berlin 1929, Seite 136 ff.

Digitized by Google

formationen durch

$$(10)\qquad \begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}t + c_{14}, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}t + c_{24}, \\ t' = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}t + c_{34} \end{cases}$$

dargestellt, wobei die zwölf Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ sechs wesentlichen Bedingungsgleichungen auf Grund der Forderungen unterliegen, daß die Substitution die quadratische Form (9) in ein Multiplum ihrer selbst überführen und die Determinante $|c_{\mu\nu}|$, $\mu, \nu = 1, 2, 3$ einen der Werte ± 1 haben soll[5]). (Diese letzte Einschränkung schließt die „Ähnlichkeitstransformationen" aus, deren Existenz durch die Singularität des Fundamentalgebildes (8b) bedingt ist). Die Invariante

$$\sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 - c^2(t-\bar{t})^2}$$

der Gruppe (10), d. h. die pseudoeuklidische „Entfernung" der beiden Weltpunkte $x, y, z = ct$ und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = c\bar{t}$, entspricht der Distanz ihrer beiden Bildzykel.

Für die *Punktgeometrie* erscheint die ausgezeichnete, zweifach singuläre Klassenfläche (8a) als ein Paar von Ebenenbündeln, deren Zentren bei Benutzung der inhomogenen Punktkoordinaten

$$x : y : z : 1 = X_1 : X_2 : X_0 : X_3$$

durch

$$\Xi(x = y = 0,\ z = +\varkappa), \qquad H(x = y = 0,\ z = -\varkappa)$$

gegeben sind. Die orientierten Punkte x_λ sind durch (2a) den Ebenen dieser Bündel zugeordnet, und zwar gehen die Bildebenen aller in positivem Drehsinne orientierten Punkte durch Ξ, aller in negativem Drehsinne orientierten Punkte durch H. Die Spurgerade der Bildebene eines Punktes x_λ mit der x-y-Grundebene ist die Polare von x_λ bezüglich des nullteiligen Einheitskreises.

Diese Abbildung der orientierten Punkte der Ebene auf die Ebenen zweier Bündel ist die in der Photogrammetrie benutzte „gnonomische Reziprokalkorrelation"; sie spielt für die Geometrie orientierter Punkte dieselbe Rolle wie die zyklographische Projektion ($\varkappa = 1$) oder Minimalprojektion ($\varkappa = i$) für die Geometrie orientierter Geraden.

Den ∞^1 zu sich selbst entgegengesetzten Punkten $x_0 = 0$, die

---

5) Vergl. F. Klein: „Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe", D. M. V. 19, (1910); Ges. Math. Abh. I, S. 533.

Digitized by Google

von der uneigentlichen Geraden getragen werden, sind die ∞^1 Ebenen des Büschels mit der Achse (ΞH) zugeordnet.

Ein Punkt A $(A_0 : A_1 : A_2 : A_3 = Z : X : Y : 1)$ des Raumes bestimmt zwei Ebenenbüschel mit den Achsen $(A\,\Xi)$ und $(A\,H)$. Diesem Büschelpaar entspricht in der Grundebene ein Paar paralleler Geraden, wobei jede dieser Geraden ein Reihe gleichgerichtet orientierter Punkte trägt, während auf verschiedenen Geraden des Paares gelegene Punkte entgegengesetzte Orientierung besitzen. Die Figur dieser beiden Parallelreihen orientierter Punkte ist das Analogon des Zykels der Speergeometrie; analytisch ist das Parallelenpaar durch (4a) mit $x_0^2 - x_3^2 = 0$ in der Form

$$X \cdot x + Y \cdot y + (1 \pm x^{-1} Z) = 0$$

gegeben. Für die Punkte in der Grundebene $(Z = 0)$ fällt das Paar in eine doppelt zählende Gerade zusammen.

Eine Gerade g des Raumes ist in der x-y-Ebene durch ein verschieden orientiertes Punktepaar festgelegt. Diese Punkte sind die Bilder der beiden durch g und die Fundamentalpunkte Ξ und H bestimmten Ebenen. Die ∞^1 Punkte der Geraden haben zu Bildern die ∞^1 parallelen Punktreihen, die sich durch das orientierte Punktepaar legen lassen. Die so durch zwei (zueinander entgegengesetzt) orientierte Punkte festgelegte Mannigfaltigkeit von ∞^1 Punktreihenpaaren entspricht der Figur der durch zwei Speere gegebenen linearen Zykelreihe in der Speergeometrie.

Das Bild einer Ebene

$$\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0 \tag{11}$$

oder

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_0 z + \alpha_3 = 0$$

ist eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 orientierten Parallelreihen. Die ∞^1 Punkte der Spurgeraden von (11) mit der Grundebene entsprechen den ∞^1 doppelt zählenden Geraden des Büschels mit dem Zentrum

$$M\left(x_m = \frac{\alpha_1}{\alpha_3},\quad y_m = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right).$$

Wie leicht bestätigt wird, teilt dieser Punkt den Abstand der Bildparallelen jedes Punktes der Ebene (11) in dem festen Verhältnis

$$\lambda = \frac{\alpha_3 - \varkappa \alpha_0}{\alpha_3 + \varkappa \alpha_0}.$$

Die durch den Grundpunkt M und den Wert λ festgelegte zwei-

Digitized by Google

stufige Mannigfaltigkeit stellt das analoge Gebilde zu dem „ebenen Zykelsystem“ (lineare Zykelkongruenz) der Laguerreschen Geometrie dar.

Diejenige Gruppe von projektiven Transformationen des Raumes, die das ausgezeichnete Punktepaar

$$\Xi,\ H: X_0^2 - \varkappa^2 X_3^2 = 0,\ X_1 = X_2 = 0$$

in sich überführen, ist durch

$$(12)\qquad \begin{cases} X_0' = a_{00} X_0 + a_{01} X_1 + a_{02} X_2 + a_{03} X_3, \\ X_1' = \quad a_{11} X_1 + a_{12} X_2 \quad , \\ X_2' = \quad a_{21} X_1 + a_{22} X_2 \quad , \\ X_3' = a_{30} X_0 + a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 \end{cases}$$

gegeben, wobei die Koeffizienten a_{00}, a_{03}, a_{30}, a_{33} zwei Bedingungsgleichungen

$$a_{00}^2 - a_{03}^2 = \varkappa^2 (a_{30}^2 - a_{33}^2) \quad \text{und} \quad a_{00} a_{03} = \varkappa^2 a_{30} a_{33}$$

genügen. Diese Gruppe von projektiven Transformationen des Raumes ist auf Grund der Zuordnung (2a) isomorph derjenigen Gruppe P von Transformationen in der x-y-Ebene, die orientierte Punkte und Parallelreihen orientierter Punkte in je ebensolche überführen. P spielt für die Geometrie orientierter Punkte dieselbe Rolle wie die Gruppe L von Laguerre für die Geometrie orientierter Geraden.

In ähnlicher Weise, wie die Untergruppe L_6 der allgemeinen Laguerreschen Gruppe L als Lorentzgruppe der speziellen Relativitätstheorie erscheint, läßt sich eine Untergruppe P_6 der allgemeinen Gruppe P den Galilei-Newton-Transformationen der klassischen Mechanik zuordnen.

Werden nämlich die inhomogenen Koordinaten

$$\xi : \eta : \zeta : 1 = X_3 : X_0 : X_1 : -X_2$$

mit $\zeta \equiv t$ als Zeit benutzt, so erscheint für $\varkappa = i$ das ausgezeichnete Punktepaar

$$\Xi,\ H: X_0^2 + X_3^2 = 0,\quad X_1 = X_2 = 0$$

als der Schnitt des „Nullzylinders“

$$\xi^2 + \eta^2 = 0$$

mit der Ebene $t = 0$ und der uneigentlichen Ebene. Jedem orientierten Punkte x_i entspricht nach (2a) eine Ebene, welche die horizontal gedachte Grundebene $t = 0$ in einer Minimalgeraden

Digitized by Google

schneidet; jedem „Weltpunkte“ ξ, η, t ist ein Parallelreihenpaar orientierter Punkte in der Grundebene zugeordnet, deren Trägergeraden die Gleichungen

$$y = t \cdot x + (\xi \pm i\eta)$$

besitzen. Die ∞^2 zu einer festen Zeit T „gleichzeitigen“ Weltpunkte haben zu Bildern die ∞^2 Punktreihenpaare unter dem Anstieg T.

Die sechsgliedrige affine Untergruppe von (12), die sich bei Benutzung der inhomogenen Koordinaten ξ, η, t für

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{30} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1, \quad a_{21} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = 1$$

ergibt, ist durch

$$(13) \qquad \begin{cases} \xi' = a_{33}\xi + a_{30}\eta + a_{31}t + a_{32}, \\ \eta' = a_{03}\xi + a_{00}\eta + a_{01}t + a_{02}, \\ t' = \qquad\qquad\quad t + a_{12} \end{cases}$$

dargestellt. Diese Transformationen sind die Galilei-Newton-Transformationen für eine dreidimensionale „Welt“ ξ, η, t; ihnen gegenüber sind die Newtonschen Differentialgleichungen invariant.

Sind ξ, η, t und $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}$ die Koordinaten zweier Weltpunkte, so bleibt bei den Transformationen der Gruppe (13) im allgemeinen nur die Differenz $t - \bar{t}$ ungeändert. Dieser Größe entspricht die Anstiegsdifferenz zweier Parallelreihenpaare in der Grundebene als Invariante der Gruppe P_6. Ist insbesondere $t = \bar{t} = T$, so bleibt auch

$$(14) \qquad J \equiv (\xi - \bar{\xi})^2 + (\eta - \bar{\eta})^2$$

invariant[6]). Zwei solche gleichzeitigen Weltpunkte ξ, η, T und $\bar{\xi}, \bar{\eta}, T$ haben Parallelreihenpaare orientierter Punkte von gleichem Anstieg zu Bildern in der Grundebene; das Entfernungsquadrat J ist durch die y-Achsenabschnitte d_1, d_2 und $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ in der Form

$$J \equiv (d_1 - \bar{d}_1)(d_2 - \bar{d}_2)$$

gegeben. Dieser Ausdruck entspricht der rein geometrischen Invariante (14).

Den Galilei-Newton-Transformationen (13) ist demnach eine Untergruppe P_6 von P zugeordnet, die sich durch die Gesetze der klassischen Mechanik in gleicher Weise interpretieren läßt wie die Untergruppe L_6 der allgemeinen Laguerreschen Gruppe L durch

6) Vergl. F. Klein, Anm. 5.

Digitized by Google

die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie. Insbesondere finden sich die Untergruppen von (13) in den Transformationsscharen von P_6 wieder.

Während bei Hinzunahme einer räumlichen Koordinate die Struktur der vierdimensionalen Minkowskischen Welt durch die Laguerresche Kugelgeometrie eines dreidimensionalen Raumes dargestellt werden kann[7]), versagt die Übertragung der Galilei-Newton-Transformationen in vier Koordinaten in die räumliche Geometrie orientierter Punkte, da sich das dem Ausdruck (8a) entsprechende quadratische Gebilde nicht mehr mit dem nullteiligen Fundamentalkegelschnitt identifizieren läßt, der durch die Galilei-Newton-Transformationen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit in sich übergeführt wird.

Bei Unterdrückung einer räumlichen Koordinate dagegen kann die raumzeitliche Struktur, die einer dreidimensionalen Welt durch die Galilei-Newton-Transformationen der klassischen Mechanik oder durch die Lorentztransformationen der speziellen Relativitätstheorie aufgeprägt wird, beide Male eine Deutung durch die Geometrie orientierter Elemente in einer Ebene mit euklidischer Metrik finden. Die Verschiedenartigkeit der beiden physikalischen Fundamentalgruppen spiegelt sich in dem Strukturunterschied der beiden Geometrien der Ebene wieder, der seinerseits durch die Singularität des der euklidischen Metrik zu Grunde liegenden Fundamentalgebildes bedingt ist.

7) Vergl. H. E. Timerding: „Über ein einfaches geometrisches Bild der Raumzeitwelt Minkowskis", D. M.V. 21, (1912), S. 274.

Digitized by Google

Über die Erhaltung gewisser Flüssigkeitszustände [1]).

Von Arthur Korn in Berlin.

Bezeichnen wir in einer kompressiblen oder imkompressiblen Flüssigkeit mit

$$\mu,\ u,\ v,\ w$$

Dichte und Geschwindigkeitskomponenten zu einer Zeit t an der Stelle (x, y, z), so gelten, bei Abwesenheit äußerer Kräfte, die drei Gleichungen:

$$(1) \qquad \mu \frac{du}{dt} \equiv \mu\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w\right) = -\frac{dp}{dx}, \ldots,$$

wo p den sogenannten hydrodynamischen Druck bezeichnet, welcher im Falle der Inkompressibilität:

$$(2) \qquad \mu = \text{const.}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

zusammen mit u, v, w durch die 3 Gleichungen (1), die Gleichung (2), Grenz- und Anfangsbedingungen bestimmt wird; im Falle von kompressiblen Flüssigkeiten treten an Stelle von (2) die zwei Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{d\mu}{dt} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right); \quad p = p(\mu),$$

von denen die erste die sogenante Kontinuitätsbedingung, die zweite die Zustandsgleichung ist, welche im allgemeinen in der Form des Gesetzes:

$$(4) \qquad p = \text{const. } \mu$$

zugrunde gelegt wird, in der mechanischen Wärmetheorie, bei Berücksichtigung der Temperatureinflüsse (die ja für kompressible Flüssigkeiten von Bedeutung sind), von größerer Komplikation ist.

In jedem Falle folgen aus (1) die sogenannten Wirbelgleichungen:

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mu}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathfrak{u}}{\mu} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\mathfrak{v}}{\mu} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathfrak{w}}{\mu}, \ldots,$$

1) Vorgetragen in der 298. Sitzung am 31. Januar 1934.

Digitized by Google

wenn wir

$$(6) \qquad \mathfrak{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

setzen; ich mache absichtlich hier von der Vektoren-Schreibweise keinen Gebrauch, da die einfachen hier zu besprechenden Untersuchungen ohne diese Schreibweise übersichtlicher sind.

Aus den Wirbelgleichungen (5) folgt ohne Weiteres bei geeigneten Annahmen über die Stetigkeit der Geschwindigkeitskomponenten und ihrer Ableitungen der bekannte Helmholtzsche Satz, daß für den Fall, in dem zu einer Anfangszeit überall

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v} = \mathfrak{w} = 0,$$

diese Wirbelkomponenten stets verschwinden, und daß dann:

$$(7) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

daß also die Geschwindigkeitskomponenten ein sogenanntes „Geschwindigkeitspotential φ haben, das bei der Voraussetzung der Inkompressibilität (2) der Laplaceschen Differentialgleichung:

$$(8) \qquad \Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

genügt; bei kompressiblen Flüssigkeiten ergibt sich für φ eine Differentialgleichung, deren Form von der Zustandgleichung abhängt und bei Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes (4) die Form einer Wellengleichung hat.

Die Erhaltung des wirbellosen Zustandes kann in einer für das Folgende instruktiven Weise auch folgendermaßen bewiesen werden:

Wir subtrahieren von den Gleichungen

$$(9) \qquad \frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \ldots,$$

in denen

$$(10) \qquad P = \int \frac{dp(\mu)}{d\mu} \frac{d\mu}{\mu}$$

gesetzt ist, die Gleichungen:

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} v + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} w, \quad \ldots,$$

wobei wir uns über die Definition der Funktion φ noch Bestimmungen vorbehalten, dann folgt:

Digitized by Google

$$\left(u-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{P+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}$$
$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(u-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\left(v-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\left(w-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),\ \ldots,$$

und wenn wir

$$P=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\text{const.} \tag{12}$$

setzen:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(u-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\ =-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(u-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\left(v-\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\left(w-\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right),\ \ldots.\end{array}\right. \tag{13}$$

Jetzt folgt wieder, wenn zu einer Anfangszeit und in einem bestimmten Bereich

$$u-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad v-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad w-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

daß diese Größen zu jeder Zeit in dem aus denselben Flüssigkeitsteilchen zusammengesetzten Bereich null sind. Das ist nur ein anderer Beweis des Helmholtzschen Satzes, der vielleicht gegen den ersten den Nachteil hat, daß man von vornherein die Funktion φ, deren Ableitungen die Geschwindigkeitskomponenten zu einer Anfangszeit sind, als gegeben annimmt, der aber für das Folgende instruktiv ist.

Wir wollen nämlich jetzt einen anderen Flüssigkeitszustand betrachten, bei dem die Stromlinien mit den Wirbellinien zusammenfallen:

$$u=\frac{k}{\mu}\mathfrak{u},\quad v=\frac{k}{\mu}\mathfrak{v},\quad w=\frac{k}{\mu}\mathfrak{w}, \tag{14}$$

wobei k eine Konstante ist. Wird sich ein solcher Zustand, immer bei Abwesenheit äußerer Kräfte, erhalten, wenn er zu einer Anfangszeit besteht?

Wir finden mit Hilfe der hydrodynamischen Gleichungen in analoger Weise, wie bei dem Beweise des Helmholtzschen Satzes:

$$\frac{d}{dt}\left(u-\frac{k}{\mu}\mathfrak{u}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{P+\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right\}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(u-\frac{k}{\mu}\mathfrak{u}\right)$$
$$+\frac{\partial v}{\partial x}\left(v-\frac{k}{\mu}\mathfrak{v}\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\left(w-\frac{k}{\mu}\mathfrak{w}\right),\ \ldots,$$

und wenn

Digitized by Google

$$P = -\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+\text{const.} \tag{15}$$

gemacht wird[2]):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(u-\frac{k}{\mu}\mathfrak{u}\right)\\ &=\frac{\partial u}{\partial x}\left(u-\frac{k}{\mu}\mathfrak{u}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}\left(v-\frac{k}{\mu}\mathfrak{v}\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\left(w-\frac{k}{\mu}\mathfrak{w}\right),\ \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

woraus sofort die Erhaltung des Zustandes (14) folgt.

Wir können den Erhaltungssatz auch für den Zustand

$$u = U_0+\frac{k}{\mu}\mathfrak{u},\quad \mathfrak{v} = V_0+\frac{k}{\mu}\mathfrak{v},\quad w = W_0+\frac{k}{\mu}\mathfrak{w} \tag{17}$$

beweisen, falls für die

$$U_0,\ V_0,\ W_0$$

Gleichungen von der Form:

$$\frac{dU_0}{dt}-\frac{\partial u}{\partial x}U_0-\frac{\partial v}{\partial x}V_0-\frac{\partial w}{\partial x}W_0 = \frac{\partial \psi}{\partial x},\ \ldots \tag{18}$$

bestehen, wo ψ irgend eine mit ihren ersten Anleitungen stetige Funktion von x, y, z, t vorstellt. So können z. B.

$$U_0,\ V_0,\ W_0$$

Geschwindigkeiten eines starren Körpers mit konstanten Drehungsgeschwindigkeiten sein, denn für solche ist

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = 0,\ \ldots;\quad \frac{\partial W_0}{\partial y} = -\frac{\partial V_0}{\partial z},\ \ldots,$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t}+\frac{\partial U_0}{\partial x}u+\frac{\partial U_0}{\partial y}v+\frac{\partial U_0}{\partial z}w-\frac{\partial u}{\partial x}U_0-\frac{\partial v}{\partial x}V_0-\frac{\partial w}{\partial x}W_0 = \frac{\partial \psi}{\partial x},\ \ldots$$

Die Bedingungen (18) sind also erfüllt.

Ich will nun aber einen etwas komplizierteren Zustand untersuchen:

$$u = U_0+\frac{k}{\mu}\mathfrak{u}+\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \ldots, \tag{19}$$

wo wieder φ eine mit den ersten Ableitungen stetige Funktion von x, y, z, t sein soll, bezugsweise etwas allgemeiner:

$$u = U_0+\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{k}{\mu}\mathfrak{u}+\sigma_1,\ \ldots, \tag{20}$$

2) Ein solcher Zustand ist stationär, wie in der Diskussion Herr Hamel hervorgehoben hat; man vgl. dazu die Untersuchung von L. Prandtl, über Tragflügeltheorie, Gött. Nachr. 1918, S. 460.

Digitized by Google

wo wir über

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$$

noch genauere Bestimmungen machen wollen. Wird sich hier wieder ein Erhaltungssatz beweisen lassen?

Für die bei dem Zustande (19) hinzukommenden Geschwindigkeitskomponenten ist abweichend von den Gleichungen (13) und (16):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}u+\frac{\partial\varphi}{\partial y}v+\frac{\partial\varphi}{\partial z}w\right\}-2\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\},\ \ldots,$$

wir werden daher, im allgemeinen, analog wie für die

$$U_0,\ V_0,\ W_0$$

Relationen von der Form (18) nur dann beweisen können, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

als Ableitungen ein und derselben Funktion nach x, y, z dargestellt werden können. Es folgt ferner auch sofort aus dieser Untersuchung für den Zustand (20), wenn wir

$$(21)\qquad \sigma_1=\int^t\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dt,\ \ldots$$

setzen, bei geeignet gewählter Funktion ψ der Erhaltungssatz, nicht bloß, wenn

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$$

verschwindend klein gemacht werden können, sondern auch, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sigma_1+\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_2+\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_3$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\sigma_1+\frac{\partial v}{\partial y}\sigma_2+\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_3$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}\sigma_1+\frac{\partial v}{\partial z}\sigma_2+\frac{\partial w}{\partial z}\sigma_3$$

als Ableitungen ein und derselben Funktion χ nach x, y, z darge-

Digitized by Google

stellt werden können oder wenigstens die Größen

$$(22) \qquad \bar{\sigma}_1 = \int^t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sigma_1 + \frac{\partial v}{\partial x}\sigma_2 + \frac{\partial w}{\partial x}\sigma_3\right) - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right] dt$$

durch geeignete Wahl von χ verschwindend klein gemacht werden können.

Wir erkennen jedenfalls, daß ein Zustand von der Form:

$$(23\,a) \qquad u = U_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{k}{\mu}\mathfrak{u} + \sigma_1, \ \ldots$$

bei den Korrekturgliedern

$$(23\,b) \qquad \sigma_1 = \int^t \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] dt, \ \ldots$$

und bei geeignet gewähltem ψ unter sehr allgemeinen Bedingungen erhalten bleiben kann.

Ich will hier ein besonders interessantes Beispiel eines Zustandes (23) angeben, für welchen die Erhaltungsbedingungen erfüllt sind, und der für eine mechanische Erklärung des elektromagnetischen Feldes herangezogen werden kann. Wir wollen mechanische Geschwindigkeiten von der Form annehmen:

$$(24) \qquad u = u_0 + u_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + u_2 \sin\frac{t}{T}2\pi = u_0 + \hat{u}, \ \ldots,$$

wo T wiederum im oben schon festgelegten Sinne eine *ganz außerordentlich kleine Schwingungsdauer* (viel kleiner als alle bekannten Schwingungsdauern) vorstellt. Ich werde dann

$$u_0,\ v_0,\ w_0$$

die sichtbaren Geschwindigkeiten nennen,

$$u_1,\ v_1,\ w_1$$

die den Maxwellschen X, Y, Z proportionalen elektrischen Komponenten,

$$u_2,\ v_2,\ w_2$$

die den Maxwellschen L, M, N proportionalen magnetischen Komponenten. Bei dem Ansatz (24) haben wir festzusetzen, daß die Ableitungen

$$\frac{du_0}{dt}, \ \ldots; \quad \frac{du_1}{dt}, \ \ldots; \quad \frac{du_2}{dt}, \ \ldots$$

Digitized by Google

gegen die Größe

$$\frac{M}{T}$$

außerordentlich klein sein sollen, wenn wir unter M die absolut größten Werte der

$$u_0, v_0, w_0; \quad u_1, v_1, w_1; \quad u_2, v_2, w_2$$

verstehen. Wir können dann bis auf Größen, die gegen M außerordentlich klein sind

$$(25)\qquad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u\,dt, \ \ldots; \\ u_1 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u\cos\frac{t}{T}2\pi dt, \ \ldots; \\ u_2 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u\sin\frac{t}{T}2\pi dt, \ \ldots \end{cases}$$

setzen. Eine solche Zerlegung wollen wir allgemein für eine Funktion

$$f(x, y, z, t)$$

in der Form:

$$(26)\qquad f = f_0 + f_1\cos\frac{t}{T}2\pi + f_2\sin\frac{t}{T}2\pi, \qquad f = f_0 + \hat{f}$$

ausdrücken.

Ich will nun allgemein den folgenden Flüssigkeitszustand definieren:

$$(27)\qquad u = U_0 + \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{k}{\mu}u + \sigma_1, \ \ldots; \qquad \mu = \mu_0 + \hat{\mu},$$

wo

$$\frac{k}{\mu}$$

eine gegen die Längeneinheit außerordentlich kleine Länge sein soll und bei geeignet gewähltem ψ

$$(28)\qquad \sigma_1 = \int^t \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dt$$

zu setzen ist. Bei geeignet gewähltem ψ sind dann σ_1, σ_2, σ_3 außerordentlich klein (von erster Ordnung).

Digitized by Google

Für diesen Flüssigkeitszustand können wir den Erhaltungssatz in der Form beweisen, daß die Größen

$$\bar{\sigma}_1 = \int^t \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sigma_1 + \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_2 + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_3 - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right] dt, \quad \ldots \tag{29}$$

bei geeignet gewählten χ von zweiter Ordnung klein werden, da durch jede Integration nach t bei diesen Ausdrücken jedesmal der Faktor T hinzutritt.

Das Interessante an diesem Zustande ist, daß sich aus den hydrodynamischen Gleichungen bei diesem Zustande die Maxwell-Hertzschen Gleichungen zwischen den elektrischen Komponenten n_1, v_1, w_1 und den magnetischen Komponenten u_2, v_2, w_2 ergeben[3], und das ist das wesentliche Resultat, auf welches diese Untersuchung hinzielte.

3) Ich nenne diesen Zustand den „Zustand des universellen Dralles". Die vorliegende Untersuchung präzisiert in verschiedenen Punkten meine früheren Darstellungen (im besonderen Phys. ZS. 18, 341—344, 1917).

Digitized by Google

Über das Rechnen mit unendlich hohen Frequenzen in der Mechanik[1]).

(Ein neues Rechenverfahren).

Von Arthur Korn in Berlin.

Eine unendlich hohe Frequenz ist ebensowenig vorstellbar, wie eine unendlich große Geschwindigkeit, es kann sich bei dem Rechnen mit unendlich hohen Frequenzen nur darum handeln, daß es bequem sein kann, bei analytischen Betrachtungen den Grenzübergang zu unendlich hohen Frequenzen zu machen und das Resultat als eine erste Annäherung für den Fall von sehr hohen Frequenzen zu betrachten. In der reinen Mathematik sind Grenzübergänge bei Ausdrücken, welche den Sinus oder Kosinus vielfacher Winkel

$$\sin m\varphi,\ \cos m\varphi$$

enthalten, für

$$m \to \infty$$

nicht neu; ich brauche mit Hinweis auf die Formel

$$\frac{\sin\left\{(n+\frac{1}{2})\,\varphi\right\}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 1 + 2\sum_{j=1}^{n}\cos j\varphi$$

nur an die Ableitung der Fourierschen Reihenentwicklung mit Hilfe dieser Formel zu erinnern. Es möge das aber nur ein Beispiel sein; ich will hier wesentlich einfachere Dinge behandeln. Wir denken uns in einer (inkompressiblen oder kompressiblen) Flüssigkeit zur Zeit t an jeder Stelle (x, y, z) die Geschwindigkeitskomponenten von der Form:

$$u = u_0 + u_1\cos\frac{t}{T}2\pi + u_2\sin\frac{t}{T}2\pi,\ \ldots,$$

wo T eine gegen alle bekannten Schwingungsdauern außerordentlich kleine Zeitdauer vorstellen möge und die Ableitungen

$$\frac{du_0}{dt},\ \ldots;\quad \frac{du_1}{dt},\ \ldots;\quad \frac{du_2}{dt},\ \ldots$$

1) Vorgetragen in der 298. Sitzung am 31. Januar 1934.

Digitized by Google

gegen die Größe

$$\frac{M}{T}$$

außerordentlich klein sein sollen, wenn M den absolut größten Wert der

$$u_0, v_0, w_0; \quad u_1, v_1, w_1; \quad u_2, v_2, w_2$$

vorstellen möge. Sollte es in solchen Fällen nicht manchmal bequem sein, erste Annäherungen für den Fall von unendlich kleinen T zu berechnen?

Denken wir z. B. an den folgenden Fall:

Wir haben in einer unendlich ausgedehnten, inkompressiblen Flüssigkeit zwei mit der Schwingungsdauer T pulsierende Kugeln, d. h. die beiden Kugeln haben periodisch veränderliche Radien:

$$(2) \qquad \begin{cases} R_1 = R_{10} + \alpha_1 \sin \dfrac{t}{T} 2\pi, \\ R_2 = R_{20} + \alpha_2 \sin \dfrac{t}{T} 2\pi, \end{cases}$$

wobei die sogenannten Amplituden

$$\alpha_1, \ \alpha_2$$

ganz außerordentlich klein anzunehmen sind; oder was dasselbe ist, die normalen Geschwindigkeiten der Flüssigkeit an den Kugeln sind von der Form:

$$(3) \qquad \begin{cases} u_\nu = \varkappa_1 \cos \dfrac{t}{T} 2\pi \text{ an } (R_1), \\ u_\nu = \varkappa_2 \cos \dfrac{t}{T} 2\pi \text{ an } (R_2); \end{cases}$$

$\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ kann man dann als die Pulsationsgeschwindigkeiten der beiden Kugeln bezeichnen. Bei den normalen Geschwindigkeiten (3) an der Grenze kann man leicht den Bewegungszustand der Flüssigkeit berechnen, wenn dieselbe als wirbellos angenommen wird, hierauf den Druck p an jeder Stelle der Flüssigkeit und die scheinbaren Kraftkomponenten, welche die Flüssigkeit auf die Kugeln ausübt. Man erhält dann, wenn man die Schwingungsdauer als sehr klein und die Zentraldistanz groß gegen die Radien voraussetzt, in erster Annäherung das zuerst von C. A. Bjerknes gefundene Resultat, daß zwischen den beiden Kugeln eine ähnliche Wechselwirkung stattfindet, wie zwischen zwei elektrischen Teilchen, eine Wechselwirkung umgekehrt proportional dem Quadrat

Digitized by Google

der Zentraldistanz, die im übrigen den Pulsationsgeschwindigkeiten direkt proportional ist. Allerdings ergab sich zunächst die für eine Begründung einer mechanischen Theorie unangenehme Tatsache, daß Anziehung für zwei Kugeln stattfindet, welche dieselbe Phase haben, d. h. für den Fall, daß die beiden Kugeln bei den Pulsationen gleichzeitig ihre Maxima erreichen und gleichzeitig ihre Minima; im Falle entgegengesetzter Phase, wenn also die eine Kugel ihr Maximum in dem Zeitmoment des Minimums der anderen Kugel erreicht, ergibt sich Abstoßung.

Diese Folgerungen ergeben sich nun stets für sehr kleine Schwingungsdauern T, und zwar geht in die genannten ersten Näherungen T gar nicht ein, nur insofern, als die genannten Kräfte den Pulsationsgeschwindigkeiten proportional sind, die mit den Amplituden der Schwingungen durch die Gleichungen:

$$\varkappa_1 = \frac{2\pi}{T}\alpha_1, \quad \varkappa_2 = \frac{2\pi}{T}\alpha_2 \tag{4}$$

verbunden sind; sie gehen also wohl ein, wenn die Amplituden gegeben sind, aber nicht, wenn man die Pulsationsgeschwindigkeiten als gegeben ansieht.

Wir können daher T immer kleiner und kleiner werden lassen, das Resultat bleibt in seiner ersten Annäherung auch im Grenzfall bestehen. Nun wird aber die Rechnung bedeutend vereinfacht, wenn man zu diesem Grenzfalle übergeht. Dasselbe kann nun auch in einem sehr großen Gebiete von Schwingungsproblemen geschehen, und man wird sich zweckmäßig für solche Rechnungen Formeln zurechtlegen, die man in gegebenen Fällen nur anzuwenden braucht, ohne die Rechnungen für den Grenzübergang jedesmal besonders auszuführen.

Wenn wir allgemein

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,y,t) &= f_0(x,y,z,t) + f_1(x,y,z,t)\cos\frac{t}{T}2\pi \\ &\qquad + f_2(x,y,z,t)\sin\frac{t}{T}2\pi \\ &= \{f_0, f_1, f_2\} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

haben, wo die Ableitungen

$$\frac{df_0}{dt}, \frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}$$

gegen die Größe

$$\frac{M}{T}$$

Digitized by Google

außerordentlich klein sein sollen, wenn M den absolut größten Wert der

$$f_0, f_1, f_2$$

vorstellt, dann ist in erster Annäherung

$$(6) \quad \begin{cases} f_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f\,dt, \\ f_1 = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f\cos\frac{t}{T}2\pi\,dt, \\ f_2 = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f\sin\frac{t}{T}2\pi\,dt. \end{cases}$$

Es ist hier zu bemerken, daß für sehr kleine T, wenn man nicht zur Grenze

$$T = 0$$

übergeht, rechts stets kleine Größen mitgeschleppt werden müssen, die eben durch den Grenzübergang fortfallen und die abgekürzte Schreibweise (6) gestatten.

Wir haben dann zwei Arten von Differentiation nach t zu unterscheiden, einmal diejenige, welche ich als die sichtbare Differentiation bezeichnen will:

$$(7) \quad \frac{\bar{d}f}{dt} = \frac{f(t+T)-f(t)}{T},$$

und für welche sich die Formel ergibt:

$$(8) \quad \frac{\bar{d}f}{dt} = \frac{\bar{d}f_0}{dt} + \frac{\bar{d}f_1}{dt}\cos\frac{t}{T}2\pi + \frac{\bar{d}f_2}{dt}\sin\frac{t}{T}2\pi = \left\{\frac{\bar{d}f_0}{dt}, \frac{\bar{d}f_1}{dt}, \frac{\bar{d}f_2}{dt}\right\}$$

und dann die eigentliche Differentiation nach t:

$$\frac{df}{dt}.$$

Hier zeigt sich zunächst eine Schwierigkeit: Es ist:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{df}{dt} = \frac{df_0}{dt} + \frac{df_1}{dt}\cos\frac{t}{T}2\pi + \frac{df_2}{dt}\sin\frac{t}{T}2\pi \\ \qquad - \frac{2\pi}{T}\left\{f_1\cos\frac{t}{T}2\pi - f_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right\}. \end{cases}$$

Bei unendlich zu null abnehmenden T würden sich hier unendlich große Glieder ergeben. Diese Differentiation ist also mit Vorsicht

Digitized by Google

anzuwenden; sie ist zunächst nur anwendbar auf Funktionen f, für welche die f_1 und f_2 mit bezug auf ihre Dimensionseinheiten ganz außerordentlich klein sind, ähnlich wie T gegen die Zeiteinheit, z. B. auf die Radien pulsierender Kugeln mit außerordentlich kleinen Pulsationsamplituden [2]), auf die Dichte schwingender kompressibler Medien, auf die Raum- und Oberflächenelemente schwingender Körper, immer bei Voraussetzung außerordentlich kleiner Schwingungsamplituden. Wir können uns hier z. B. die folgenden Formeln zurechtlegen:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mu}{dt} = \left\{-\mu\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x}+\dfrac{\partial v_0}{\partial y}+\dfrac{\partial w_0}{\partial z}\right), \ \ldots\right\}; \\ \dfrac{d(d\tau)}{dt} = \left\{\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x}+\dfrac{\partial v_0}{\partial y}+\dfrac{\partial w_0}{\partial z}\right)d\tau, \ \ldots\right\}; \\ \dfrac{d(d\omega\cos(\nu x))}{dt} = \left\{\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x}+\dfrac{\partial v_0}{\partial y}+\dfrac{\partial w_0}{\partial z}\right)\cos(\nu x)-\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\cos(\nu x)\right.\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left.\left.+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\cos(\nu y)+\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\cos(\nu z)\right)\right]d\omega, \ \ldots\right\}, \ \ldots. \end{cases}$$

Man kann aber noch andere Fälle der eigentlichen Differentiation nach t in Betracht ziehen, für welche sich im Endresultate die scheinbar unendlichen Größen fortheben.

Ich betrachte die Operation:

$$(11)\quad \left(\frac{df}{dt}\right)_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{df}{dt}\,dt,$$

dann ist offenbar:

$$\frac{f(t+T)-f(t)}{T} = \frac{\bar{d}f}{dt},$$

wir haben also die Formel:

$$(12)\quad \left(\frac{\bar{d}f}{dt}\right)_0 = \frac{\bar{d}f}{dt} = \left\{\frac{\bar{d}f_0}{dt}, \frac{\bar{d}f_1}{dt}, \frac{\bar{d}f_2}{dt}\right\}.$$

Ich betrachte andererseits den Ausdruck:

$$\int\frac{df}{dt}\varphi_0\,dt.$$

2) Hier haben wir

$$R = R_0 + \frac{T}{2\pi}\varkappa\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

somit:

$$\frac{dR}{dt} = \varkappa\cos\frac{t}{T}2\pi = \{0, \varkappa, 0\}.$$

Digitized by Google

Es ist offenbar:

$$\int \frac{df}{dt}\varphi_0\,dt = f\varphi_0 - \int f\frac{d\varphi_0}{dt}\,dt$$

und somit:

$$(13)\qquad \left(\frac{df}{dt}\varphi_0\right)_0 \equiv \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{df}{dt}\varphi_0\,dt = \frac{\bar{d}(f\varphi_0)}{dt} - \left(f\frac{d\varphi_0}{dt}\right)_0.$$

Die beiden Operationen links in (12) und (13) stellen also etwas Vernünftiges dar, obwohl

$$\frac{df}{dt}$$

selbst bei verschwindendem T seinen Sinn verliert. Die Rechenformeln (12) und (13) stellen in der Tat Formeln dar, die bei dem Rechnen mit unendlich hohen Frequenzen von einiger Bedeutung sind.

Wenn man in einer wirbellosen Flüssigkeit schwingende Oberflächen annimmt, an denen die normalen Schwingungsgeschwindigkeiten gegeben sind

$$(14)\qquad \begin{cases} \hat{u}_\nu \equiv \hat{u}\cos(\nu x) + \hat{v}\cos(\nu y) + \hat{w}\cos(\nu z), \\ \quad = \{0,\ u_1\cos(\nu x) + v_1\cos(\nu y) + w_1\cos(\nu z), \\ \qquad u_2\cos(\nu x) + v_2\cos(\nu y) + w_2\cos(\nu z)\}, \end{cases}$$

dann ist durch diese Daten der schwingende Teil des Geschwindigkeitspotentiales bestimmt, die Funktion $\hat{\varphi}$, aus der sich die Schwingungsgeschwindigkeiten der Flüssigkeit durch Ableitung nach x, y, z herleiten lassen:

$$(15)\qquad \hat{u} = \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x},\quad \hat{v} = \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y},\quad w = \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z},$$

ferner der Druck

$$(16)\qquad p = -\mu\left\{\frac{d\hat{\varphi}}{dt} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right\}$$

und die mittleren Kraftkomponenten, welche von der Flüssigkeit auf den Körper mit der Oberfläche ω ausgeübt werden:

$$(17)\qquad X = -\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega p\cos(\nu x)\,d\omega\,dt,\ \ldots.$$

Wenn man mit Hilfe der oben angegebenen Rechenformeln die Rechnungen durchführt, gelangt man fast ohne Mühe zu dem

Digitized by Google

Resultat:

$$(18)\qquad \begin{cases} X = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega}(u_1 u_{1\nu} - \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\cos(\nu x))\,d\omega \\ \qquad + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega}(u_2 u_{2\nu} - \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\cos(\nu x))\,d\omega, \ \ldots \end{cases}$$

dessen Herleitung ohne den Grenzübergang

$$T = 0$$

ganz wesentlich komplizierter ist.

Das ist ein interessantes Beispiel für das neue Rechenverfahren, weitere Beispiele ergeben sich, wenn man von der Flüssigkeit nicht mehr Wirbellosigkeit voraussetzt, ferner auch für die Fälle elastischer Schwingungen, doch will ich mich für heute mit dem angeführten Beispiel begnügen.

Digitized by Google

Der Minkowskische Linearformensatz[1]).

Von Ernst Jacobsthal in Berlin.

Minkowskis Satz über lineare Formen lautet:
Zu m Linearformen

$$(1) \qquad f_\varkappa = \sum_1^m{}_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m),$$

mit reellen Koeffizienten und von Null verschiedener Determinante D lassen sich für die Veränderlichen x_λ solche ganzen rationalen Werte, die nicht alle Null sind, angeben, daß für sie gleichzeitig alle $|f_\varkappa| \leqq \sqrt[m]{|D|}$ sind.

Für diesen grundlegenden Satz sind eine ganze Reihe Beweise veröffentlicht worden[2]). Die folgende Beweisanordnung unterscheidet sich von meiner alten aus dem Jahre 1923 durch eine kleine Abänderung, die aber eine erhebliche Abkürzung des Beweises gestattet.

Ist der Minkowskische Satz für ein Formensystem mit der Matrix A richtig, so sagen wir kurz: er ist für die Matrix A richtig. A heißt rational, falls alle $a_{\varkappa\lambda}$ rational sind, ganz, wenn alle $a_{\varkappa\lambda}$ ganze rationale Zahlen sind. Man braucht bekanntlich den Satz nur für ganze A zu beweisen, da er hieraus auch für rationale A folgt, und hieraus ergibt sich die Richtigkeit mittels der Methode des Grenzübergangs für jedes reelle A. — Sei also A ganz. Da man für die Veränderlichen durch eine ganzzahlige unimodulare Substition neue Variable einführen kann, so wird die Matrix des neuen Formensystems AP, wenn P die ganze unimodulare Matrix der Substitution ist. Hieraus folgt, daß der Satz für AP richtig ist, falls er es für A ist, und umgekehrt. Obgleich sich nun bei

1) Vorgetragen in der 299. Sitzung am 28. Februar 1934.

2) 1. *Minkowski,* Geometrie der Zahlen; 2. *Hilbert,* siehe z. B. *Minkowski,* Diophantische Approximationen oder *Sommer,* Vorlesungen über Zahlentheorie; 3. *Hurwitz,* Göttinger Nachrichten 1897; 4. *Landau,* Der Minkowskische Satz über die Körperdiskriminante, Göttinger Nachrichten 1922; 5. *Siegel,* 1922, Math. Annalen, Bd. 87, S. 36—38; 6. *E. Jacobsthal,* Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges., Jahrg. XXII (1923) S. 33—37; 7. *Mordell,* Journ. of the London Math. Soc., Vol. 8, Part 3 (1933); 8. *Mordell,* Proceedings of the Cambridge Philosophical Soc., Vol. XXV, Part 4, S. 412—420 (1929); 9. *R. Rado,* Journ. of the London Math. Soc., Vol. IX, Part 3, S. 164—165 (1934).

Digitized by Google

diesen Substitutionen die Determinantenteiler nicht ändern, reicht es doch aus, den Satz nur für solche ganzen Matrizen zu beweisen, bei denen der $(m-1)$te Determinantenteiler gleich eins ist; und zwar brauchen wir unter diesen ganzen Matrizen nur solche speziellen zu betrachten, bei denen eine der $(m-1)$ reihigen Unterdeterminanten den Wert ± 1 hat. Dabei benutzen wir folgende Tatsachen:

I) Sind $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ganze rationale Zahlen und ebenso $D \neq 0$, so lassen sich solche ganzen Zahlen y_λ, nicht alle Null, angeben, daß jedes $|y_\lambda| \leqq \sqrt[m]{|D|}$ und $y_1 b_1 + \cdots + y_m b_m \equiv 0 \bmod D$ ist. Man beweist dies bekanntlich nach dem Schubfächerprinzip, indem man alle y_λ unabhängig voneinander sämtliche ganze Zahlen von 0 bis $[\sqrt[m]{|D|}]$ durchlaufen läßt, wodurch $\sum_1^m y_\lambda b_\lambda$ mehr als $|D|$ Zahlen annimmt, also mindestens zwei mod. D kongruent sind.

II) Ist A ganz, so existiert eine ganze unimodulare Matrix P derart, daß AP eine dreieckige Matrix wird, d. h. oberhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen hat. Das zeigt man leicht durch Induktion.

Nun zum *Beweise:* Es sei also A eine ganze Matrix, bei der eine $(m-1)$ reihige Unterdeterminante $A_{\varkappa\lambda}$ den Wert ± 1 hat, z. B. A_{m1}; dann ist der Minkowskische Satz für dieses A gewiß richtig. Denn mit $|A| = D \neq 0$ gibt es nach I) m ganze rationale Zahlen y_λ, nicht alle Null, sodaß

$$(2) \qquad \sum_1^m y_\lambda A_{\lambda 1} \equiv 0 \bmod D \text{ und } |y_\lambda| \leqq \sqrt[m]{|D|}, \qquad (1 \leqq \lambda \leqq m),$$

ist. Mit $f_\varkappa = y_\varkappa$ liefert die Auflösung von (1) nach den $x_\varkappa$ sicher ganze rationale Werte; denn auf Grund von (2) wird x_1 ganz und dann ergeben die ersten $m-1$ Gleichungen des Systems (1) bei der Auflösung nach den übrigen x_λ ebenfalls ganze Werte, da ja für diese $m-1$ Unbekannten die Determinante ± 1 ist. Da nicht alle $f_\varkappa = y_\varkappa$ Null sind, gilt für die x_λ gleiches.

Nach Nr. II dürfen wir A dreieckig annehmen, $A = (a_{\varkappa\lambda})$, $a_{\varkappa\lambda}$ ganz und für $\lambda > \varkappa$ gleich Null. Ferner sei k ganz und positiv. Wir betrachten die Matrix:

$$(3) \qquad B = \begin{pmatrix} ka_{11} & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ ka_{21} & ka_{22} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ ka_{m-1,1} & \ldots & & & ka_{m-1,m-1} & 1 \\ ka_{m1} & \ldots & & & \ldots & ka_{mm} \end{pmatrix}.$$

Digitized by Google

Dann hat B gewiß eine $(m-1)$ reihige Unterdeterminante vom Werte ± 1. Bei $|B| \neq 0$ ist also der Satz für B gewiß richtig. Da nun

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k} B \right) = A \tag{4}$$

und $|A| \neq 0$ ist, so ist für alle $k \geqq k_0$ sicher $|B| \neq 0$. Für diese B gilt also der Minkowskische Satz gewiß, also auch für $\frac{1}{k} B$ und wegen (4) nach dem bekannten Grenzwertschluß auch für A, womit alles bewiesen ist.

Digitized by Google

Transformationstheorie der quadratischen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$Ay'^2 + 2Byy' + Cy^2 + 2Dy' + 2Ey + F = 0$$ [1]).

Von G. Hamel in Berlin.

Einleitung.

Wir fragen zunächst in einem ersten Teil nach den Invarianten der quadratischen Form

$$\Phi \equiv Ay'^2 + 2Byy' + Cy^2 + 2Dy' + 2Ey + F$$

gegen die Transformation

$$y = ay_1 + b$$
$$y' = ay_1' + a'y_1 + b',$$

wobei der Strich die Ableitung nach einer Variablen x bedeutet. Diese kann reell oder komplex sein. Alle vorkommenden Funktionen werden in einem gemeinsamen Bereich von x als stetig differenzierbar angenommen.

Es gibt fünf relative Invarianten, die sich mit Potenzen von a multiplizieren, und vier absolute Invarianten. Zwei von diesen sind Differentialinvarianten, die anderen nennen wir algebraisch. Denn es sind die aus der algebraischen Transformationstheorie *bekannten relativen Invarianten*

$$A_1 = a^2 A \quad \Delta_1 = a^4 \Delta \equiv a^4 (AC - B^2)$$

und

$$\mathfrak{D}_1 = a^4 \mathfrak{D} \equiv a^4 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Alle Größen bekommen nach der Transformation den Index 1. Gleichungen sind stets Identitäten in x.

Realitätsfragen bleiben i. A. außer Betracht, wenn sie auch leicht erledigt werden könnten.

Den Fall $\mathfrak{D} = 0$ schließen wir von vornherein aus. Denn dann zerfällt die Differentialgleichung $\Phi = 0$ in zwei lineare.

---

1) Vorgetragen in der 300. Sitzung am 21. März 1934.

Digitized by Google

Ebenso den Fall $A = 0$ und $\Delta = 0$, d. h. $B = 0$. In diesem Fall haben wir es mit einer Riccatischen Differentialgleichung zu tun. Diese beiden Fälle werden wir als *trivial* bezeichnen. Es bleiben somit drei Fälle zu unterscheiden:

1. Der sogenannte Allgemeine Fall: weder $A = 0$ noch $\Delta = 0$.
2. Der erste Ausnahmefall: $A \neq 0$ aber $\Delta = 0$.
3. Der zweite Ausnahmefall: $A = 0$, $\Delta \neq 0$.

Danach betrachten wir die Differentialgleichung

$$\Phi = 0$$

und lassen als weitere Operation die Division durch einen Faktor zu. Es bleiben dann *noch drei Invarianten* übrig, die wir mit

$$\mathfrak{I},\ \mathfrak{J},\ \mathfrak{K} \text{ (bezw. } \mathfrak{I},\ \mathfrak{J},\ \mathfrak{K}^*, \text{ bezw. } A,\ \overline{\mathfrak{J}},\ \overline{\mathfrak{K}})$$

bezeichnen werden.

Wir werden endlich noch die Unabhängige transformieren, es bleiben dann zwei Invarianten.

Im zweiten Teil folgen Beispiele, dabei eine Anwendung auf die partielle Differentialgleichung $f(r, s, t) = 0$. Im dritten Teil fragen wir, wann durch eine quadratische Beziehung zwischen y und der Integrationskonstanten c

$$\alpha y^2 + 2\beta yc + \gamma c^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta = 0$$

das Integral einer Differentialgleichung $\Phi = 0$ gegeben ist. Es gibt vier wesentlich verschiedene Fälle, die wir vollständig aufzählen und durch die Invarianten charakterisieren können (Satz 21, § 12).

Es sei bemerkt, daß in der ganzen Theorie zwei Konstante (im Fall 3 nur eine) freibleiben, oder, was dasselbe ist, es bleibt eine Transformation

$$y_1 = ay_2 + b$$

mit Konstanten a und b zulässig. Die Normalisierung erstreckt sich nicht auf diese.

Die Normalformen lauten

Fall 1) $\quad y_1'^2 + C_2 y_1^2 + 2E_2 y_1 + F_2 = 0$

Fall 2) $\quad y_1'^2 + 2E_2 y_1 + F_2 = 0$

Fall 3) $\quad 2y_1 y_1' + 2E_2 y_1 + F_2 = 0,$

C_2, E_2, F_2 sind aus $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ bis auf zwei resp. eine Konstante bestimmt.

Digitized by Google

Die Transformationsformeln setzen wir hierher:

$$\begin{aligned}
A_1 &= Aa^2\\
B_1 &= Ba^2 + Aaa'\\
C_1 &= Ca^2 + 2Baa' + Aa'^2\\
D_1 &= Da + Bab + Aab'\\
E_1 &= Ea + Da' + Cab + B(ab' + a'b) + Aa'b'\\
F_1 &= F + 2Eb + 2Db' + Cb^2 + 2Bbb' + Ab'^2.
\end{aligned}$$

Erster Teil: Bestimmung der Invarianten.

§ 1. Der Hauptfall.

Es sei weder $A = 0$ noch $\Delta = 0$.

Wir haben die absoluten Invarianten

$$I_{II} = \frac{\Delta}{A^2},\quad I_{III} = \frac{\mathfrak{D}}{A^2}.$$

Wir finden die weiteren Invarianten aus der Frage nach singulären Lösungen.

Stellen wir neben

$$\Phi = Ay'^2 + 2Byy' + Cy^2 + 2Dy' + 2Ey + F = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y'} = Ay' + By + C = 0$$

und eliminieren y', so bekommen wir

$$\Delta y^2 + 2yG + H = 0$$

oder

$$y = -\frac{G}{\Delta} \pm \sqrt{\frac{G^2}{\Delta^2} - \frac{H}{\Delta}} = -h \pm k,$$

wo $h = \frac{G}{\Delta}$, $G = AE - BD$ und $H = AF - D^2$ ist.

Bekanntlich ist

$$k^2 = \frac{G^2}{\Delta^2} - \frac{H}{\Delta} = -\frac{A\mathfrak{D}}{\Delta^2} \neq 0$$

eine relative Invariante der minus zweiten Ordnung und daher

$$Ak^2 = -A^2\frac{\mathfrak{D}}{\Delta^2} = -\frac{I_{III}}{I_{II}^2}$$

eine absolute Invariante.

Soll die einer Diskriminantenkurve

$$y = -h \pm k$$

Digitized by Google

entsprechende Funktion singuläre Lösung sein, so muß sie die Gleichung

$$Ay' + By + D = 0$$

also

$$-Ah' - Bh + D \pm (Ak' + Bk) = 0$$

befriedigen. Gilt diese für beide Zeichen, so sind beide Kurven singuläre Lösung, sonst nur eine.

Da die Eigenschaft der Diskriminantenkurve, singuläre Lösung zu sein, invariant sein muß, müssen sowohl

$$Ah' + Bh - D$$

als auch

$$Ak' + Bk$$

relative Invarianten derselben Ordnung sein.

Da Ak^2 absolute Invariante ist, also auch

$$A'k^2 + 2Akk'$$

muß auch

$$A'k^2 + 2Akk' - 2(Ak' + Bk)k = k^2(A' - 2B)$$

also auch

$$I_{\text{I}} = \frac{A' - 2B}{A}$$

absolute Invariante sein.

Eine leichte Rechnung bestätigt das Resultat. Ebenso bestätigt die Rechnung, daß

$$Ah' + Bh - D$$

relative Invariante der Ordnung 1 ist und daher

$$\frac{1}{\sqrt{A}}(Ah' + Bh - D) = I_{\text{IV}}$$

die gesuchte vierte absolute Invariante. Dabei ist

$$h = \frac{G}{\Delta}$$

und

$$G = AE - BD.$$

Man führt den rechnerischen Beweis am besten so: Da

$$-Ah' - Bh + D$$

formal mit

$$Ay' + By + D$$

gleichgebaut ist, dieser Ausdruck wegen seiner Bedeutung aber sicher invariant ist, braucht man nur zu beweisen, daß sich $-h$

Digitized by Google

so wie y transformiert. Das erkennt man aber leicht als richtig. Da

$$Ak' + Bk = \frac{1}{2k}\{(Ak^2)' - k^3(A' - 2B)\}$$

ist, oder

$$Ak' + Bk = \frac{kA}{2}\left[\frac{I'_{III}}{I_{III}} - 2\frac{I'_{II}}{I_{II}} - I_I\right]$$

und

$$-Ah' - Bh + D = -\sqrt{A}\, I_{IV},$$

heißt die Bedingung dafür, daß die Diskriminantenkurven singuläre Lösungen sind:

$$-Ah' - Bh + D \pm (Ak' + Bk) = 0$$

oder

$$-I_{IV} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{I_{III}}{I_{II}^2}}\left[\frac{I'_{III}}{I_{III}} - 2\frac{I'_{II}}{I_{II}} - I_I\right] = 0.$$

Dies läßt sich so formulieren:

Satz 1: *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Diskriminantenkurve singuläre Lösung ist, ist das Verschwinden der absoluten Invariante*

$$4I_{IV}^2 + \frac{I_{III}}{I_{II}^2}\left[\frac{I'_{III}}{I_{III}} - 2\frac{I'_{II}}{I_{II}} - I_I\right]^2.$$

Verschwinden beide Summanden, d. h. I_{IV} und die eckige Klammer, so sind beide Diskriminantenkurven singuläre Lösungen.

$$(I_{II} \neq 0, \quad I_{III} \neq 0, \quad A = 0).$$

(Vgl. Satz 12 und 12a.)

Aus den Transformationsformeln (am Schluß der Einleitung) erkennt man den

Satz 2: *Wenn $A \neq 0$ (Δ kann null sein) kann man stets $B_1 = 0$ und $D_1 = 0$ machen. a ist durch*

$$\frac{a'}{a} = -\frac{B}{A}$$

bis auf eine multiplikative Konstante a_0 bestimmt, b aus

$$D + Bb + Ab' = 0$$

zu

$$b = e^{-\int \frac{B}{A}dx}\left\{-\int \frac{D}{A} e^{\int \frac{B}{A}dx}\, dx + b_0\right\}$$

Digitized by Google

bis auf das additive Glied

$$b_0 e^{-\int \frac{B}{A} dx}.$$

Als Normalform gelte demnach (einschließlich $\Delta = 0$*)*

$$\Phi = A_1 y_1'^2 + C_1 y_1^2 + 2 E_1 y_1 + F_1.$$

Satz 3: *Im Fall* $A \neq 0$, $\Delta \neq 0$ *bestimmen sich* A_1, C_1, E_1, F_1 *aus* I_{I}, I_{II}, I_{III}, I_{IV} *in folgender Weise:*

$$A_1 = A_0 e^{\int I_1 dx}; \quad C_1 = A_1 I_{\mathrm{II}}$$

$$E_1 = A_1 I_{\mathrm{II}} \left\{ \int \frac{I_{\mathrm{IV}}}{\sqrt{A_1}} dx + E_0 \right\}; \quad F_1 = \frac{1}{A_1 I_{\mathrm{II}}} (A_1 I_{\mathrm{III}} + E_1^2).$$

Die beiden Integrationskonstanten A_0 *und* E_0 *hängen mit* a_0 *und* b_0 *durch*

$$A_0 = a_0^2 \text{ und } a_0 b_0 = A_0 E_0$$

zusammen bei passender Festlegung der vorkommenden Integrale.

Der Beweis des ersten Teiles ergibt sich aus der Bedeutung der Invarianten und aus $B_1 = D_1 = 0$:

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{A' - 2B}{A} = \frac{A_1'}{A_1}; \quad I_{\mathrm{II}} = \frac{AC - B^2}{A^2} = \frac{C_1}{A_1}$$

$$I_{\mathrm{III}} = \frac{D}{A^2} = \frac{D_1}{A_1^2} = \frac{1}{A_1^2} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & E \\ 0 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{A_1} (C_1 F_1 - E_1^2)$$

$$I_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{\sqrt{A}} (Ah' + Bh - D) = \sqrt{A_1} h_1'$$

$$= \sqrt{A_1} \left(\frac{G_1}{\Delta_1} \right)' = \sqrt{A_1} \left(\frac{A_1 E_1}{\Delta_1} \right)' = \sqrt{A_1} \left(\frac{E_1}{A_1 I_{\mathrm{II}}} \right)'.$$

Die Behauptung über die Konstanten aus

$$A_1 = a^2 A = a_0^2 e^{-2\int \frac{B}{A} dx} A = a_0^2 e^{\int \frac{A' - 2B}{A} dx} = a_0^2 e^{\int I_1 dx}$$

und aus

$$E_1 = Ea + Da' + Cab + B(ab' + ba') + Aa'b'$$

$$= a \left(E - D \frac{B}{A} + Cb + B \left(b' - b \frac{B}{A} \right) - Bb' \right)$$

$$= a \left(\frac{AE - BD}{A} + \frac{\Delta}{A} b \right) = a \left(\frac{G}{A} + \frac{\Delta}{A} b \right)$$

$$= a \frac{h + b}{A} \Delta = A_1 I_{\mathrm{II}} \frac{h + b}{a}$$

Digitized by Google

einerseits und

$$E_1 = A_1 I_{II}\left\{\int \frac{I_{IV}}{\sqrt{A_1}}\,dx + E_0\right\}$$

andererseits.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\int \frac{I_{IV}}{\sqrt{A_1}}\,dx + E_0 &= \int \frac{1}{\sqrt{A A_1}}\,[Ah' + Bh - D]\,dx + E_0\\ &= \frac{1}{a}\left\{h - e^{-\int \frac{B}{A}dx}\int \frac{D}{A}\,e^{\int \frac{A}{B}dx}\,dx\right\} + E_0\\ &= \frac{1}{a}\{h + b\},\end{aligned}$$

wenn man

$$E_0 = \frac{b_0}{a_0}$$

setzt. Man muß nur die Integrale so normieren, daß

$$\int \frac{I_{II}}{\sqrt{A_1}}\,dx = \frac{1}{a}\left\{h - e^{-\int \frac{B}{A}dx}\int \frac{D}{A}\,e^{\int \frac{B}{A}dx}\,dx\right\}$$

wird.

§ 2. Der erste Ausnahmefall: $\Delta = 0$, $A \neq 0$.

I_I, I_{II}, I_{III} bleiben in ihrer Bedeutung; dagegen muß ein neues I_{IV} gesucht werden.

Es gibt nach § 1 jetzt nur *eine* Diskriminantenkurve, nämlich

$$2yG + H = 0$$

$G \neq 0$; denn wegen der Identität

$$G^2 - H\Delta = -A\mathfrak{D}$$

wäre sonst bei $\Delta = 0$ auch $\mathfrak{D} = 0$, was ausgeschlossen wurde.

$$y = -\frac{H}{2G}$$

ist aber singuläre Lösung, wenn es die Differentialgleichung

$$Ay' + By + D = 0$$

befriedigt. Folglich wird

$$A\left(\frac{H}{2G}\right)' + B\,\frac{H}{2G} - D$$

eine relative und

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\left[A\left(\frac{H}{2G}\right)' + B\,\frac{H}{2G} - D\right] = I_{IV}^{*}$$

Digitized by Google

eine absolute Invariante. Sie nehmen wir als Ersatz für I_{IV}. Satz 2 des vorigen § bleibt ungeändert. Natürlich wird wegen der Invarianz von Δ jetzt $C_1 = 0$ und die *Normalform* lautet

$$\Phi = A_1 y_1'^2 + 2E_1 y_1 + F_1$$

Satz 4: *Im Fall* $A \neq 0$, $\Delta = 0$ *bestimmen sich* A_1, E_1, F_1 *aus* I_I, I_{III}, I_{IV}^* *in folgender Weise*

$$A_1 = A_0 e^{\int I_1 dx}, \quad E_1 = \sqrt{-A_1 I_{III}}$$
$$F_1 = 2E_1\left(\int \frac{I_{IV}^*}{\sqrt{A_1}} dx + F_0\right)$$

mit den Konstanten A_0 und F_0. Diese sind mit a_0 und b_0 durch

$$A_0 = a_0^2 \text{ und } b_0 = a_0 F_0$$

verknüpft, bei geeigneter Festsetzung der Integrale.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Bedeutung der Invarianten und aus $B_1 = 0$, $D_1 = 0$

$$I_I = \frac{A' - 2B}{A} = \frac{A_1'}{A_1}$$

$$I_{III} = \frac{\mathfrak{D}}{A^2} = \frac{\mathfrak{D}_1}{A_1^2} = \frac{1}{A_1^2}\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 \\ 0 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{A_1} E_1^2$$

$$I_{IV}^* = \frac{1}{\sqrt{A}}\left[A\left(\frac{H}{2G}\right)' + B\frac{H}{2G} - D\right] = \sqrt{A_1}\left(\frac{H_1}{2G_1}\right)' = \sqrt{A_1}\left(\frac{A_1 F_1}{2A_1 E_1}\right)'.$$

Die Behauptung über H_0 und a_0^2 wie in § 1, die über b_0 und F_0 aus

$$F_1 = F + 2Eb + 2Db' + Cb^2 + 2Bbb' + Ab'^2$$
$$= \frac{H}{A} + 2b\frac{G}{A} = \frac{H}{A} - 2\frac{G}{H} e^{-\int \frac{B}{A} dx}\left(\int \frac{D}{A} e^{\int \frac{B}{A} dx} dx - b_0\right)$$

einerseits und

$$F_1 = 2E_1\left(\int \frac{I_{IV}^*}{\sqrt{A_1}} dx + F_0\right)$$
$$= 2E_1\left\{\frac{H}{2Ga} - \frac{1}{a_0}\int \frac{D}{H} e^{\int \frac{B}{A} dx} dx + F_0\right\}$$
$$= 2a\frac{G}{A}\left\{\frac{H}{2Ga} - \frac{1}{a_0}\int \frac{D}{H} e^{\int \frac{B}{A} dx} dx + F_0\right\}$$
$$= \frac{H}{A} - 2\frac{G}{H} e^{-\frac{B}{A} dx}\left(\int \frac{D}{A} e^{\int \frac{B}{A} dx} - F_0 a_0\right)$$

andererseits.

Digitized by Google

§ 3. Der zweite Ausnahmefall: $A = 0$, $\Delta \neq 0$.

Dieser Fall liegt ganz anders: A scheidet aus, dafür übernimmt B die Rolle einer relativen Invarianten zweiter Ordnung, entsprechend

$$\Delta = -B^2$$

$\mathfrak{D}$ behält seine Bedeutung; *als absolute Invariante hat man aber*

$$\frac{\mathfrak{D}}{B^2} = \bar{I}_{\text{III}}$$

zu nehmen.

Als Ersatz für $A' - 2B$ tritt, wie man leicht erkennt

$$B' - C$$

ein, es ist zweiter Ordnung *und als* $\bar{I}_{\text{I}}$ *nehmen wir*

$$\bar{I}_{\text{I}} = \frac{B' - C}{B}.$$

Man kann jetzt, wie man leicht sieht, C_1 zu null machen, wenn man

$$\frac{a'}{a} = -\frac{C}{2B}$$

nimmt; $D_1 = 0$ durch Wahl von

$$b = -\frac{D}{B}.$$

Es tritt also nur eine Integrationskonstante a_0 auf.

Satz 5: *Im Fall* $A = 0$ *lautet die Normalform*

$$\Phi = 2B_1 y_1 y_1' + 2E_1 y_1 + F_1.$$

Diskriminantenkurve ist

$$By + D = 0.$$

Durch Einsetzung in $\Phi = 0$ erkennt man, daß sie nie singuläre Lösung sein kann, es käme nämlich $I_{\text{III}} = 0$ heraus.

Satz 6: *Im Fall* $A = 0$ *gibt es keine singuläre Lösung.*

Man beweist nun weiter leicht, daß

$$(D' - E)B - (B' - C)D$$

eine relative Invariante dritter Ordnung ist.

Man erkennt nämlich aus den Transformationsformeln (Einleitung) sofort, daß sich $B' - C$ und $D' - E$ genau so transformieren wie B und D, daher ist die Determinante, eben der obige Aus-

Digitized by Google

druck, nach bekanntem Satz über affine Transformationen, relativ invariant.

Mithin nehmen wir als dritte absolute Invariante

$$\bar{I}_{\mathrm{IV}} = \frac{(D'-E)B-(B'-C)D}{(\sqrt{B})^3}$$

Satz 7: *Im Fall* $A = 0$, $\Delta \neq 0$ (*d. h.* $B \neq 0$) *bestimmen sich* B_1, E_1, F_1 *aus den absoluten Invarianten* $\bar{I}_{\mathrm{I}}$, $\bar{I}_{\mathrm{III}}$ *und* $\bar{I}_{\mathrm{IV}}$ *durch* $B_1 = B_0 e^{\int \bar{I}_1 dx}$; $E_1 = -\sqrt{B_1}\,\bar{I}_{\mathrm{IV}}$ *und* $F_1 = -\bar{I}_{\mathrm{III}}$; *zwischen* a_0 *und* B_0 *besteht die Beziehung* $B_0 = a_0^2$.

Beweis: Der erste Teil folgt aus der Bedeutung der Invarianten und aus $C_1 = 0$, $D_1 = 0$

$$\bar{I}_{\mathrm{I}} = \frac{B'-C}{B} = \frac{B_1'}{B_1};$$

$$\bar{I}_{\mathrm{III}} = \frac{\mathfrak{D}}{B^2} = \frac{\mathfrak{D}_1}{B_1^2} = \frac{1}{B_1^2}\begin{vmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ B_1 & 0 & E_1 \\ 0 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} = -F_1$$

$$\bar{I}_{\mathrm{IV}} = \frac{(D'-E)B-(B'-C)D}{\sqrt{B^3}} = \frac{-E_1 B_1}{\sqrt{B_1^3}} = -\frac{E_1}{\sqrt{B_1}}.$$

Der zweite Teil aus

$$B_1 = Ba^2 = Ba_0^2 e^{-2\int \frac{C}{2B} dx} = Ba_0^2 e^{-\int \frac{C}{B} dx}$$

und aus

$$B_1 = B_0 e^{\int \bar{I}_1 dx} = B_0 e^{\int \frac{B'-C}{B} dx} = B_0 B e^{-\int \frac{C}{B} dx}.$$

§ 4. Die Invarianten der Differentialgeichung $\Phi = 0$.

Wir können noch durch einen Faktor dividieren, der sicher nicht null ist. Daher normalisieren wir in den Fällen 1) und 2) weiter durch Division mit A_1 und erhalten

$$y_1'^2 + \frac{C_1}{A_1} y_1^2 + 2\frac{E_1}{A_1} y_1 + \frac{F_1}{A_1} = 0.$$

Im Fall 2) verschwindet das zweite Glied.

Mithin können wir als Invarianten im Fall 1) ($\Delta \neq 0$) ansehen:

$$\frac{C_1}{A_1} = I_{\mathrm{II}} = \mathfrak{J}$$

$$\frac{E_1}{A_1} = I_{\mathrm{II}}\left\{\int \frac{I_{\mathrm{IV}}}{\sqrt{A_1}} dx + E_0\right\} \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{1}{I_{\mathrm{II}}}\left(\frac{I_{\mathrm{III}}}{A_1} + \left(\frac{E_1}{A_1}\right)^2\right).$$

Digitized by Google

Satz 8: *Bei der erweiterten Transformation (Division von Φ durch einen Faktor) können wir im Fall $A \neq 0$, $\Delta \neq 0$ als absolute Invariante ansehen:*

$$\mathfrak{J} = I_{II} = \frac{\Delta}{A^2}, \quad \mathfrak{J} = \frac{I_{III}}{A_1} = \frac{D}{A^2 A_1}, \quad \mathfrak{K} = \frac{I_{IV}}{\sqrt{A_1}}.$$

Dabei ist

$$A_1 = A_0 e^{\int I_1 dx}$$

selber invariant. Zufolge $A_0 = a_0^2$ enthält $\mathfrak{J}$ den Faktor a_0^2, $\mathfrak{K}$ den Faktor a_0 im Nenner (a_0 willkürliche Konstante). *Durch sie berechnet man die Koeffizienten der neuen Normalform.*

$$y_1'^2 + C_2 y_1^2 + 2E_2 y_1 + F_2 = 0$$

zu

$$C_2 = \mathfrak{J}, \quad E_2 = \mathfrak{J}\left\{\int \mathfrak{K} dx + E_0\right\}; \quad F_2 = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left\{\mathfrak{J} + E_2^2\right\}.$$

Im Fall 2) ($A \neq 0$, $\Delta = 0$) können wir ebenfalls durch A_1 dividieren und erhalten

$$y_1'^2 + 2\frac{E_1}{A_1} y_1 + \frac{F_1}{A_1} = 0.$$

Dabei sind

$$\frac{E_1}{A_1} = \sqrt{-\frac{I_{III}}{A_1}}, \quad \frac{F_1}{A_1} = 2\frac{E_1}{A_1}\left(\int \frac{I_{IV}^*}{\sqrt{A_1}} dx + F_0\right).$$

Folglich gilt der

Satz 9: *Bei der erweiterten Transformation können wir im Fall $A \neq 0$, $\Delta = 0$ als absolute Invarianten ansehen*

$$\mathfrak{J} = I_{II} = 0, \quad \mathfrak{J} = \frac{I_{III}}{A_1}, \quad \mathfrak{K}^* = \frac{I_{IV}^*}{\sqrt{A_1}};$$

durch sie drücken wir die Koeffizienten der neuen Normalform

$$y_1'^2 + 2E_2 y_1 + F_0 = 0$$

aus als

$$E_2 = \sqrt{-\mathfrak{J}} \quad F_2 = 2E_2\left(\int \mathfrak{K}^* dx + F_0\right).$$

$\mathfrak{J}$ enthält im Nenner die willkürliche Konstante a_0^2, $\mathfrak{K}^*$ den Faktor a_0, folglich enthält E_2 im Nenner den Faktor a_0, F_2 den Faktor a_0^2. Man kann ihn fortschaffen, indem man $a_0 y_1$ als neue Abhängige einführt.

Im Fall 3) ($A = 0$, $\Delta \neq 0$) hat man die Normalform

$$2B_1 y_1 y_1' + 2E_1 y_1 + F_1 = 0$$

Digitized by Google

$B_1 \neq 0$. Man kann also durch B_1 dividieren und erhält

$$2y_1y_1' + 2\frac{E_1}{B_1}y_1 + \frac{F_1}{B_1} = 0$$

oder

$$2y_1y_1' + 2E_2y_1 + F_2 = 0.$$

Dabei ist

$$E_2 = \frac{E_1}{B_1} = -\frac{\bar{I}_{IV}}{\sqrt{B_1}}, \quad F_2 = \frac{F_1}{B_1} = -\frac{\bar{I}_{III}}{B_1}.$$

Satz 10: *Im Fall* 3) ($A = 0$, $\Delta \neq 0$) *kann man als absolute Invariante*

$$\bar{\mathfrak{J}} = -\frac{\bar{I}_{III}}{B_1} \text{ und } \bar{\mathfrak{K}} = -\frac{\bar{I}_{IV}}{\sqrt{B_1}}$$

einführen; sie sind direkt die Koeffizienten F_2 und E_3 der Normalform. Dabei ist

$$B_1 = B_0 e^{\int \bar{I}_1 dx}.$$

Die Konstante $B_0 = a_0^2$ bleibt frei.

§ 5. Transformation der Unabhängigen.

Endlich kann man noch eine neue Unabhängige einführen: x_1 statt x und so noch einen Koeffizienten, der nicht null ist, zu 1 machen.

Satz 11: *Im Fall* 1) ($A \neq 0$, $\Delta \neq 0$) *ist sicher $C_2 \neq 0$. Man nehme $dx_1^2 = \pm \mathfrak{J} dx^2$. Dann lautet die Differentialgleichung*

$$\pm\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + y_1^2 + 2E_3y_1 + F_3 = 0.$$

Dabei ist

$$E_3 = \frac{E_2}{C_2} = \frac{E_2}{\mathfrak{J}} = \int \mathfrak{K} dx + E_0$$

$$F_3 = \frac{F_2}{C_2} = \frac{1}{\mathfrak{J}^2}(\mathfrak{J} + E_2^2) = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2} + E_3^2.$$

Im Fall 2) ($A \neq 0$, $\Delta = 0$) *ist wegen $\mathfrak{D} \neq 0$ sicher $I_{III} \neq 0$, also auch $E_2 \neq 0$. Man setze $dx_1^2 = \pm E_2 dx^2$.*

Dann lautet die Differentialgleichung

$$\pm\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + 2y_1 + F_3 = 0$$

wo

Digitized by Google

$$F_3 = \frac{F_2}{E_2} = 2\left(\int \mathfrak{K}^* dx + F_0\right)$$

ist.

Im Fall 3) ($A = 0$, $\Delta \neq 0$) *ist sicher* $\overline{\mathfrak{J}} \neq 0$, *man setze*

$$dx_1 = F_2 dx = \overline{\mathfrak{J}} dx.$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$2y_1 \frac{dy_1}{dx_1} + 2E_3 y_1 + 1 = 0$$

mit

$$E_3 = \frac{E_2}{F_2} = \frac{\overline{\mathfrak{J}}_{IV}}{\overline{\mathfrak{J}}_{III}} \sqrt{\overline{B}_1} = \frac{\overline{\mathfrak{K}}}{\overline{\mathfrak{J}}}.$$

Bei der nochmals erweiterterten Transformation haben wir also nur noch 2 bezw. 1 absolute Invariante, nämlich $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2}$ *und*

$$\mathfrak{K} \text{ im Fall 1), } \mathfrak{K}^* \text{ im Fall 2), } \frac{\overline{\mathfrak{K}}}{\overline{\mathfrak{J}}} \text{ im Fall 3).}$$

Die Bedingung, daß die Diskriminantenkurven singuläre Lösungen sind, muß sich durch die Invarianten $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ allein ausdrücken lassen; in der Tat findet man leicht den Satz

Satz 12: *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß im Fall* 1) *eine Diskriminantenkurve singuläre Lösung ist, ist*

$$4\mathfrak{K}^2 + \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2}\left(\frac{\mathfrak{J}'}{\mathfrak{J}} - 2\frac{\mathfrak{J}'}{\mathfrak{J}}\right) = 0;$$

was mit

$$\mathfrak{K} = \pm \frac{d}{dx}\sqrt{-\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2}}$$

identisch ist.

Sollen beide es sein, so muß jedes Glied einzeln verschwinden; soll im Fall 2) *die einzige Diskriminantenkurve singuläre Lösung sein, so muß* $\mathfrak{K}^*$ *null sein.*

Satz 12a: *Man kann im Hauptfall* ($A \neq 0$, $\Delta \neq 0$) *die Bedingung, daß mindestens eine Diskriminantenkurve singuläre Lösung ist, durch geeignete Wahl der in* E_2 *verfügbaren Konstanten auf die Form*

$$F_3 = 0$$

bringen; sollen beide singuläre Lösung sein, so muß (bei geeigneter Wahl von E_0)

$$F_3 = 0, \quad E = E_0 = \text{const.}$$

sein.

Digitized by Google

Beweis: Zunächst kann man den ersten Teil, die Hauptsache, direkt einsehen. Denn normiert man so, daß $y = 0$ die singuläre Lösung ist, so muß $\Phi = 0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0$ für $y = 0$ erfüllt sein, was $F = 0$, $D = 0$ verlangt. Da man aber einen Faktor bei y frei hat, kann man durch $y_1 = ay$ $B = 0$ machen. Also lautet die Differentialgleichung

$$y'^2 + C_2 y_2 + 2E_2 y = 0$$

w. z. b. w. Aber man kann es auch so beweisen:

Die Bedingung, daß eine Diskriminantenkurve singuläre Lösung ist:

$$\mathfrak{K} = \pm \frac{d}{dx} \sqrt{-\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2}},$$

ist identisch mit

$$E_3' = \pm \frac{d}{dx} \sqrt{-\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2}} = \pm \sqrt{E_3^2 - F_3}.$$

Dies ist aber identisch mit

$$F_3 = 2\mathfrak{c} E_3 - \mathfrak{c}^2,$$

wo $\mathfrak{c}$ eine Integrationskonstante.

Nun ist aber in E_3 eine Integrationskonstante E_0 frei. Setzen wir

$$E_3 = \mathrm{E}_3 + E_0,$$

so ist

$$F_3 = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2} + (\mathrm{E}_3 + E_0)^2, \quad \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2} = (\mathrm{E}_3 + E_0)^2 - F_3$$

und obige Relation ergibt

$$\mathrm{E}_3 + \mathfrak{c} = \sqrt{(\mathrm{E}_3 + E_0)^2 - F_3}$$

oder

$$2\mathrm{E}_3 \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^2 = 2E_0 \mathrm{E}_3 + E_0^2 - F_3,$$

woraus bei $E_0 = \mathfrak{c}$, $F_3 = 0$ entnommen werden kann. Aber E_0 kann jetzt i. A. nicht mehr gleich null gesetzt werden.

Satz 13: *Falls alle Diskriminantenkurven singuläre Lösungen sind, sind die Differentialgleichungen elementar integrierbar.*

Beweis: Im Fall 2) kann man wegen $\mathfrak{K}^* = 0$, $F_3 = 0$ annehmen (Verfügung über F_0) und erhält

$$\pm \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + 2y_1 = 0$$

Digitized by Google

was

$$\pm 2y_1 = x_1^2 + 2cx_1 + c^2$$

als Integral ergibt, $y_1 = 0$ ist singuläre Lösung.

Im Fall 1) ist, falls beide Kurven singuläre Lösungen sind, $K = 0$ also $E_3 = 0$ und $\frac{J}{J^2} = \text{const.}$, also $F_3 = \text{const.}$

Die Differentialgleichung heißt

$$\pm\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + y_1^2 \pm 1 = 0.$$

Man kann offenbar $F_3 = \pm 1$ setzen, da $F_3 = 0$ einen trivialen Fall ergibt. Das aber gibt, je nach den Vorzeichen:

$y_1 = \mathfrak{Sin}(x_1 + c)$ oder $y_1 = \pm \mathfrak{Cof}(x_1 + c)$ oder $y_1 = \sin(x_1 + c)$;

reelle singuläre Lösungen gibt es nur in den beiden letzten Fällen, sie sind $y_1 = \pm 1$.

Zweiter Teil: Beispiele.

§ 6. Das Integral sei eine ganze Funktion zweiten Grades der Integrationskonstanten

$$y = \varphi_0(x) + c\varphi_1(x) + c^2\varphi_2(x).$$

Dabei seien φ_1 und φ_2 weder null, noch ihr Verhältnis konstant, da sonst ein trivialer Fall vorliegt.

Durch eine Substitution unserer Art kann man

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_2 = 1, \quad \varphi_1 = \psi(x) \neq \text{const.}$$

annehmen, also

$$y = c\psi(x) + c^2.$$

Als Differentialgleichung findet man leicht

$$y'^2 + y'\psi\psi' - y\psi'^2 = 0;$$

sie ist von unserer Art mit

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \tfrac{1}{2}\psi\psi', \quad E = -\psi'^2, \quad F = 0.$$

$\Delta = 0$, also liegt der erste Ausnahmefall vor. Die Invarianten sind

$$I_{\mathrm{I}} = 0, \quad I_{\mathrm{II}} = 0, \quad I_{\mathrm{III}} = -\frac{1}{\psi}\psi'^4, \quad I_{\mathrm{IV}} = 0.$$

Sind umgekehrt

$$I_{\mathrm{I}} = 0, \quad I_{\mathrm{II}} = 0, \quad I_{\mathrm{III}} \neq 0, \quad I_{\mathrm{IV}} = 0,$$

Digitized by Google

so setze man

$$I_{\mathrm{III}} = -\frac{1}{\psi}\psi'^4,$$

mithin $A_1 = 1$ (womit $a_0^2 = 1$ festgelegt ist),

$$E_1 = \sqrt{-I_{\mathrm{III}}} = \pm\tfrac{1}{2}\psi'^2 \quad F_1 = 0$$

(womit $F_0 = 0$ festgelegt ist) und erhält die Differentialgleichung

$$y_1'^2 \pm \psi'^2 y_1 = 0$$

oder

$$\left(\frac{dy_1}{d\psi}\right)^2 = \mp y_1,$$

was integriert

$$\mp y_1 = \psi^2 + 2c\psi + c^2$$

ergibt. Das ist der vorausgesetzte Typ in etwas anderer Normalisierung.

Daß $I_{\mathrm{III}} < 0$ sei, ist nicht wesentlich; man muß dann, wenn man auf reelle Darstellung Wert legt, $A_1 = -1$ nehmen.

Satz 14: *Charakteristisch für quadratische Differentialgleichungen, deren Lösung eine ganze Funktion zweiten Grades der Integrationskonstanten sein soll, ist das Verschwinden der Invarianten* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{K}^*$. (Dies ist übrigens dasselbe Beispiel wie in § 5. Man setze $\psi = x_1$).

§ 7. Eine Anwendung auf die partielle Differentialgleichung $f(r, s, t) = 0$.

Liegt eine partielle Differentialgleichung vom Typus

$$P(x, y)r + 2Q(x, y)s + R(x, y)t = f(p, q, x, y, z)$$

vor, so lautet die Gleichung der Charakteristiken bekanntlich

$$Py'^2 - 2Qy' + R = 0,$$

sie ist aber von unserem Typ, wenn

$$P = A(x), \quad Q = -B(x)y - D(x), \quad R = Cy^2 + 2Ey + F$$

ist. Es sei nun aber eine partielle Differentialgleichung der Form

$$rt - s^2 = \varphi\left(\frac{r+t}{2}\right)$$

gegeben, wie sie in der Mechanik oft vorkommt, z. B. bei allen ebenen Problemen plastischer oder mit Trockenreibung gleitender Massen. Allgemeiner sei

$$f(r, s, t) = 0.$$

Digitized by Google

Man kann das so auffassen, als bestünde zwischen den drei Variablen r, s, t außer dieser Gleichung noch das Gleichungssystem

$$\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

Denkt man sich vermöge der ersten Gleichung die Variablen r, s, t irgendwie als Funktionen von zwei Größen u, v ausgedrückt und dies in die letzten Gleichungen eingesetzt, so erhält man ein System von partiellen Differentialgleichungen 1. *O.*, das man, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, nach Riemann durch Vertauschung der Abhängigen u, v und der Unabhängigen x, y linearisieren kann.

Man beweist leicht den

Satz 15: *Die Charakteristiken des so linearisierten Problems lauten, wie auch immer $f = 0$ beschaffen sei,*

$$dr\,dt - ds^2 = 0.$$

Er sei hier ohne Beweis mitgeteilt. Die genannten Ausnahmefälle sind die Charakteristiken selbst. Sei nun speziell

$$rt - s^2 = \varphi\left(\frac{r+t}{2}\right)$$

und setzen wir

$$rt - s^2 = \delta, \quad \frac{r+t}{2} = \sigma,$$

so lautet die Gleichung der Charakteristiken, wie eine leichte Rechnung ergibt, bei Wahl von s als abhängiger, von σ als unabhängiger Variabeln

$$A\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 + 2Bs\frac{ds}{d\sigma} + Cs^2 + 2D\frac{ds}{d\sigma} + 2Es + F = 0$$

wobei

$$A = 4(\sigma^2 - \delta), \quad B = 2(\delta' - 2\sigma), \quad C = 4, \quad D = 0, \quad E = 0,$$
$$F = \delta'^2 - 4\sigma\delta' + 4\delta$$

ist. Dabei ist

$$\delta = \varphi(\sigma), \quad \delta' = \frac{d\varphi}{d\sigma}.$$

Es liegt also eine Gleichung von unserem Typ vor.

Die absoluten Invarianten berechnen sich zu

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{2(2\sigma - \delta')}{\sigma^2 - \delta}, \quad I_{\mathrm{II}} = -\frac{4\delta + \delta'^2 - 4\sigma\delta'}{4(\sigma^2 - \delta)^2},$$

$$I_{\mathrm{III}} = -\frac{\delta'^2 - 4\sigma\delta' + 4\delta}{4(\sigma^2 - \delta)^2} = I_{\mathrm{II}}, \quad I_{\mathrm{IV}} = 0.$$

Digitized by Google

Mit der Abkürzung

$$\sigma^2 - \delta = u, \quad 2\sigma - \delta' = u'$$

bekommt man nach leichter Rechnung mit $A_0 = 4$, $s = \sqrt{u}\, s_1$

$$4\left(\frac{ds_1}{d\sigma}\right)^2 \frac{u^2}{4u - u'^2} + s_1^2 - 1 = 0.$$

Führt man nun eine neue Unabhängige durch

$$\frac{d\sigma\sqrt{4u - u'^2}}{2u} = d\sigma_1$$

(σ_1 kann imaginär sein) ein, so bekommt man

$$\left(\frac{ds_1}{d\sigma_1}\right)^2 + s_1^2 = 1$$

was zu

$$s_1 = \sin(\sigma_1 - c)$$

integriert werden kann.

Satz 16: *Die Bestimmung der Charakteristiken unserer partiellen Differentialgleichung ist auf Quadraturen zurückführbar, wie auch immer die Funktion φ beschaffen sei.*

Ich breche diese Sache hier ab, da ich an anderer Stelle ausführlich darauf zurück zu kommen denke, wobei ich allerdings einen ganz anderen Weg gehen werde.

Dritter Teil: Zwischen y und den Integrationskonstanten c bestehe eine quadratische Gleichung

$$\alpha y^2 + 2\beta yc + \gamma c^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta = 0.$$

Wir fragen: *Wann ist y Integral einer quadratischen Differentialgleichung* (für alle c)?

§ 8. Allgemeine Sätze.

Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ Funktionen von x und nicht alle konstant.

Ferner sei weder die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \eta \end{vmatrix}$$

null noch α und γ gleichzeitig null, da sonst triviale Fälle vorliegen (trivial im Sinne der Einleitung).

Digitized by Google

Die Form der Gleichung ist gegen die Substitution

$$y_1 = ay + b$$

invariant.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$P + \gamma c^2 + 2cQ = 0,$$

dabei ist

$$P = \alpha y^2 + 2\delta y + \eta, \quad Q = \beta y + \varepsilon,$$

γ kann als 0 oder 1 angenommen werden, Differenzieren gibt

$$P' + 2cQ' = 0$$

und daher

1) bei $\gamma = 0$ die Differentialgleichung

$$PQ' - QP' = 0,$$

sie ist höchstens vom Grade drei,

2) bei $\gamma = 1$ die Differentialgleichung

$$4PQ'^2 + P'^2 - 4P'Q'Q = 0,$$

sie ist höchstens vom vierten Grade.

Im ersten Fall kann man stets zurück, außer wenn

$$Q = 0, \quad P \neq 0,$$

bei $\gamma = 0$ gibt also $Q = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung, die i. A. nicht in der Ausgangsgleichung enthalten ist.

Im zweiten Fall läßt sich die Differentialgleichung auch schreiben

$$4(P - Q^2)Q'^2 + ((P - Q^2)')^2 = 0;$$

sie ist erfüllt, wenn

$$P = Q^2,$$

in allen anderen Fällen kann man zurück; nur bei $P = Q^2$ nicht, falls nicht noch $Q = \text{const.}$ ist.

$Q = 0$ bezw. $P = Q^2$ identisch in y kommt nicht in Frage, das würde triviale Fälle geben; diese Gleichungen können nur als Bestimmung von einer bezw. zwei Funktionen y aufgefaßt werden.

Im Falle $\gamma = 1$ sind sie, wie man unmittelbar sieht, singuläre Lösungen, im Falle $\gamma = 0$ ist $Q = 0$ nur dann singuläre Lösung, wenn noch $P = 0$ ist.

Man kann also den Satz aussprechen:

Satz 17: *Die Bildung der Differentialgleichung läßt sich umkehren, d. h. sie hat nur die Lösungen, die durch unsere Ausgleichsgleichung*

$$\alpha y^2 + 2\beta yc + \gamma c^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta = 0$$

Digitized by Google

gegeben sind, zuzüglich ihrer Einhüllenden. Es gibt eine Ausnahme:

$$\gamma = 0, \quad Q \equiv \beta y + \varepsilon = 0.$$

Wie oben gezeigt wurde, resultiert eine Differentialgleichung vom vierten oder von niederem Grade.

Soll sie vom zweiten Grade werden, so ist das auf dreierlei Weise möglich:

Entweder verschwinden alle Koeffizienten der Glieder dritten und vierten Grades, oder es verschwinden alle Koeffizienten der Glieder vierten Grades, aber nicht alle der Glieder dritten Grades; dafür aber spaltet sich ein linearer Faktor ab oder es spaltet sich ein quadratischer Faktor ab.

Satz 18: *Die sich abspaltenden Faktoren können y' nicht enthalten, d. h. zerfällt die Gleichung vierten (resp. dritten) Grades, so kann nur ein Faktor zweiten Grades y' enthalten.* (Von den trivialen Fällen wird stets abgesehen.)

Beweis: Zerfiele die Gleichung in zwei Gleichungen zweiten Grades, die nicht identisch sind, oder in eine zweiten und eine oder mehrere ersten Grades, die y' enthalten, so erhielten wir auf jeden Fall zwei oder mehr verschiedene Differentialgleichungen. Die Lösungen einer jeden sind analytische Funktionen der geeignet gewählten Integrationskonstanten (Satz 19). Nach Satz 17 sind alle diese verschiedenen Funktionen von c in unserer quadratischen Ausgangsgleichung $\alpha y^2 + \cdots = 0$ enthalten (eine eventuell vorhandene Einzellösung, die nicht enthalten ist, stört offenbar nicht). Folglich müßte diese zerfallen, was aber ausgeschlossen worden war (Ausnahme: die Differentialgleichung zerfällt in zwei gleiche Faktoren; siehe Ende von § 11).

Daß die Lösungen analytische Funktionen der Integrationskonstanten sind, ist bei linearen selbstverständlich, es gilt aber auch bei quadratischen. Allgemein gilt:

Satz 19: *Ist $y' = f(x, y)$ stetig in x und analytisch in y, so ist die Lösung analytisch in der Integrationskonstanten y_0, wenn wir festsetzen, daß für ein x_0 des Gebietes, wo die Voraussetzungen gelten, $y = y_0$ sein soll.*

Beweis: Es ist

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx.$$

Nach der Methode der schrittweisen Verbesserung bekommen wir

Digitized by Google

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

als eine analytische Funktion von y_0, weiter ebenso

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\, dx.$$

Da $y_n \to y$ absolut und gleichmäßig, so ist auch y in y_0 analytisch. Da aber zwischen y_0 und c bei uns eine algebraische Gleichung besteht, ist y auch in c analytisch. Wir können nach Voraussetzung über $\alpha, \beta, \ldots \eta$ das x_0 so wählen, daß die quadratische Gleichung zwischen y_0 und c *nicht* zerfällt.

Wie finden wir nun eventuell abspaltbare Linearfaktoren, die nach Satz 18 nur y, nicht aber y' enthalten dürfen?

Satz 20: *Diese abspaltbaren Linearfaktoren sind diejenigen, deren Quadrat die Form*

$$\alpha y^2 + 2\beta yc + \gamma c^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta$$

für einzelne Werte c etwa werden kann.

Anders ausgedrückt: Gibt es ein c_0, für das

$$\alpha(\gamma c_0^2 + 2\varepsilon c_0 + \eta) - (\beta c_0 + \delta)^2 = 0$$

wird, für das also die quadratische Form die Gestalt

$$\alpha(y - y_0(c_0, x))^2$$

annimmt, so läßt sich $y - y_0$ von der linken Seite der Differentialgleichung abspalten. Und anders ist auch ein Abspalten nicht möglich. Es kommt also nur bei $\alpha \neq 0$ in Frage. Es braucht gar kein solches c_0 zu geben, es kann eines, es kann höchstens zwei geben.

Beweis: Ein abspaltbarer Faktor kann nach Satz 18 nur ein in y linearer Faktor sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann er als y selbst angenommen werden.

Erstens sei nun y eine Doppellösung unserer Ausgangsgleichung, die zu $c = 0$ gehöre, was auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann. Dann sind η und δ gleich null, also

$$P = \alpha y^2, \quad P' = 2\alpha yy' + \alpha' y^2. \qquad (\alpha \neq 0)$$

Sowohl

$$PQ' - QP' = 0$$

als auch

$$4PQ'^2 + Q'^2 - 4P'Q'Q = 0$$

gestatten eine Abspaltung von y.

Digitized by Google

Umgekehrt möge die Differentialgleichung y abspalten lassen. Wenn dann der Faktor weder zu Q ($\gamma = 0$) noch zu $P - Q^2$ ($\gamma = 1$) als Faktor gehört, so ist $y = 0$ Lösung der Ausgangsgleichung, die zu $c = 0$ gehörig angenommen werden kann. Die Ausgangsgleichung heißt dann

$$\alpha y^2 + 2\beta y c + \gamma c^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c = 0.$$

Also trägt P den Faktor y. Soll dann bei $\gamma = 0$

$$PQ' - QP' = 0$$

den Faktor y abspaltbar tragen, so muß ersichtlich

$$\delta\varepsilon = 0$$

sein. $\varepsilon = 0$ gibt bei $\gamma = 0$ einen trivialen Fall, $\delta = 0$ gibt das Behauptete. Soll aber bei $\gamma = 1$

$$4PQ'^2 + P'^2 - 4P'Q'Q = 0$$

den Faktor y abspaltbar haben, so muß

$$4\delta^2 y'^2 - 8\delta y' \varepsilon(\varepsilon' + \beta y') = 0$$

identisch in y', also

$$\delta\varepsilon\varepsilon' = 0$$
$$\delta^2 = 2\delta\varepsilon\beta$$

sein. Mithin entweder $\delta = 0$, was die Behauptung bedeutet, oder

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const.}, \quad \delta = 2\varepsilon_0\beta.$$

Die Gleichung heißt dann

$$\alpha y^2 + 2\beta y(c + 2\varepsilon_0) + c(c_0 + 2\varepsilon_0) = 0$$

und nimmt mit $c + 2\varepsilon_0 = c_1$ ebenfalls die verlangte Gestalt an.

Ist aber $Q = y$ und $\gamma = 0$, d. h. $\gamma = 0$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 0$, so muß, soll sich y abspalten lassen, PQ' den Faktor y tragen, d. h. $\eta = 0$ sein. Dieser Fall ist trivial, da die ursprüngliche Gleichung zerfällt.

Enthält endlich bei $\gamma = 1$, $P - Q^2$ den Faktor y, so muß deshalb

$$\eta = \varepsilon^2$$

sein; soll sich dann von

$$4PQ'^2 + P'^2 - 4P'Q'Q = 0$$

y abspalten lassen, so verlangt das

$$\delta = \varepsilon\beta.$$

Digitized by Google

Jetzt aber verschwindet die Determinante aus den α, β, γ, δ, ε, η, was nicht sein sollte.

Man kann für den zweiten Teil des Satzes, die Umkehrung, einen *anderen Beweis* geben:

Läßt sich in der Umgebung von $y = 0$, c als reguläre Potenzreihe von y darstellen

$$c = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots$$

so heißt die Differentialgleichung

$$0 = A_0' + A_1' y + A_1 y' + \cdots.$$

Soll sich y abspalten lassen, so muß

$$A_0' = 0, \quad A_1 = 0$$

sein, also

$$c - A_0 = A_2 y^2 + \cdots,$$

d. h. $y = 0$ gehört als Doppelwurzel zu $c = A_0 = \text{const}$.

Trifft die Voraussetzung nicht zu, so ist bei $\gamma = 0$ auch $\varepsilon = 0$; bei $\gamma = 1$

$$c = -Q \pm \sqrt{Q^2 - P},$$

also y ein Faktor von

$$P - Q^2.$$

Diese beiden Sonderfälle behandelt man nun entweder weiter wie beim ersten Beweis oder — den zweiten — so: Es ist jetzt

$$c = -\beta y - \varepsilon \pm \sqrt{y}(B_0 + B_1 y + \cdots).$$

Also lautet die Differentialgleichung

$$0 = -\beta' y - \beta y' - \varepsilon' \pm \frac{1}{2\sqrt{y}}(B_0 + B_1 y + \cdots) \pm \sqrt{y}(B_0' + B_1' y + B_1 y' + \cdots)$$

oder

$$4y(\beta' y + \beta y' + \varepsilon')^2 = [B_0 + B_1 y + \cdots) + 2y(B_0' + \cdots)]^2.$$

Soll sich hier y abspalten lassen, so muß $B_0 = 0$ sein. Dann muß aber $P - Q^2$ von der dritten Ordnung verschwinden und also, da es nur zweiten Grades ist, identisch. Dieser Fall war aber trivial, die Ausgangsgleichung zerfällt. Verschwindet $P - Q^2$ von der zweiten Ordnung, so liegt der zuerst behandelte Fall vor: c eine reguläre Funktion von y.

§ 9. Durchführung.

I. Es sei

$$\alpha = 0, \quad \gamma \neq 0.$$

Digitized by Google

Zwei Unterfälle sind zu betrachten:

a) $$\beta = 0.$$

Die Gleichung lautet also, da $\gamma = 1$ angenommen werden kann

$$c^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta = 0.$$

$\delta \neq 0$. Dies ist aber das Beispiel in § 6. *Es ist durch*

$$\mathfrak{J} = 0, \quad \mathfrak{K}^* = 0$$

charakterisiert.

b) $$\beta \neq 0.$$

$$2\beta yc + c^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta = 0.$$

Wir können offenbar $\beta = 1$, $\varepsilon = 0$ annehmen. Also

$$2yc + c^2 + 2\delta y + \eta = 0,$$
$$2y'c + 2\delta' y + 2\delta y' + \eta' = 0.$$

Die Differentialgleichung lautet

$$-4yy'(2\delta' y + 2\delta y' + \eta') + (2\delta' y + 2\delta y' + \eta')^2 + 8\delta yy'^2 + 4\eta y'^2 = 0.$$

Sie ist dritten Grades. Sie erniedrigt sich, wenn $\delta' = 0$ ist, und auch nur dann. Ein Abspalten kommt nicht in Frage, da $\alpha = 0$ ist.

Also bleibt

$$2yc + c^2 + 2\delta y + \eta = 0 \text{ mit } \delta = \text{const.}$$

und die Differentialgleichung lautet

$$4(\eta + \delta^2)y'^2 - 4yy'\eta' + 4\eta'\delta y' + \eta'^2 = 0.$$

Setzen wir $\eta + \delta^2 = \eta_1$, womit die Ausgangsgleichung die Form

$$2yc_1 + c_1^2 + 2c_1\delta + \eta_1 = 0$$

mit $c_1 = c + \delta$ annimmt, so haben wir

$$4\eta_1 y'^2 - 4\eta_1' yy' + 4\eta_1'\delta y' + \eta_1'^2 = 0$$

$A = 4\eta_1$, $B = -2\eta_1'$, $C = 0$, $D = 2\eta_1'\delta$, $E = 0$, $F = \eta_1'^2$.

Es liegt der Hauptfall vor, die relativen Invarianten sind

$$A = 4\eta_1, \quad \Delta = AC - B^2 = -4\eta_1'^2, \quad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = -4\eta_1'^4$$

$$A' - 2B = 8\eta_1', \quad G = AE - BD = 4\eta_1'^2, \quad h = \frac{G}{\Delta} = -\delta.$$

Digitized by Google

Also

$$A\left(\frac{G}{\Delta}\right)' + B\frac{G}{\Delta} - D = 2\eta_1'\delta - 2\eta_1'\delta = 0.$$

Mithin sind die vier absoluten Invarianten

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{2\eta_1'}{\eta_1}; \quad I_{\mathrm{II}} = \frac{-\eta_1'^2}{4\eta_1^2}, \quad I_{\mathrm{III}} = \frac{-\eta_1'^4}{4\eta_1^2}, \quad I_{\mathrm{IV}} = 0.$$

$$A_1 = A_0 e^{\int I_1 dx} = A_0 \eta_1^2.$$

Dann werden

$$\mathfrak{J} = I_{\mathrm{II}} = -\frac{\eta_1'^2}{4\eta_1^2}, \quad \mathfrak{J} = \frac{I_{\mathrm{III}}}{A_1} = -\frac{-\eta_1'^4}{4\eta_1^4 A_0}, \quad \mathfrak{K} = 0.$$

Mithin ist dieser Fall durch

$$\mathfrak{J} = \text{const.} \quad \mathfrak{J}^2 \neq 0 \text{ und } \mathfrak{K} = 0$$

charakterisiert.

Man kann $E_0 = 0$, also auch $E_2 = 0$ wählen. Die Differentialgleichung heißt in der Normalform

$$y_1'^2 + \mathfrak{J}y_1^2 + \text{const. } \mathfrak{J} = 0.$$

Setzt man

$$dx_1^2 = \pm \mathfrak{J} dx^2$$

so bekommt man

$$\pm\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + y_1^2 \pm 1 = 0,$$

da die Konstante gleich ± 1 gewählt werden kann (vgl. § 5). Das Integral lautet (etwa, wenn es auf Realität nicht ankommt)

$$y_1 = \sin(x_1 + c).$$

Mit $\cos c = c_1$ wird daraus

$$y_1^2 - 2y_1 c_1 \sin x_1 + c_1^2 - \cos^2 x_1 = 0.$$

Das ist eine andere als die Ausgangsform, wir werden aber sehen, daß sie äquivalent ist.

§ 10. Fortsetzung.

II. *Es sei* $\alpha \neq 0$, *aber* $\gamma = 0$

a) $$\beta = 0.$$

Also

$$y^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta = 0, \qquad \varepsilon \neq 0.$$

Man kann offenbar $\delta = 0$, $\varepsilon = 1$ annehmen. Dann hat man bereits in

Digitized by Google

$$(y^2+\eta)' = 0 \text{ oder } 2yy'+\eta' = 0$$

die gesuchte Differentialgleichung

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 0,\ E = 0,\ F = \eta' \neq 0.$$

Daraus

$$\mathfrak{D} = -\eta',\ \bar{I}_{III} = -\eta',\ \bar{I}_{I} = 0,\ \bar{I}_{IV} = 0.$$

Also $A = 0$, $K = 0$ ist für diesen Fall charakteristisch.

Die Normalform ist

$$2y_1 \frac{dy_1}{dx_1} + 1 = 0$$

oder

$$y_1^2 + x_1 + c = 0.$$

b) $$\beta \neq 0.$$

Man kann $\alpha = 1$, $\beta = 1$ annehmen

$$y^2 + 2yc + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta = 0.$$

Die Differentialgleichung lautet, da man $\delta = 0$ annehmen kann,

$$-y^2y' + y^2\varepsilon' - 2\varepsilon yy' + y\eta' + \eta\varepsilon' - \varepsilon\eta' = 0.$$

Sie kann nur durch Abspalten erniedrigt werden, den Faktor kann man als y annehmen und also muß $\delta = 0$ und $\eta = 0$ sein. Die Differentialgleichung heißt dann

$$2yy' + 4\varepsilon y' - 2y\varepsilon' = 0$$

also

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 2\varepsilon,\ E = -\varepsilon',\ F = 0.$$

$$\mathfrak{D} = -4\varepsilon\varepsilon',\ B' - C = 0,\ (D' - E)B - (B' - C)D = 3\varepsilon'.$$

Also

$$\bar{I}_{I} = 0,\ \bar{I}_{III} = -4\varepsilon\varepsilon',\ \bar{I}_{IV} = 3\varepsilon'.$$

Es liegt der zweite Ausnahmefall vor mit

$$E_2 = -\frac{\bar{I}_{IV}}{\sqrt{B_0}},\ F_2 = -\frac{\bar{I}_{III}}{\sqrt{B_0}}.$$

Die Normalform heißt

$$2y_1y_1' - \frac{6}{\sqrt{B_0}}\varepsilon' y_1 + \frac{4}{\sqrt{B_0}}\varepsilon\varepsilon' = 0.$$

Mit $B_0 = 1$ kann man sie schreiben

$$y_1 \frac{dy_1}{d\varepsilon} - 3y_1 + 2\varepsilon = 0,$$

Digitized by Google

was zu

$$y^2 - 4y\varepsilon + 4\varepsilon^2 - cy + c\varepsilon = 0$$

integriert werden kann. Da

$$\bar{\mathfrak{J}} = \frac{4\varepsilon\varepsilon'}{B_0}, \quad \bar{\mathfrak{K}} = -\frac{3\varepsilon'}{\sqrt{B_0}},$$

so ist dieser Fall durch

$$A = 0, \quad \frac{9}{4}\left(\frac{\bar{\mathfrak{J}}}{\bar{\mathfrak{K}}}\right)' = \bar{\mathfrak{K}} \neq 0$$

charakterisiert.

§ 11. Schluß.

III. $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

Man kann $\alpha = 1$, $\gamma = +1$, $\delta = 0$ nehmen.

$$y^2 + 2\beta yc + c^2 + 2\varepsilon c + \eta = 0$$

hat zur Differentialgleichung eine Gleichung, von der wir nur die Glieder vierten und dritten Grades hinschreiben:

$$y^2 y'^2(1-\beta^2) + y^4\beta'^2 - 2\varepsilon\beta y y'^2 - 2\varepsilon\beta' y^2 y' + 2\beta' y' y^3 + \cdots = 0.$$

Nach § 8 sind jetzt an sich drei Fälle möglich.

a) Diese Glieder vierten und dritten Grades verschwinden. Das bedingt: $\beta = \pm 1$, $\varepsilon = 0$. Man kann $\beta = +1$ nehmen. Also bleibt

$$y^2 + 2yc + c^2 + \eta = 0$$
$$y + c = \pm\sqrt{-\eta}.$$

Das ist aber ein trivialer Fall, er scheidet aus.

b) Nur die Glieder vierten Grades verschwinden, also $\beta = 1$, dafür spaltet sich ein Faktor ab, den wir als y nehmen können, mit $c = 0$. Dann heißt die Gleichung

$$y^2 + 2yc + c^2 + 2\varepsilon c = 0.$$

Die Differentialgleichung lautet

$$2\varepsilon y'^2 + 2y'\varepsilon\varepsilon' - y\varepsilon'^2 = 0$$

also ist

$$A = 2\varepsilon, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \varepsilon\varepsilon', \quad E = -\tfrac{1}{2}\varepsilon'^2, \quad F = 0.$$
$$\Delta = AC - B^2 = 0, \quad \mathfrak{D} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon'^4, \quad A' - 2B = 2\varepsilon',$$
$$D - A\left(\frac{H}{2G}\right)' - B\frac{H}{2G} = 0, \quad \text{da } \frac{H}{G} = \varepsilon.$$

Digitized by Google

Mithin

$$A_1 = A_0\varepsilon, \quad E_1^2 = -A_1 I_{III} = \tfrac{1}{8}A_0\varepsilon'^4, \quad F_1 = 0.$$

Erster Ausnahmefall

$$(\Delta = 0), \quad \mathfrak{K}^* = 0, \quad \mathfrak{J} = \frac{I_{III}}{A_1} = -\frac{1}{8}\frac{\varepsilon'^4}{A_0}$$

Normalform der Differentialgleichung

$$y_1'^2 + 2\sqrt{-\mathfrak{J}}\,y_1 = 0$$

oder mit

$$dx_1^2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-\mathfrak{J}}\,dx^2$$

$$\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 - 4y_1 = 0$$

$$y_1 = (x_1 - c)^2.$$

Dieser Fall ist durch $\Delta = 0$, $\mathfrak{K}^* = 0$ charakterisiert und also mit 1a identisch. Tatächlich lassen sich die Gleichungen

$$y^2 + 2yc + c^2 + \eta = 0$$

und

$$c^2 + 2\delta y + 2\varepsilon c + \eta = 0$$

leicht in einander umrechnen.

c) Die Glieder vierter Ordnung verschwinden nicht, $\beta^2 \neq 1$. Dafür aber lassen sich zwei lineare Faktoren abspalten.

Den einen können wir als y annehmen zu $c = 0$, sodaß die Gleichung heißt

$$y^2 + 2\beta yc + c^2 + 2\varepsilon c = 0.$$

$$y = -\beta c \pm \sqrt{\beta^2 c^2 - c^2 - 2\varepsilon c}$$

muß aber noch eine Doppelwurzel haben, also muß es ein c_0 geben, für das

$$\beta^2 c_0^2 - c_0^2 - 2\varepsilon c_0 = 0$$

ist. $(c_0 \neq 0)$, also muß sein

$$2\varepsilon = c_0\beta^2 - c_0.$$

Der Faktor $y + \beta c_0$ läßt sich dann abspalten. Daher heißt die Gleichung

$$y^2 + 2\beta yc + c^2 + cc_0\beta^2 - cc_0 = 0.$$

Die Differentialgleichung heißt

$$y'^2(1-\beta^2) + y^2\beta'^2 + c_0\beta'(1-\beta^2)y' + c_0\beta\beta'^2 y = 0$$

$$A = 1-\beta^2 \neq 0, \quad B = 0, \quad C = \beta'^2, \quad D = \tfrac{1}{2}c_0\beta'(1-\beta^2),$$

$$E = \tfrac{1}{2}c_0\beta\beta'^2, \quad F = 0.$$

Digitized by Google

folglich

$$\Delta = AC - B^2 = \beta'^2(1-\beta^2), \quad \mathfrak{D} = -\tfrac{1}{4}c_0^2(1-\beta^2)\beta'^4,$$

$$G = \frac{c_0}{2}(1-\beta^2)\beta\beta'^2, \quad I_{\mathrm{I}} = \frac{A'-2B}{A} = -\frac{2\beta\beta'}{1-\beta^2},$$

$$I_{\mathrm{II}} = \frac{AC-B^2}{A^2} = \frac{\beta'^2}{1-\beta^2}, \quad I_{\mathrm{III}} = \frac{\mathfrak{D}}{A^2} = -\frac{1}{4}c_0^2\frac{\beta'^4}{1-\beta^2}, \quad I_{\mathrm{IV}} = 0.$$

Folglich

$$A_1 = A_0 e^{-\int \frac{2\beta\beta'}{1-\beta^2}dx} = A_0(1-\beta^2)$$

$$c_1 = A_1 I_{\mathrm{II}} = A_0\beta'^2, \quad E_1 = 0, \quad F_1 = \frac{A_1}{C_1} I_{\mathrm{III}} = -\tfrac{1}{4}c_0^2\beta'^2.$$

Folglich Normalform

$$A_0(1-\beta^2)y'^2 + A_0\beta'^2y^2 - \tfrac{1}{4}c_0^2\beta'^2 = 0$$

oder

$$A_0(1-\beta^2)\left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2 + A_0y^2 - \tfrac{1}{4}c_0^2 = 0.$$

Man kann $A_0 = \frac{1}{4}c_0^2$ wählen und erhält weiter

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}$$

was

$$c^2(\beta+\sqrt{\beta^2-1})^2 - 2yc(\beta+\sqrt{\beta^2-1}) + 1 = 0$$

ergibt. Das ist scheinbar eine andere Form als die, von der wir ausgegangen sind. Es sind

$$I_{\mathrm{II}} = \frac{\beta'^2}{1-\beta^2} = \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{J} = \frac{I_{\mathrm{III}}}{A_1} = \frac{1}{4}\frac{c_1^2}{A_0}\frac{\beta'^4}{(1-\beta^2)^2}, \quad \mathfrak{K} = 0.$$

Mithin ist dieser Fall durch $\mathfrak{J} = \mathfrak{I}^2$ konst. und $\mathfrak{K} = 0$ charakterisiert. Also ist er mit Fall Ib) identisch. Die Fälle III haben nichts Neues ergeben.

Es bleibt noch der auf Seite 84, am Schluß des Beweises von Satz 18 angedeutete *Einwand zu erledigen:*

Es könnte sein, daß der Ausdruck vierten Grades auf der linken Seite der Differentialgleichung ein volles Quadrat ist; dann könnte der Schluß aus dem Zerfall in *verschiedene* Faktoren im Beweis von Satz 18 nicht gezogen werden.

Nun sieht man aus den §§ 10 und 11, daß die Fälle $\alpha = 0$ oder $\gamma = 0$ nicht in Frage kommen, da der Ausdruck dann nicht vierten Grades ist und also nicht das Quadrat eines Ausdrucks zweiten Grades sein kann. Aus den in § 11 zu Anfang hinge-

Digitized by Google

schriebenen Gliedern dritten und vierten Grades aber erkennt man leicht, daß der quadratische Ausdruck, von einem sicher trivialen Fall abgesehen, die Gestalt

$$2\sqrt{1-\beta^2}\,yy' - 2\varepsilon\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}y' + F$$

bei konstantem β haben muß. Weitere Durchrechnung ergibt dann

$$F = 0$$

und damit Trivialität. Der Einwand kann damit als erledigt angesehen werden.

§ 12. Zusammenfassung.

Satz 21: *Es gibt vier Fälle, in denen durch eine quadratische Beziehung zwischen y und c das Integral einer quadratischen Differentialgleichung gegeben wird. (Von trivialen Fällen abgesehen.)*

Wir geben sie in folgender Tabelle wieder:

Fall Ia und IIIb: $A \neq 0,\ \mathfrak{J} = 0,\ \mathfrak{K}^* = 0.$

Fall Ib und IIIc: $A \neq 0,\ \mathfrak{J} = \mathfrak{J}^2$ const. $\neq 0,\ \mathfrak{K} = 0.$

Fall IIa: $A = 0,\ \bar{\mathfrak{K}} = 0.$

Fall IIb: $A = 0,\ \bar{\mathfrak{K}} = \frac{9}{4}\left(\frac{\bar{\mathfrak{J}}}{\bar{\mathfrak{K}}}\right)' \neq 0.$

Fall Ib ist ein Normalfall ($A \neq 0,\ \mathfrak{J} \neq 0$), bei ihm und nur bei ihm sind beide Diskriminantenkurven singuläre Lösungen.

Im Fall Ia ist die einzige Diskriminantenkurve singuläre Lösung und das ist wieder charakteristisch. Dabei waren

1) *im normalen Fall:* $A \neq 0,\ \Delta \neq 0$

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{A'-B}{A},\quad I_{\mathrm{II}} = \frac{\Delta}{A^2},\quad I_{\mathrm{III}} = \frac{\mathfrak{D}}{A^2},\quad I_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{\sqrt{A}}(Ah' + Bh - D),$$

wo

$$h = \frac{G}{\Delta},\quad G = AE - BD;$$

$$\mathfrak{J} = I_{\mathrm{II}},\quad \mathfrak{J} = \frac{I_{\mathrm{III}}}{A_1},\quad \mathfrak{K} = \frac{I_{\mathrm{IV}}}{\sqrt{A_1}},\quad A_1 = A_0 e^{\int I_1 dx}.$$

2) *im ersten Ausnahmefall:* $A \neq 0,\ \Delta = 0$

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{A'-B}{A},\quad I_{\mathrm{II}} = \frac{\Delta}{A^2} = 0,\quad I_{\mathrm{III}} = \frac{\mathfrak{D}}{A^2},$$

$$I_{\mathrm{IV}}^* = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(A\left(\frac{H}{2G}\right)' + B\frac{H}{2G} - D\right)$$

Digitized by Google

wo

$$H = AF - D^2$$

$$\mathfrak{J} = I_{II} = 0, \quad \mathfrak{J} = \frac{I_{III}}{A_1}, \quad \mathfrak{K}^* = \frac{I^*_{IV}}{\sqrt{A_1}}, \quad A_1 = A_0 e^{\int I_1 dx}.$$

3) *im zweiten Ausnahmefall:* $A = 0, \ \Delta \neq 0$

$$\bar{I}_I = \frac{B' - 2C}{B}, \quad \bar{I}_{III} = \frac{\mathfrak{D}}{B^2}, \quad \bar{I}_{IV} = \frac{(D' - E)B - (B' - C)D}{(\sqrt{B})^3}$$

$$\bar{\mathfrak{J}} = -\frac{\bar{I}_{III}}{B_1}, \quad \bar{\mathfrak{K}} = -\frac{\bar{I}_{IV}}{\sqrt{B_1}}, \quad B_1 = B_0 e^{\int \bar{I}_1 dx}.$$

Die genormten Differentialgleichungen heißen:

Hauptfall: $y_1'^2 + C_2 y_1^2 + 2E_2 y_1 + F_2 = 0$

mit

$$C_2 = \mathfrak{J}, \quad E_2 = \mathfrak{J}\{\int \mathfrak{K} dx + E_0\}; \quad F_2 = \frac{1}{\mathfrak{J}}\{\mathfrak{J} + E_2^2\}.$$

Erster Ausnahmefall: $y_1'^2 + 2E_2 y_1 + F_2 = 0$

mit

$$E_2 = \sqrt{-\mathfrak{J}}, \quad F_2 = 2E_2\{\int \mathfrak{K}^* dx + F_0\}.$$

Zweiter Ausnahmefall: $2y_1 y_1' + 2E_2 y_1 + F_2 = 0$

mit

$$E_2 = \bar{\mathfrak{K}}, \quad F_2 = \bar{\mathfrak{J}}.$$

Von der Untersuchung ausgeschlossen bleiben lineare und Riccatische Differentialgleichungen, d. h. die Fälle $\mathfrak{D} = 0$ und sowohl $A = 0$ als auch $\Delta = 0$.

Digitized by Google

Über die Entwicklung nach Funktionen, die aus denen eines vollständigen Orthogonalsystems durch Integration hervorgehen[1]).

Von A. Hammerstein in Kiel.

1. Schon das Beispiel der trigonometrischen Funktionen

$$1,\ \cos nx,\ \sin nx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

lehrt, daß nicht jede im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetige Funktion durch die Funktionen eines vollständigen[2]) Orthogonalsystems gleichmäßig approximiert werden kann, und daß nicht jede mit stückweise stetiger Ableitung versehene Funktion in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach diesen entwickelbar ist. Beides ist jedoch der Fall, wenn man von dem System (1) zu demjenigen übergeht, welches durch Integration der Funktionen (1) entsteht; das sind also, abgesehen von Faktoren, die Funktionen

$$1,\ x,\ \sin nx,\ \cos nx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man kann nämlich jede stetige Funktion durch Hinzufügen einer linearen in eine solche verwandeln, die in 0 und 2π dieselben Werte annimmt, und also periodisch fortgesetzt werden kann.

Es soll zuerst gezeigt werden, daß diese Eigenschaft jedem vollständigen normierten Orthogonalsystem zukommt, d. h. es gilt der

Satz 1. *Für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ mögen die stetigen Funktionen*

$$\varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ein vollständiges normiertes Orthogonalsytem bilden. Man setze[3])

$$\Phi_n(x) = \int_\alpha^x \varphi_n(\xi)\, d\xi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

1) Vorgetragen in der 301. Sitzung am 25. April 1934.

2) Unter Vollständigkeit werde verstanden, daß sich jede stückweise stetige Funktion f durch die Funktionen $\varphi_n(x)$ des Systems im Mittel approximieren lasse:

$$\int_\alpha^\beta (f(x) - \sum c_\nu \varphi_\nu(x))^2\, dx \leqq \varepsilon.$$

3) Die Wahl der unteren Grenze α ist dabei unwesentlich.

Digitized by Google

Dann läßt sich jede für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ stetige, mit stückweise stetiger Ableitung versehene Funktion $f(x)$ in die gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(x) = f(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x), \quad c_n = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\, \varphi_n(x)\, dx$$

entwickeln.

Ferner kann jede stetige Funktion durch das System $\{\Phi_n(x)\}$ gleichmäßig im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ approximiert werden.

Aus der letztgenannten Tatsache folgt unmittelbar etwas allgemeiner

Satz 2. *Das System der stetigen linear unabhängigen Funktionen*

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \ldots$$

sei im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ vollständig. Jede in $\langle \alpha, \beta \rangle$ stetige Funktion läßt sich durch die Funktionen

$$U_0 = 1, \quad U_n(x) = \int_{\alpha}^{x} u_n(\xi)\, d\xi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gleichmäßig approximieren.

In der Tat, orthogonalisiert man das System $\{u_n\}$ zu $\{\varphi_n\}$, so ist $\{\varphi_n\}$ ebenfalls vollständig. Jedes stetige $f(x)$ kann somit nach Satz 1 durch $\{\Phi_n\}$ gleichmäßig approximiert werden, und da die $U_n(x)$ lineare Kombinationen der $\Phi_n(x)$ sind, folgt das gleiche für $\{U_n\}$.

Satz 1 ist leicht zu beweisen. Der erste Teil folgt auf Grund der Schwarzschen Ungleichheit aus

$$\left| f(x) - f(\alpha) - \sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x) \right| = \left| \int_{\alpha}^{x} \left(f'(\xi) - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(\xi) \right) d\xi \right|$$

$$\leqq \left\{ (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} \left(f'(\xi) - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(\xi) \right)^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}},$$

wenn man die Bedeutung der c_n und die Vollständigkeit der $\varphi_n(x)$ berücksichtigt.

Insbesondere sind also die Potenzen von x nach $\{\Phi_n(x)\}$ entwickelbar.

Um nun den Approximationssatz zu beweisen, bestimme man nach dem Weierstraßschen Satz zu gegebenem ε ein Polynom, so daß

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} A_n x^n \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

wird.

Digitized by Google

Setzt man darin für x^n die Abschnitte ihrer Reihen in $\Phi_\nu(x)$ ein, die so gewählt sind, daß sie sich von x^n dem Betrage nach um höchstens $\frac{\varepsilon}{2(N+1)A_n}$ unterscheiden (Glieder mit $A_n = 0$ werden nicht aufgeschrieben), so folgt die Behauptung unmittelbar.

2. Besitzen die $\varphi_n(x)$ stückweise stetige Ableitungen, so besteht der *Eindeutigkeitssatz:*

Gilt für eine mit stückweise stetiger Ableitung versehene Funktion $f(x)$ die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$f(x) - f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x), \tag{2}$$

so ist

$$c_n = \int_\alpha^\beta f'(x)\, \varphi_n(x)\, dx.$$

In der Tat multipliziert man (2) mit $\varphi_\varrho'(x)$ und integriert, so erhält man

$$\int_\alpha^\beta (f(x) - f(\alpha))\, \varphi_\varrho'(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_\alpha^\beta \Phi_n(x)\, \varphi_\varrho'(x)\, dx.$$

Teilintegration ergibt

$$(f(\beta) - f(\alpha))\, \varphi_\varrho(\beta) - \int_\alpha^\beta f'(x)\, \varphi_\varrho(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(\beta)\, \varphi_\varrho(\beta) - c_\varrho,$$

wonach aus (2) mit $x = \beta$ die Behauptung folgt.

3. *Geht man von einem normierten Orthogonalsystem $\{\varphi_n\}$ aus und bildet die zugehörigen $\{\Phi_n\}$, so ist dafür, daß für jedes stetige $f(x)$ mit stückweise stetiger Ableitung die gleichmäßig konvergente Entwicklung*

$$f(x) - f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x), \qquad \left(c_n = \int_\alpha^\beta f'\, \varphi_n\, dx\right)$$

gilt, die Vollständigkeit der $\{\varphi_n\}$ notwendig.

Der Beweis ergibt sich aus folgender, später nochmals zu verwendender Formel:

Setzt man für stetiges mit stückweise stetiger Ableitung versehenes $f(x)$ und beliebige Konstante $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_m$

$$\int_\alpha^x f(y)\, dy - \sum_{n=0}^{m} \xi_n \Phi_n(x) = r_m(x),$$

so ergibt sich durch Integration nach Teilen:

Digitized by Google

3) $$\int_\alpha^\beta f' r_m\,dx = f(\beta) r_m(\beta) - f(\alpha) r_m(\alpha) - \int_\alpha^\beta f^2\,dx + \sum_{n=1}^{m} \xi^n \int_\alpha^\beta f\,\varphi_n\,dx.$$

Setzt man hierin insbesondere

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_n = \int_\alpha^\beta f\,\varphi_n\,dx \qquad n = (1, 2, \ldots m),$$

so konvergiert $r_m(x)$ nach Annahme mit wachsendem m gleichmäßig gegen 0, d. h. es ist

$$\int_\alpha^\beta f^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_\alpha^\beta f\,\varphi_n\,dx \right)^2.$$

Das System $\{\varphi_n\}$ ist also für alle mit stückweise stetiger Ableitung versehenen $f(x)$ vollständig, woraus bekanntlich die Vollständigkeit für stückweise stetiges f folgt

Notwendig dafür, daß das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ die Eigenschaft hat, jede stetige Funktion $f(x)$ gleichmäßig zu approximieren ist, daß das System $\{\varphi_n(x)\}$ abgeschlossen im Bereich der mit stückweise stetiger Ableitung versehenen stetigen Funktionen ist; d. h. also, daß aus den Gleichungen

4) $$\int_\alpha^\beta f\,\varphi_n\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für stetiges f mit stückweise stetigem f' folgt: $f \equiv 0$.

In der Tat, sei f eine solche Funktion, für die (4) gilt. Wendet man auf sie Gleichung (3) an, so ergibt sich, da durch geeignete Wahl von $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_m$ nach der Annahme $r_m(x)$ gleichmäßig beliebig klein gemacht werden kann, daß $\int_\alpha^\beta f^2\,dx = 0$ und somit $f(x) \equiv 0$ ist.

Daraus folgt ohne weiteres allgemeiner: *Notwendig dafür, daß man jede stetige Funktion $f(x)$ durch das System der mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehenen linear unabhängigen Funktionen 1, $U_1(x)$, $U_2(x)$, ... gleichmäßig approximieren kann, ist, daß das System $U_n'(x)$ im Bereich der stetigen mit stückweise stetiger Ableitung versehenen Funktionen abgeschlossen ist.* Man braucht ja nur das System $\{U_n'(x)\}$ in $\{\varphi_n(x)\}$ zu orthogonalisieren und auf dieses den vorangehenden Satz anzuwenden.

4. Als Anwendung der angeführten Sätze ergibt sich:

Satz 4. *Notwendig und hinreichend für die Vollständigkeit des mit den stetigen Funktionen*

Digitized by Google

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta)$$

gebildeten normierten Orthogonalsystems ist, daß die in x bzw. y stets gleichmäßig konvergente Reihe

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\, \Phi_n(y), \tag{5}$$

$$\left(\Phi_n(x) = \int_{\alpha}^{x} \varphi_n(\xi)\, d\xi\right)$$

die Funktion

$$K(x, y) = \begin{cases} x - \alpha & \text{für } \alpha \leqq x \leqq y \\ y - \alpha & \text{für } y \leqq x \leqq \beta \end{cases} \tag{6}$$

darstellt.

Die gleichmäßige Konvergenz von (5) folgt aus der Schwarzschen Ungleichheit, da nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum \Phi_n(x)^2 = \sum \left(\int_{\alpha}^{x} \varphi_n(\xi)\, d\xi\right)^2 \leqq \beta - \alpha$$

ist.

Ist nun das System $\{\varphi_n(x)\}$ vollständig, so liefert der Entwicklungssatz I auf die Funktion (6) angewandt, wegen

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \leqq x \leqq y \\ 0 & \text{für } y < x \leqq \beta, \end{cases}$$

$$K(x, y) = K(\alpha, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \int_{\alpha}^{y} \varphi_n(\xi)\, d\xi,$$

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\, \Phi_n(y).$$

Die Bedingung ist also notwendig.

Stelle umgekehrt die Reihe (5) die Funktion (6) dar, so gehe man von einer stetigen mit stückweise stetiger Ableitung versehenen Funktion $f(x)$ aus und bilde

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x, y) f'(y)\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \int_{\alpha}^{\beta} f'(y)\, \Phi_n(y)\, dy,$$

$$\int_{\alpha}^{x} (y - \alpha) f'(y)\, dy + \int_{x}^{\beta} (x - \alpha) f'(y)\, dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \left[f(\beta)\, \Phi_n(\beta) - \int_{\alpha}^{\beta} f\, \varphi_n\, dy\right],$$

Digitized by Google

$$f(x)(x-\alpha)-\int_{\alpha}^{x} f(y)\,dy+(x-\alpha)(f(\beta)-f(x))$$
$$=K(x,\beta)f(\beta)-\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\int_{\alpha}^{\beta} f\,\varphi_n\,dy,$$
$$\int_{\alpha}^{x} f(y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\int_{\alpha}^{\beta} f\,\varphi_n\,dy.$$

Hieraus folgt nach dem Beweis unter 3. die Vollständigkeit von $\{\varphi_n(x)\}$.

Digitized by Google

Ein Beitrag zur Geometrie des Zirkels [1])

Von Georg Scheffers in Berlin-Dahlem

1. Man kann zwei Kreisringe herstellen derart, daß die Punkte, in denen sich die Außenkreise schneiden, auf derselben Geraden liegen wie die Punkte, in denen sich die Innenkreise schneiden. Legt man diese Ringe dann irgendwie aufeinander, so wird man überrascht sein darüber, daß auch dann noch jene vier Punkte auf gerader Linie bleiben, siehe Fig. 1.

Nun eine andere kleine Merkwürdigkeit: Auf rechtwinkligen Geraden g und h nehmen wir irgendwelche Punkte P_1, P_2, P_3 ... und Q_1, Q_2, Q_3 ... an. Jeder Punkt P werde mit jedem Punkte Q starr verbunden mittels eines Stabes. In allen Punkten P und Q denken wir uns Zapfen, um die sich die Stäbe drehen lassen, und diese Zapfen mögen in Schienen längs g und h gleiten. Die Frage ist, ob dann das Gestänge überhaupt noch zu bewegen ist. Wenn es sich um m Punkte P und n Punkte Q handelt, sind $m.n$ Stäbe vorhanden. Andererseits bilden alle Punkte P und Q ein $(m+n)$-Eck, sogar eines von besonderer Art, und man weiß, daß ein $(m+n)$-Eck nur $2(m+n)-3$ wesentliche Bestimmungsstücke hat. Wenn nun die Zahlen m und n nicht zu klein sind, ist diese Anzahl bedeutend geringer als die Anzahl $m.n$ aller Stäbe. Man wird daher vermuten, daß das Gestänge unbeweglich in den Schienen g und h eingeklemmt sei. Aber es bleibt doch immer noch beweglich, wie groß auch die Anzahl aller Stäbe sein mag!

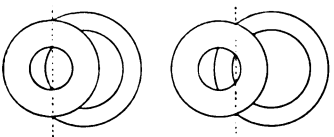


Fig. 1

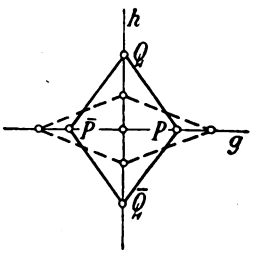


Fig. 2

1) Vorgetragen in der 302. Sitzung am 30. Mai 1934.

Digitized by Google

2. Beide Tatsachen haben ihren Grund im Vorhandensein einer einfachen Transformation. Der Schnittpunkt von g und h sei O, und die Punkte P bzw. Q seien bestimmt durch ihre Abstände von diesem Anfangspunkt, also durch die Abszissen $OP = x$ und durch die Ordinaten $OQ = y$. Jetzt sollen die Punkte P in neue Punkte P' von g sowie zugleich die Punkte Q in neue Punkte Q' von h transformiert werden; die neuen Abszissen x' seien also durch eine Funktion von x allein bestimmt und die neuen Ordinaten y' durch eine Funktion von y allein. Wir schreiben nun insbesondere vor, *daß jede Entfernung PQ bei der Transformation unverändert bleiben soll:*

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$
$$\text{oder:} \quad x'^2 - x^2 = y^2 - y'^2.$$

Weil x' nur von x und y' nur von y abhängt, müssen beide Seiten dieser Gleichung konstant, gleich c sein. Mithin handelt es sich um eine Transformation von dieser Art:

$$\text{(T)} \qquad x' = \sqrt{x^2 + c}, \qquad y' = \sqrt{y^2 - c}.$$

Wegen der Quadratwurzeln sollten eigentlich nicht Punkte P und Q, sondern Punktepaare P, $\overline{P}$ und Q, $\overline{Q}$ ins Auge gefaßt werden, nämlich neben den Punkten P und Q auch ihre Spiegelpunkte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ hinsichtlich O. Demnach handelt es sich um eine Transformation solcher *Rauten* $PQ\overline{P}\overline{Q}$, *deren Diagonalen auf den Achsen g und h liegen*, siehe Fig. 2. Jede derartige Raute geht vermöge (T) in eine ebensolche Raute mit derselben Kantenlänge über.

Da c eine willkürliche Konstante ist, gibt (T) eine stetige Schar von Transformationen (eine eingliedrige Gruppe, erzeugt von einer infinitesimalen Transformation). Übt man diese Schar von Transformationen auf die Zapfen des vorhin betrachteten Gestänges aus, so leuchtet ein, daß es in der Tat längs g und h gleitet, indem es sich dabei stetig ändert. Auch jene zuerst erwähnte Eigenschaft besonderer Kreisringe wird jetzt sofort klar, wenn man als Zapfen des Gestänges zwei Punkte P auf g sowie zwei Punkte Q auf h nebst den beiden Spiegelpunkten $\overline{Q}$ benutzt. Das Gestänge besteht aus acht Stangen und kann gleiten. Die beiden Kreisringe bekommt man, indem man um die Punkte P die Kreise durch die Punkte Q (und daher auch durch die Punkte $\overline{Q}$) zieht. Die gemeinsame Gerade der Schnittpunkte der Außenkreise und der Schnittpunkte der Innenkreise ist die Achse h.

Unter den Rauten, deren Diagonalen auf g und h liegen, gibt es insbesondere solche von der Kantenlänge Null. (Ihre Kanten

Digitized by Google

liegen auf Minimalgeraden oder isotropen Geraden). Haben die Eckpunkte P und $\overline{P}$ einer derartigen Raute $PQ\overline{P}\overline{Q}$ die Abszissen $+a$ und $-a$, so haben die Eckpunkte Q und $\overline{Q}$ die Ordinaten $+ia$ und $-ia$. (Hier darf a aber auch imaginär sein.) In der Tat ergeben sich dann nach (T) für die Ecken der transformierten Raute wieder Abszissen von der Form $+a'$ und $-a'$ sowie Ordinaten von der Form $+ia'$ und $-ia'$, wenn a' eine der Quadratwurzeln aus a^2+c bedeutet.

3. Nun wollen wir nicht nur die Punkte von g und h, sondern auch Kreise transformieren, aber nur solche *Kreise, deren Mittelpunkte auf g oder h liegen.* Vermöge der Transformation (T) gehen die Mittelpunkte in neue Mittelpunkte über. Was die Halbmesser betrifft, so wollen wir vorschreiben, daß sie unveränderlich seien.

Wieder betrachten wir eine Raute $PQ\overline{P}\overline{Q}$ von der Kantenlänge Null. Alle Kreise durch P und $\overline{P}$ bilden ein Büschel, ebenso alle Kreise durch Q und $\overline{Q}$, und man weiß, daß die Kreise der beiden Büschel einander rechtwinklig durchsetzen. Weil die Mitten aller Kreise dieser Büschel auf den Achsen g und h liegen, sind die Kreise der Transformation zu unterwerfen, und weil die Raute $PQ\overline{P}\overline{Q}$ von der Kantenlänge Null wieder in eine ebensolche übergeht, folgt also: *Vermöge einer Transformation* (T) *geht jedes rechtwinklige Kreisnetz mit den Achsen g und h in ein ebensolches Netz über.* Hierbei sei noch angemerkt: Wenn z. B. P und $\overline{P}$ reell, also Q und $\overline{Q}$ imaginär sind, kann man durch eine geeignete Transformation (T) immer erreichen, daß es sich im neuen Kreisnetz umgekehrt verhält, d. h. daß hier die Kreise des ersten Büschels imaginäre und die des zweiten reelle gemeinsame Punkte bekommen.

Wenn wie vorhin a und $-a$ die Abszissen von P und $\overline{P}$ sowie ia und $-ia$ die Ordinaten von Q und $\overline{Q}$ sind, können wir die Konstante c in (T) insbesondere gleich $-a^2$ annehmen, und dann bekommen alle vier Ecken der neuen Raute die Abszissen bezw. Ordinaten Null, d. h. sie rücken in O zusammen. Daraus folgt: *Vermöge einer geeigneten Transformation* (T) *kann ein rechtwinkliges Kreisnetz mit den Achsen g und h übergeführt werden in das besondere Netz aller Kreise, die im Anfangspunkt O die eine oder andere Achse berühren.*

Diese höchst einfachen Tatsachen lassen sich nun in der *Geometrie des Zirkels* oft zur Lösung von Aufgaben verwenden. Ich will mich darauf beschränken, das wenigstens an einem besonders wichtigen Beispiel auseinanderzusetzen.

Digitized by Google

4. Bekanntlich hat man bewiesen, daß sich alle Euklidischen Aufgaben, d. h. alle diejenigen, die mittels Lineals und Zirkels lösbar sind, auch mittels des Zirkels allein lösen lassen, d. h. mit Hilfe von Kreisen von nur endlichen Halbmessern. Man zeigt nämlich, daß der Zirkel ausreicht für die *drei Grundaufgaben*, auf deren wiederholte Ausführung jede Euklidische Aufgabe zurückkommt. Das sind die folgenden Aufgaben:

1. Die Schnittpunkte von zwei gegebenen Kreisen zu bestimmen.
2. Die Schnittpunkte eines gegebenen Kreises mit einer gegebenen Geraden zu bestimmen.
3. Den Schnittpunkt von zwei gegebenen Geraden zu bestimmen.

Weil das Lineal beseite zu lassen ist, liegen die Geraden nicht ausgezogen vor; man muß sie sich durch je zwei Punkte gegeben denken. In der Geometrie des Zirkels liefern nun zwei Zirkelschläge nicht einen einzelnen Punkt, sondern ein Punktepaar. In den beiden ersten Aufgaben werden zwar Punktepaare gesucht, dagegen wird in der dritten nach einem einzelnen Punkte gefragt. Dieser Umstand macht es erklärlich, daß die dritte Aufgabe erheblichere Schwierigkeiten bereitet. Aber man hat gezeigt, daß alle drei mittels des Zirkels allein lösbar sind. Ich will im folgenden die dritte Aufgabe beiseite lassen. Soviel ich sehe, reichen nämlich die besonderen Hilfsmittel, die ich anwenden möchte, für sie nicht aus. Gegen die Art, wie man bisher die erste und zweite Aufgabe erledigt hat, lassen sich Einwände erheben:

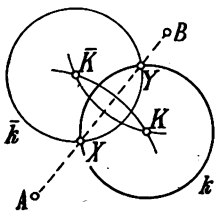


Fig. 3

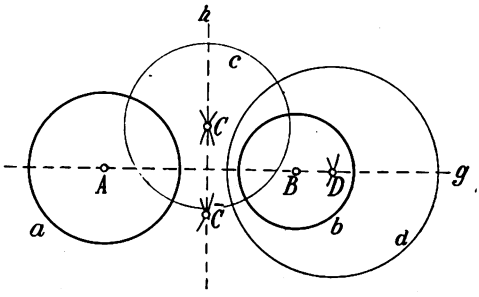


Fig. 4

Was die erste Aufgabe betrifft, so sagt man, daß sie überhaupt keiner Konstruktionen bedarf. Denn wenn zwei Kreise vorliegen, hat man ja auch ihre Schnittpunkte. Lassen wir es vorerst dabei und wenden wir uns zur zweiten. Die erledigt man einfach. Wenn ein Kreis k mit der Mitte K gegeben ist und eine Gerade durch zwei Punkte A und B, siehe Fig. 3, so schneiden sich die Kreise um A und B durch K zum zweiten Mal im Spie-

Digitized by Google

gelpunkte $\bar{K}$ von K hinsichtlich der Geraden AB. Der Kreis $\bar{k}$ um $\bar{K}$, der denselben Halbmesser wie k hat, wird nun k in den gesuchten Punkten X und Y von AB schneiden. Schon die Begründer der Geometrie des Zirkels, Mohr und Mascheroni, bemerkten, daß diese Lösung versagt, wenn die Gerade AB durch die Mitte K von k geht, und haben für diesen Fall besondere Lösungen ersonnen. Eigentlich müßte man aber auch dann, wenn die Gerade AB *beinahe* durch die Kreismitte K geht, eine bessere Lösung haben. Die vorgeführte Lösung leidet überhaupt an einem Mangel: An sich sind die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis um so schärfer festgelegt, je weniger die Gerade von der Kreismitte entfernt ist. Aber mit der angegebenen Lösung verhält es sich gerade umgekehrt, was übrigens merkwürdiger Weise bisher nicht beanstandet worden ist. Noch ein anderer Einwand ist zu machen: Auch wenn die Schnittpunkte selbst nicht reell sind, gehen durch sie reelle Kreise, vorausgesetzt, daß das Gegebene reell ist, und das gilt auch für die erste Grundaufgabe. Man sollte daher die erste und zweite Grundaufgabe allgemeiner so fassen:

Durch die Schnittpunkte von zwei reellen Kreisen oder von einem reellen Kreis mit einer reellen Geraden soll irgendein reeller Kreis gelegt werden, unabhängig davon, ob die Schnittpunkte selbst reell oder imaginär sind.

5. Nach dieser Kritik möchte ich nun zeigen, wie man zum Ziele kommt. Dabei darf ich mich auf den Fall beschränken, wo zwei Kreise gegeben sind. Sie gehören einem Büschel an, unabhängig davon, ob sie sich reell oder imaginär schneiden. Dazu gehört ein rechtwinkliges Büschel. Deshalb will ich sogleich auch Kreise dieses rechtwinkligen Büschels ermitteln. Ich will also diese Aufgabe lösen:

Gegeben seien zwei reelle Kreise; irgendwelche reelle Kreise zu zeichnen, die entweder durch ihre (reellen oder imaginären) Schnittpunkte gehen oder zu ihnen rechtwinklig sind.

In Fig. 4 seien a und b die gegebenen Kreise; ich wähle sie so, daß sie keine reellen Schnittpunkte haben. Die Mitten von Kreisen bezeichne ich immer ebenso wie die Kreise selbst, aber mit großen Buchstaben, also die Mitten von a und b mit A und B. Man denke sich die Achsen g und h des zugehörigen rechtwinkligen Kreisnetzes. Die Achse g ist die Gerade AB, die Achse h die Potenzlinie von a und b. Durch eine Transformation (T) kann man erreichen, daß die Kreise a und b reelle Schnittpunkte X und Y bekommen, was der Deutlichkeit halber besser in einer neuen

Digitized by Google

Figur, in Fig. 5, gezeichnet wird. (Die wegen der angewandten Transformation eigentlich bei den neuen Kreisen anzubringenden Akzente darf ich wohl weglassen.) Hier können wir nun insbesondere den Spiegelkreis $\bar{a}$ von a zeichnen, denn seine Mitte ist der zweite Schnittpunkt $\bar{A}$ der um X und Y durch A gezogenen Kreise. Wir gehen einen Schritt weiter: Vermöge einer geeigneten Transformation (T) läßt sich erreichen, daß das Büschel der Kreise, zu dem a und b gehören, in lauter einander im Schnittpunkte O von g und h berührende Kreise übergehen. Aber wenn man das zeichnen will, stellt sich eine Schwierigkeit heraus: Mittels des Zirkels allein kann man nicht ohne weiteres die Kreise a und b einander berührend zeichnen. Wohl aber gelingt es mit den beiden gleichgroßen Kreisen a und $\bar{a}$. Nachdem man nämlich a in Fig. 6

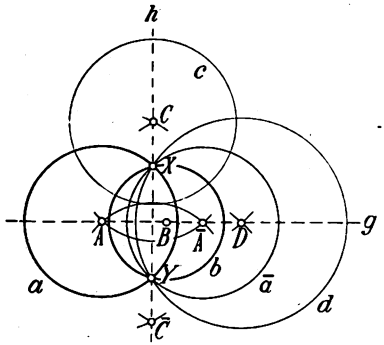


Fig. 5

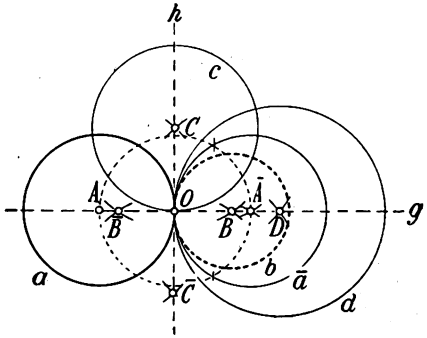


Fig. 6

gezeichnet hat, nimmt man auf diesem Kreise den Punkt O an und zieht um ihn einen Hilfskreis mit demselben Halbmesser. Wenn man in ihn den Halbmesser von A an wiederholt als Sehne einträgt, gelangt man zum Spiegelpunkte $\bar{A}$ auf a, und um ihn kann man nun den ebensogroßen Kreis $\bar{a}$ ziehen, so daß er a in der Tat in O berührt. Man kann nun hier beliebige Punkte der Achse h ermitteln, z. B. zwei Spiegelpunkte C und $\bar{C}$ mit Hilfe beliebiger gleichgroßer Kreise um A und $\bar{A}$. Wenn man ferner um C und $\bar{C}$ wiederum zwei beliebige gleichgroße Kreise zieht, bekommt man auch beliebige Punkte von g, z. B. den Punkt D. Rückwärts kann man nun die Punkte C, $\bar{C}$, D auch in Fig. 5 bestimmen, weil hier die Entfernungen AC, $\bar{A}C$, CD, $\bar{C}D$ ebenso groß sind. Dasselbe gilt von Fig. 4. Hier ist nur zu beachten, daß $\bar{A}$ nicht vorliegt. Man bekommt daher C und $\bar{C}$, indem man um A und B die Kreise zieht, deren Halbmesser die Strecken AC und BC in Fig. 5 sind.

Digitized by Google

In Fig. 6 gehört der Kreis d um D mit dem Halbmesser $D0$ zum Büschel der Kreise a und $\bar{a}$, d. h. wenn man in Fig. 5 und 4 mit diesem Halbmesser die Kreise d um D zieht, hat man die Aufgabe gelöst, beliebige Kreise d durch die Schnittpunkte von a und b zu legen, auch wenn diese wie in Fig. 4 imaginär sind. Ferner: Zum zweiten Büschel gehört in Fig. 6 der Kreis c um C durch O. Wenn man also mit seinem Halbmesser die Kreise um C in Fig. 5 und 4 zieht, hat man auch die Aufgabe gelöst, beliebige zu a und b rechtwinklige Kreise c zu bestimmen.

Das gesteckte Ziel ist also erreicht. Nun kann noch bemerkt werden: Nachträglich läßt sich in Fig. 6 der Kreis b ermitteln. Man entnimmt nämlich aus Fig. 5 die Entfernung seiner Mitte B von C und $\bar{C}$ und benutzt sie ebenso in Fig. 6. Wenn man dann hier um den gefundenen Punkt B den Kreis zieht, dessen Halbmesser gleich dem von b in der ursprünglichen Fig. 4 ist, hat man die Genugtuung, daß der Kreis tatsächlich durch O geht. Die Strecke AB in Fig. 6 ist die *Summe* der Halbmesser der in Fig. 4 gegebenen Kreise a und b. Wenn man statt B in Fig. 6 den Spiegelpunkt B benutzt, ist ebenso die Strecke $A\bar{B}$ in Fig. 6 die *Differenz* der Halbmesser der Kreise a und b. Somit sind hier nebenbei die Aufgaben gelöst worden: *Mittels des Zirkels allein die Summe oder Differenz von zwei gegebenen Strecken als eine Strecke darzustellen.*

6. Wenn man sich zum ersten Mal mit der Geometrie des Zirkels beschäftigt, hat man Vorurteile. Solche Aufgaben wie die soeben formulierten erscheinen einem trivial. Aber wenn man wirklich einmal das Lineal beiseite legt und nur den Zirkel zur Hand nimmt, kommt man sich gar zu bald hilflos wie ein Kind vor. Man bemerkt staunend oder ärgerlich, wie unbeholfen man dann wird. Erst wenn man soweit ist, fängt man an, den Scharfsinn zu bewundern, mit dem Mohr und Mascheroni die Euklidischen Aufgaben bezwungen haben. Man bekommt dann aber auch den Eindruck, daß es sich bei ihnen um lauter einzelne Kunstgriffe handelt. Deshalb sieht man sich nach mehr methodischen Verfahren um. Ihrer gibt es jedoch bisher in der Geometrie des Zirkels keine abgesehen von dem Verfahren von Aug. Adler, der im Jahre 1890 mittels der Transformation vermöge reziproker Radien nachwies, wie man alle Euklidischen Aufgaben mit dem Zirkel allein lösen kann[1]). Doch muß gesagt werden, daß man

1) *„Zur Theorie der Mascheronischen Transformationen"*, Stzgsber. d. Akad. d. W. zu Wien, 99. Bd., Abt. II a, 1890, S. 910—916.

Digitized by Google

auf dem von Adler angegebenen Wege meistens zu unerträglich umständlichen Lösungen kommt. Deshalb ist jedes neue methodische Verfahren in der Geometrie des Zirkels zu begrüßen, auch wenn es wie das von mir an einem Beispiel auseinander gesetzte nur für einen beschränkten Umfang von Aufgaben anwendbar ist. Schon im Jahre 1929 hatte ich gelegentlich eines Vortrages an der Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht im wesentlichen die vorhin gebrachte Lösung einiger Aufgaben auseinandergesetzt, aber noch nicht so durchsichtig, weil mir damals das Kolumbusei, das Bestehen der Transformationen (T), noch nicht bewußt war[2]). Diese Transformationen sind übrigens um ihrer selbst willen merkwürdig, nämlich sie sind Teile von gewissen *Berührungstransformationen* mit eigentümlichen Eigenschaften. Vielleicht darf ich über sie gelegentlich hier vortragen. Absichtlich bin ich heute auf sie nicht eingegangen, um nicht den elementaren Charakter meiner Ausführungen zu beeinträchtigen.

1) *„Allerhand aus der zeichnenden Geometrie"*, Mttlgn. d. Preuß. Hauptstelle f. d. naturw. Unterr., 11. Heft, Leipzig, Quelle & Meyer, 1930, insb. S. 48—53.

Digitized by Google

Über eine Transformation von Variations- und Randwertproblemen [1]).

Von H. O. Hirschfeld in Berlin.

Eine sehr allgemeine Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen vom elliptischen Typus läßt sich bekanntlich auf die Normalform

$$\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

transformieren. Während jedoch noch für diese Differentialgleichung die Frage nach der Existenz einer Lösung recht ungeklärt ist, lassen sich für die Spezialfälle

$$(1^*) \quad \begin{cases} \text{a)} & \Delta u = f(x, y, u), \\ \text{b)} & L(u) = \dfrac{\partial}{\partial x}(p(x, y)u_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(p(x, y)u_y) = f(x, y, u) \end{cases}$$

recht allgemeine Kriterien beweisen. So löst A. Hammerstein [2]) im Rahmen allgemeinerer Betrachtungen über nichtlineare Integralgleichungen das erste Randwertproblem von (1*) b) mit einer Methode, die sich auch auf solche Randwertaufgaben übertragen läßt, die auf eine brauchbar unstetige [3]), symmetrische, positiv definite Greensche Funktion führen. Die allgemeineren Sätze (Satz 3 u. 4) werden dabei zurückgeführt auf einen Satz über Integralgleichungen (Satz 2), bei dem die Funktion f noch einschränkenderen Bedingungen unterworfen ist und der für das vorliegende Randwertproblem Folgendes besagt:

Satz I: *B sei ein von stückweise analytischen Kurven begrenzter, einfach zusammenhängender, schlichter, im Endlichen gelegener Bereich der x, y-Ebene. Dann hat die Differentialgleichung*

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x}(p(x, y)u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(p(y, y)u_y) = f(x, y, u) \qquad p(x, y) \geqq 0$$

eine Lösung, die auf dem Rande von B stetig vorgegebene Randwerte $\Phi(s)$ annimmt, wenn für das stetig differentiierbare $f(x, y, u)$ gilt:

1) Vorgetragen in der 303. Sitzung am 27. Juni 1934.

2) A. Hammerstein, Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, Acta mathematica 54 (1930), 118.

3) D. h. so beschaffen, daß die Theorie der linearen Integralgleichungen für die Greensche Funktion als Kern gilt.

Digitized by Google

$$\int_0^u f(x, y, \varrho)\, d\varrho \geqq -\frac{\varkappa}{2} u^2 - C_1$$

und

$$|f(x, y, u)| \leqq C_2 |u| + C_3.$$

Hierbei müssen $\varkappa$, C_1, C_2, C_3 *von* x, y, u *unabhängig sein, und es muß, wenn* λ_1 *der kleinste Eigenwert von* $\Delta u + \lambda u = 0$ *in* B *ist, die Ungleichung* $0 < \varkappa < \lambda_1$ *gelten.*

Die Voraussetzungen dieses Satzes lassen schon den Zusammenhang mit dem zu der Differentialgleichung gehörigen Variationsproblem erkennen, und so wird auch in obig zitierter Arbeit der folgende Zusatz bewiesen.

Zusatz: Ist unter den Voraussetzungen von Satz I $\Phi(s) \equiv 0$, so erteilt die in Satz I konstruierte Lösung dem Dirichletschen Integral

$$D(\omega) = \iint_B [p(x, y)(\omega_x^2 + \omega_y^2) + 2F(x, y, \omega)]\, dx\, dy \tag{2}$$

mit

$$F(x, y, \omega) = \int_0^\omega f(x, y, \varrho)\, d\varrho$$

unter allen am Rande von B verschwindenden, mit stückweise stetigen, beschränkten Ableitungen erster Ordnung versehenen Funktionen $\omega(x, y)$ ein absolutes Minimum [4]).

Besonders auf Grund dieses Zusatzes gelingt dann der Beweis des allgemeinsten Satzes 4).

Im Folgenden sollen nun diese Sätze im Wesentlichen auf diejenigen Fälle der Gleichung (1) verallgemeinert werden, die aus einem Variationsproblem entspringen. Es soll nämlich der Spezialfall:

$$\varphi(x, y, u)\, \Delta u = -\tfrac{1}{2} \varphi_u(x, y, u)(u_x^2 + u_y^2) - \varphi_x(x, y, u) u_x - \varphi_y(x, y, u) u_y + f(x, y, u), \tag{3}$$

das heißt die Eulersche Gleichung des Doppelintegrals

$$I_B(u) = \iint_B [\varphi(x, y, u)(u_x^2 + u_y^2) + 2F(x, y, u)]\, dx\, dy \tag{4}$$

behandelt werden. Gleichzeitig mit dem Randwertproblem der Gleichung (3) wird dann das noch immer ungelöste zweidimensionale Variationsproblem

4) In diesem Falle ist die Lösung im abgeschlossenen B stetig differentiierbar. Vgl. a. a. O. 2) S. 142 (1 a).

Digitized by Google

$$\iint_B \overline{F}(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy = \text{Minimum}$$

wenigstens für den Fall gelöst werden, daß $\overline{F}$ eine lineare Funktion von $(u_x^2 + u_y^2)$ ist. Es wird nämlich unter recht allgemeinen Bedingungen für die Koeffizienten φ und F in (4) die Existenz eines relativen Minimums nachgewiesen werden (Bemerkung am Ende von Satz III). Zunächst soll allerdings ein Satz bewiesen werden, der noch sehr einschränkende Bedingungen für die Koeffizienten fordert:

Satz II: *Ersetzt man unter den Voraussetzungen des Satz I die dortige Funktion $p(x, y)$ durch die in B und für alle u definierte Funktion $\varphi(x, y, u)$, und ist sowohl diese als auch $\dfrac{\partial \varphi(x, y, u)}{\partial u}$ dreimal nach x und y stetig differentiierbar*[5]*), so gilt die Behauptung des Satz I unter folgenden Voraussetzungen für $\varphi(x, y, u)$:*

$$\varphi(x, y, u) \geqq \varepsilon > 0$$

für x, y aus B und alle u und

$$\left| \frac{\partial^2 \sqrt{\varphi(x, y, u)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sqrt{\varphi(x, y, u)}}{\partial y^2} \right| \leqq C_4$$

für x, y aus B und alle großen $|u|$, wobei aber jetzt die Konstanten C_4 und $\varkappa$ der Ungleichung

$$0 < C_4 + \frac{\varkappa}{\sqrt{\varepsilon}} < \lambda_1 \sqrt{\varepsilon}$$

genügen müssen.

Beweis: Mit einer Lösung $u^*(x, y)$ von (3) suchen wir eine stationäre Argumentfunktion für das Integral (4)[6]), d. h. eine im Inneren von B zweimal stetig differentiierbare Funktion $u^*(x, y)$, die auf dem Rande von B die Werte $\Phi(s)$ annimmt und folgende Eigenschaft hat: Ist $\overline{B}$ ein beliebiger ganz im Inneren von B gelegener Teilbereich, der von einer stetig gekrümmten Randkurve $\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$ begrenzt wird, und werden die Werte, die $u^*(x, y)$ auf $\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$ annimmt mit $\bar{u}^*(s)$ bezeichnet, so erteilt $u^*(x, y)$ unter allen in $\overline{B}$ stetig differentiierbaren Funktionen $u(x, y)$, die auf $\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$ die Werte $\bar{u}^*(s)$ annehmen, dem Integral $I_{\overline{B}}(u)$ einen stationären Wert. In diesem Integral $I_{\overline{B}}(u)$ soll unter Beibehaltung

5) D. h. die Ableitungen dritter Ordnung sind stetig in x, y, u.

6) Durch den Übergang von (3) zu dem Variationsproblem (4) wird das Errechnen der Transformation für die zweiten Ableitungen vermieden.

Digitized by Google

der unabhängigen Veränderlichen x, y folgende Transformation der Argumentfunktion vorgenommen werden:

$$v = \int_0^u \sqrt{\varphi(x,y,\omega)}\, d\omega; \quad v_x = \sqrt{\varphi(x,y,u)}\, u_x + \int_0^u (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x d\omega$$

(5)

$$v_y = \sqrt{\varphi(x,y,u)}\, u_y + \int_0^u (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_y d\omega.$$

Nun wird jeder stetig differentiierbaren Funktion $u(x, y)$ mit Randwerten $\bar{u}^*(s)$ auf $\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$ durch

$$v(x,y) = \int_0^{u(x,y)} \sqrt{\varphi(x,y,\omega)}\, d\omega \tag{6}$$

eine stetig differentiierbare Funktion $v(x, y)$ zugeordnet, die auf $\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$ die Werte

$$\bar{v}^*(s) = \int_0^{\bar{u}^*(s)} \sqrt{\varphi(\bar{x}(s), \bar{y}(s), \omega)}\, d\omega$$

annimmt. Da aber nach (5)

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \sqrt{\varphi(x,y,u)} \geqq \sqrt{\varepsilon} > 0 \tag{7}$$

ist, gibt es zu (5) eine in B und für alle v zweimal stetig differentiierbare Umkehrung

$$u = \psi(x,y,v) \tag{8}$$

und daher auch zu jedem stetig differentiierbaren $v(x, y)$ mit obigen Randwerten $\bar{v}^*(s)$ ein zulässiges $u(x, y) = \psi(x, y, v(x, y))$. Unsere Aufgabe ist daher äquivalent mit der, eine in B zweimal stetig differentiierbare Funktion $v^*(x, y)$ zu finden, die auf dem Rande von B die Werte

$$\Psi(s) = \int_0^{\Phi(s)} \sqrt{\varphi(x(s), y(s), \omega)}\, d\omega$$

annimmt[7]) und das durch (5) aus (4) entstehende Integral in jedem $\overline{B}$ stationär macht. Wir brauchen also nur die zu dem transformierten Integral gehörige Eulersche Differentialgleichung in B bei Randwerten $\Psi(s)$ zu lösen. Nun ist wegen (5) und (8)

7) $x(s)$, $y(s)$ sei die Randkurve von B.

Digitized by Google

$$(9)\quad \left.\begin{matrix}\varphi(x,y,u)(u_x^2+u_y^2)\\ +2F(x,y,u)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} v_x^2 - 2v_x \int_0^{\psi(x,y,v)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega \\ \qquad + \left\{\int_0^{\psi(x,y,v)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega\right\}^2 \\ v_y^2 - 2v_y \int_0^{\psi(x,y,v)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_y\, d\omega \\ \qquad + \left\{\int_0^{\psi(x,y,v)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_y\, d\omega\right\}^2 \\ \qquad + 2F(x,y,\psi(x,y,v)).\end{matrix}\right.$$

Rechts steht der Integrand des transformierten Integrals (4); bildet man zu diesem die Eulersche Differentialgleichung, so heben sich unter anderen die v_x und v_y enthaltenden Glieder, und man erhält in

$$(10)\quad \Delta v = \int_0^{\psi(x,y,v)} [(\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_{xx} + (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_{yy}]\, d\omega + \frac{f(x,y,\psi(x,y,v))}{\sqrt{\varphi(x,y,\psi(x,y,v))}}$$

eine Gleichung vom Typ (1*) a)[8]. Unter den Voraussetzungen von Satz II erfüllt ihre rechte Seite die Voraussetzungen von Satz I, da wegen (7)

$$|\psi(x,y,v)| = |u| \leqq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,|v|$$

ist. Damit ist Satz II bewiesen.

Man könnte nun natürlich noch weitere Bedingungen für f und φ angeben, unter denen die rechte Seite von (10) die Voraussetzungen von Sätzen aus obig zitierter Arbeit erfüllt, und so weitere Sätze über Existenz und Eindeutigkeit beweisen. Zu einer allgemeineren Existenzaussage gelangt man aber, wenn man noch einmal das zu (3) gehörige Variationsproblem heranzieht. Hierzu muß aber erst die Minimaleigenschaft der in Satz II konstruierten Lösung von (3) bewiesen werden.

Zusatz: Ist unter den Voraussetzungen von Satz II überdies die zu den Randwerten $\Psi(s)$ gehörige Potentialfunktion $v_0(x,y)$ im *abgeschlossenen* Bereich B stetig differentiierbar[9], so läßt sich

8) Diese Gleichung erhält man natürlich auch mit Hilfe des zweimal differentiierten (6) direkt aus (3), vgl. jedoch Fußnote 6).

9) Einfache Bedingungen für Randkurve und -werte, unter denen diese Forderung erfüllt ist, gibt z. B. O. D. Kellog, Transactions of the Amer. Math. Soc. 13 (1912), 111.

Digitized by Google

auch eine solche Lösung $u^*(x, y)$ von (3) konstruieren[10]), die dem Integral (4) unter allen stetigen, stückweis stetig differentiierbaren[11]) Funktionen $u(x, y)$ mit den Randwerten $\Phi(s)$ ein absolutes Minimum erteilt.

Beweis: Infolge von Satz II läßt sich mit Hilfe von Satz I auch zu der Differentialgleichung

$$11)\quad \Delta V = \int_0^{\psi(x,y,V+v_0(x,y))} [(\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_{xx} + (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_{yy}]\, d\omega + \frac{f(x,y,\psi(x,y,V+v_0(x,y)))}{\sqrt{\varphi(x,y,\psi(x,y,V+v_0(x,y)))}}$$

eine auf dem Rande von B verschwindende Lösung $V(x, y)$ konstruieren. Diese erteilt auf Grund des Zusatzes zu Satz I dem Integral

$$12)\quad \left\{ \begin{aligned} \iint_B [w_x^2 + w_y^2 &+ \underbrace{2\int_0^w \left\{ \int_0^{\psi(x,y,\tau+v_0(x,y))} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_{xx}\, d\omega \right\} d\tau}_{\mathfrak{A}} \\ &+ \underbrace{2\int_0^w \left\{ \int_0^{\psi(x,y,\tau+v_0(x,y))} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_{yy}\, d\omega \right\} d\tau}_{\mathfrak{B}} \\ &+ 2F(x,y,\psi(x,y,w+v_0(x,y))) \\ &- 2F(x,y,\psi(x,y,v_0(x,y)))]\, dx\, dy \end{aligned} \right.$$

unter allen stetigen, stückweis stetig differentiierbaren[11]) Funktionen $w(x, y)$, die auf dem Rande von B verschwinden, ein absolutes Minimum. Dieses Integral (12) werde nun durch Hinzufügen von Divergenz-Ausdrücken und von Integralen, die die Argumentfunktion $w(x, y)$ nicht enthalten, umgeformt. Zunächst folgt aus dem Verschwinden von w auf dem Rande[12])

10) D. h. auch $u(x, y)$ ist dann im abgeschlossenen B stetig differentiierbar, vgl. Fußn. 4).

11) Stückweise stetig differentiierbar bedeute im Folgenden: B wird durch eine endliche Anzahl analytischer, regulärer Kurven (isolierte Punkte ausgeschlossen) in endlich viele Bereiche (von endlichem Zusammenhang) zerlegt derart, daß u_x und u_y im Inneren der Teilbereiche stetig sind und bei Annäherung an ihre Ränder aus dem Inneren Grenzwerten zustreben.

12) Man bilde die folgenden Integrale zunächst für die in Fußn. 11) genannten Teilbereiche (für diese ist die Greensche Formel anwendbar, Enz. II, C 3 S. 210 und 186). Dabei heben sich wegen der Stetigkeit von w, v_0, v_{0x}, v_{0y} die Randintegrale auf.

Digitized by Google

$$0 = \iint_B \left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{w(x,y)} \left\{\int_0^{\psi(x,y,\tau+v_0(x,y))} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega\right\} d\tau\right] dx\, dy$$

$$= \underbrace{\iint_B \left[\int_0^{\psi(x,y,w+v_0)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega \cdot w_x\right.}_{\mathfrak{C}}$$

$$\underbrace{+\int_0^{w} (\sqrt{\varphi(x,y,\psi(x,y,\tau+v_0))})_x\, \psi_x(x,y,\tau+v_0)\, d\tau}_{\mathfrak{D}}$$

$$\underbrace{+\int_0^{w} (\sqrt{\varphi(x,y,\psi(x,y,\tau+v_0))})_x\, \psi_v(x,y,\tau+v_0)\, v_{0_x}\, d\tau}_{\mathfrak{E}}$$

$$\underbrace{\left.+\int_0^{w}\left\{\int_0^{\psi(x,y,\tau+v_0)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_{xx}\, d\omega\right\} d\tau\right] dx\, dy}_{\mathfrak{A}}$$

und daher

$$(13) \qquad \iint_B 2\,\mathfrak{A}\, dx\, dy = \iint_B (-2\,\mathfrak{C} - 2\,\mathfrak{D} - 2\,\mathfrak{E})\, dx\, dy.$$

Nun gilt wegen (5), (7) und (8)

$$0 = \psi_x(x,y,v) + \psi_v(x,y,v) \int_0^{\psi(x,y,v)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega$$

als Identität in x, y und v. Daher ist

$$(14) \quad \begin{cases} -2\,\mathfrak{D} = \int_0^{w} \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\int_0^{\psi(x,y,\tau+v_0)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega\right\}^2 d\tau \\ \qquad = \left\{\int_0^{\psi(x,y,w+v_0)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega\right\}^2 \\ \qquad\qquad - \left\{\int_0^{\psi(x,y,v_0)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega\right\}^2. \end{cases}$$

Weiter ist

$$-2\,\mathfrak{E} = -2 \int_{\psi(x,y,v_0)}^{\psi(x,y,w+v_0)} (\sqrt{\varphi(x,y,\omega)})_x\, d\omega \cdot v_{0_x}.$$

Die gleichen Formeln gelten, wenn man die Ableitungen nach x durch die nach y ersetzt. Führt man nun in (12) an Stelle von $w_x^2 + w_y^2$ als Integrand die Summe $(w_x + v_{0_x})^2 + (w_y + v_{0_y})^2$ ein, so hat man

Digitized by Google

wegen

$$\iint_B (w_x v_{0_x} + w_y v_{0_y})\,dx\,dy = -\iint_B w \Delta v_0\,dx\,dy + \int_{\text{Rand von } B} w \frac{\partial v_0}{\partial n}\,ds = 0^{12})$$

zu (12) nur das von $w(x, y)$ unabhängige Integral

$$\iint_B (v_{0_x}^2 + v_{0_y}^2)\,dx\,dy$$

hinzugefügt. Berücksichtigt man weiter (13), (14) und den analogen Ausdruck für $\iint_B \mathfrak{B}$, so wird aus dem Integranden von (12) bis auf Summanden, die $w(x, y)$ nicht enthalten, genau die rechte Seite von (9) mit $v = w + v_0$. (12) unterscheidet sich also von dem über B erstreckten Integral, das (9) mit $v = w + v_0$ zum Integranden hat, nur um eine von $w(x, y)$ unabhängige Zahl. Ist daher $V(x, y)$ unsere Lösung von (11), so erteilt die Funktion $v^*(x, y) = V(x, y) + v_0(x, y)$ dem letzteren Integral ein absolutes Minimum unter allen stetigen, stückweise stetig differentiierbaren[11]) Funktionen $v(x, y)$ mit Randwerten $\Psi(s)$. Für die Lösung von (3) $u^*(x, y) = \psi(x, y, v^*(x, y))$ ist damit der Zusatz bewiesen. Dieser ist nun ein wichtiges Hilfsmittel beim Beweis des nun folgenden

Satz III: *B sei ein von stückweise analytischen Kurven begrenzter, einfach zusammenhängender, schlichter, im Endlichen gelegener Bereich der x, y-Ebene; $\Phi(s)$ auf seinem Rande vorgegebene Werte. B und $\Phi(s)$ seien weiter so beschaffen, daß die zu*

$$\Phi(s) \text{ und } \Psi(s) = \int_0^{\Phi(s)} \sqrt{\varphi(x(s), y(s), \omega)}\,d\omega \;^{13})$$

gehörigen Potentialfunktionen $u_0(x, y)$ und $v_0(x, y)$ im abgeschlossenen B stetig differentiierbar sind. Dann hat auch die Gleichung

$$\varphi(x, y, u)\,\Delta u = -\tfrac{1}{2}\varphi_u(x, y, u)(u_x^2 + u_y^2) - \varphi_x(x, y, u)u_x - \varphi_y(x, y, u)u_y + f(x, y, u)$$

eine solche Lösung mit vorgegebenen Randwerten $\Phi(s)$, wenn $\varphi(x, y, u)$ und $\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, y, u)$ dreimal stetig nach x und y bei beliebigem u differentiierbar sind[5]*), die Ungleichung*

$$\varphi(x, y, u) > 0$$

im abgeschlossenen B und für alle u gilt und die daselbst stetig diffe-

13) Ist die in Fußn. 9) genannte Bedingung für B und $\Phi(s)$ erfüllt, so gilt sie auch für B und $\Psi(s)$ wegen der im Folgenden gemachten Voraussetzungen über φ.

Digitized by Google

rentiierbare Funktion $f(x, y, u)$ folgender Bedingung genügt: Werden auf dem Rand von B

$$\Phi_1 = \operatorname{Min} \Phi(s) \text{ und } \Phi_2 = \operatorname{Max} \Phi(s)$$

eingeführt, so muß es zwei Konstanten $u_1 < 0$ und $u_2 > 0$ geben, für die entweder

$$\text{a)}\quad f(x, y, u_1 + \Phi_1) < 0 \qquad \text{oder b)} \begin{cases} f(x, y, u_1 + \Phi_1) = 0 \\ f_u(x, y, u_1 + \Phi_1) = 0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\text{entweder a)}\ f(x, y, \Phi_2 + u_2) > 0 \qquad \text{oder b)} \begin{cases} f(x, y, \Phi_2 + u_2) = 0 \\ f_u(x, y, \Phi_2 + u_2) = 0 \end{cases}$$

im abgeschlossenen Bereich B erfüllt ist. Für die Lösung u^* gilt dann

$$u_1 + \Phi_1 \leqq u^*(x, y) \leqq \Phi_2 + u_2.$$

Beweis: Zunächst sollen zwei Funktionen $\varphi^*(x, y, u)$ und $f^*(x, y, u)$ konstruiert werden mit folgenden Eigenschaften:

(15) $\varphi^*(x, y, u)$ und $f^*(x, y, u)$

haben in B und für alle u die gleichen Differentiierbarkeitseigenschaften wie φ und f

(16) $$\left.\begin{cases} \varphi^*(x, y, u) \equiv \varphi(x, y, u) \\ f^*(x, y, u) \equiv f(x, y, u) \end{cases}\right\} \text{für } u_1 + \Phi_1 \leqq u \leqq \Phi_2 + u_2 \text{ und } x, y \text{ aus } B$$

(17) $$\begin{cases} |f^*(x, y, u)| \leqq C \text{ bei konstantem } C > 0 \text{ für alle } u \text{ und } x, y \text{ aus } B \\ \varphi^*(x, y, u) \geqq \varepsilon \text{ bei konstantem } \varepsilon > 0 \text{ für alle } u \text{ und } x, y \text{ aus } B \\ \varphi_x^*(x, y, u) \equiv \varphi_y^*(x, y, u) \equiv 0 \text{ für alle großen } |u| \text{ und } x, y \text{ aus } B \end{cases}$$

(18) $$\left.\begin{cases} f^*(x, y, u) \leqq 0 \text{ für } u \leqq u_1 + \Phi_1 \\ f^*(x, y, u) \geqq 0 \text{ für } u \geqq \Phi_2 + u_2 \end{cases}\right\} \text{im abgeschlossenen Bereich } B.$$

Solche Funktionen sind bei hinreichend kleinem $h > 0$ z. B. die folgenden, wenn im abgeschlossenen B und für $u_1 + \Phi_1 \leqq u \leqq \Phi_2 + u_2$ mit 2ε das Minimum von $\varphi(x, y, u)$ bezeichnet wird:

$$\varphi^*(x, y, u) = \int_{\Phi_1}^{u} \varphi'(x, y, \omega)\, d\omega + \varphi(x, y, \Phi_1)$$

mit

$$\varphi'(x, y, u) = \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(x, y, u)}{\partial u} & \text{für } u_1 + \Phi_1 \leqq u \leqq \Phi_2 + u_2 \\ \dfrac{1}{h}[u - (u_1 + \Phi_1 - h)] \dfrac{\partial \varphi(x, y, u_1 + \Phi_1)}{\partial u} & \\ & \text{für } u_1 + \Phi_1 - h \leqq u \leqq u_1 + \Phi_1 \\ \dfrac{1}{h}[-u + (u_1 + \Phi_1 - h)] \left\{ \dfrac{\varphi(x, y, u_1 + \Phi_1) - \varepsilon}{h} \right. & \\ \qquad \left. - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \varphi(x, y, u_1 + \Phi_1)}{\partial u} \right\} & \\ & \text{für } u_1 + \Phi_1 - 2h \leqq u \leqq u_1 + \Phi_1 - h \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\varphi'(x,y,u) = \begin{cases} \frac{1}{h}[u-(u_1+\Phi_1-3h)]\left\{\frac{\varphi(x,y,u_1+\Phi_1)-\varepsilon}{h}\right. \\ \qquad\qquad \left. -\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x,y,u_1+\Phi_1)}{\partial u}\right\} \\ \qquad\qquad \text{für } u_1+\Phi_1-3h \leqq u \leqq u_1+\Phi_1-2h \\ 0 \qquad \text{für} \qquad u \leqq u_1+\Phi_1-3h \\ \text{und entsprechende Umdefinition für} \quad u \geqq \Phi_2+u_2. \end{cases}$$

Ein Beispiel für f^* findet sich auch in zitierter Arbeit [14]).

Wegen (15) und (17) erfüllen φ^* und f^* die Voraussetzungen von Satz II und die des zu ihm gemachten Zusatzes. Wir erhalten daher auf dem im Zusatz eingeschlagenen Wege eine Lösung $u^*(x,y)$ von (3) (wo jedoch f, φ durch f^* und φ^* ersetzt ist) mit der dort genannten Minimaleigenschaft für das Integral

$$(19) \qquad I_B^*(u) = \iint_B [\varphi^*(x,y,u)(u_x^2+u_y^2)+2F^*(x,y,u)]\,dx\,dy$$

mit

$$F^*(x,y,u) = \int_0^u f^*(x,y,\varrho)\,d\varrho.$$

Können wir nun von dieser Lösung zeigen, daß sie der Ungleichung $u_1+\Phi_1 \leqq u^*(x,y) \leqq \Phi_2+u_2$ genügt, so ist wegen (16) der Satz III bewiesen. Diese Ungleichung gilt aber nach Obigem sicher dann, wenn es zu jedem im abgeschlossenen B stetig differentiierbaren $u(x,y)$ [15]) mit Randwerten $\Phi(s)$, das irgendwo in B größer als Φ_2+u_2 oder kleiner als $u_1+\Phi_1$ wird, stets eine stetige, stückweis stetig differentiierbare [11]) Funktion $\omega(x,y)$ gibt mit Randwerten $\Phi(s)$ und mit

$$(20) \qquad I_B^*(\omega) < I_B^*(u).$$

Wenn jetzt ohne Beschränkung der Allgemeinheit das obige $u(x,y)$ irgendwo in B größer als Φ_2+u_2 wird, so gelangt man zu einem solchen $\omega(x,y)$ wie folgt:

Wegen der Stetigkeit von $u(x,y)$ hat die nicht leere Punktmenge (ξ,η) mit $u(\xi,\eta) > \Phi_2+u_2$ Gebietcharakter; und wegen (17) und der Stetigkeit von u_x und u_y gibt es in (ξ,η) sicher einen solchen Kreis K, sodaß mit der Abkürzung

$$D_\beta(\sigma) = \iint_\beta \varphi^*(x,y,\sigma(x,y))(\sigma_x^2+\sigma_y^2)\,dx\,dy$$

14) a. a. O. 2) S. 145; man setze dort statt $f_2 : f^*$ statt $u_1 : u_1+\Phi_1$ statt $u_2 : \Phi_2+u_2$.

15) Diese Eigenschaft hat nämlich unsere Lösung $u^*(x,y) = \psi(x,y)$, $v^*(x,y)$. Zum nun Folgenden vgl. A. Hammerstein a. a. O. 2) S. 146 ff.

Digitized by Google

gilt:

$$D_K(u) = k > 0. \tag{21}$$

Jetzt werde für den abgeschlossenen Kreis K die positive Größe

$$\varrho = \operatorname{Min} u(x, y) - \Phi_2 - u_2$$

eingeführt. Weiter sei $\vartheta(x, y)$ eine im abgeschlossenen B stetig differentiierbare im Inneren analytische Funktion mit Randwerten $\Phi(s)$ und mit

$$\begin{gathered} |\vartheta(x, y) - u(x, y)| \leqq \varepsilon_1, \quad |\vartheta_x(x, y) - u_x(x, y)| \leqq \varepsilon_1, \\ |\vartheta_y(x, y) - u_y(x, y)| \leqq \varepsilon_1 \text{ [16]}, \end{gathered} \tag{22}$$

wobei $\varepsilon_1 \leqq \frac{\varrho}{2}$ gelte und ε_1 überdies so klein sei, daß auch

$$\left|\iint_B 2F^*(x, y, u(x, y))\,dx\,dy - \iint_B 2F^*(x, y, \vartheta(x, y))\,dx\,dy\right| \leqq \frac{k}{4}, \tag{23}$$

$$|D_B(u) - D_B(\vartheta)| \leqq \frac{k}{4}, \quad |D_K(u) - D_K(\vartheta)| \leqq \frac{k}{4} \tag{24}$$

ist. Nun leistet die stetige Funktion

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \Phi_2 + u_2 \text{ für die Punkte } x, y, \text{ für die } \vartheta(x, y) \geqq \Phi_2 + u_2 \text{ ist} \\ \vartheta(x, y) \text{ für die Punkte } x, y, \text{ für die } \vartheta(x, y) \leqq \Phi_2 + u_2 \text{ ist} \end{cases}$$

das Gewünschte. Denn die Schnittlinien von $\vartheta(x, y)$ mit der Ebene $\vartheta = \Phi_2 + u_2$ sind in einem im Inneren von B liegenden Teilbereich $\overline{B}$ gelegen, sodaß $\omega(x, y)$ in B stückweis stetig differentiierbar [17]) und damit zulässige Konkurrenzfunktion ist. Nun ist zunächst $D_K(\omega) = 0$, da wegen (22) in $K: \vartheta(x, y) > \Phi_2 + u_2$ ist; daher gilt wegen (21) und (24)

16) Man konstruiere ein im abgeschlossenen B analytisches am Rande verschwindendes $\chi(x, y)$ mit

$$|\chi - u + u_0| \leqq \varepsilon_1, \quad |\chi_x - u_x + u_{0x}| \leqq \varepsilon_1, \quad |\chi_y - u_y + u_{0y}| \leqq \varepsilon_1,$$

z. B. nach Lichtenstein, Mathem. Zeitschr. 3 (1919), 134 und setze dann

$$\vartheta(x, y) = \chi(x, y) + u_0(x, y).$$

17) Bekanntlich läßt sich die Punktmenge (X, Y) mit $\vartheta(X, Y) = \Phi_2 + u_2$ in einem gewissen Kreis um jeden Punkt x_0, y_0 aus $\overline{B}$ darstellen durch ein *endliches* System von dort konvergierenden Potenzreihen, $x_i(s)$, $y_i(s)$ (Osgood, Lehrb. der Funktionentheorie, B. G. Teubner, Leipzig 1924, Bd. II, 1 Kap. II §§ 2, 7, 21). Der Radius des größten Kreises, in dem dies möglich ist, hängt stetig von x_0, y_0 ab und hat daher in $\overline{B}$ ein positives Minimum. Durch Überdeckung von $\overline{B}$ gelangt man zu Unstetigkeitskurven für ω_x und ω_y von der in 11) genannten Eigenschaft; denn an isolierten Punkten von (X, Y) ist $\vartheta_x = \vartheta_y = 0$ und daher ω_x und ω_y stetig.

Digitized by Google

$$(25)\quad \begin{cases} D_B(u) - D_B(\omega) = D_B(u) - D_B(\vartheta) + D_B(\vartheta) - D_B(\omega) \\ \quad \geqq -\frac{k}{4} + D_K(\vartheta) - 0 + D_{B-K}(\vartheta) - D_{B-K}(\omega) \\ \quad \geqq -\frac{k}{4} + \frac{3k}{4} - 0 + 0 = \frac{k}{2}. \end{cases}$$

Weiter ist wegen (18) $F^*(x, y, \sigma)$ für $\sigma \geqq \Phi_2 + u_2$ eine monoton nicht abnehmende Funktion von σ bei festem x, y. Daher ist

$$(26)\quad \iint_B [2F^*(x, y, \vartheta(x, y)) - 2F^*(x, y, \omega(x, y)]\, dx\, dy \geqq 0$$

und damit ergibt sich durch Kombination von (23), (25) und (26) die zu beweisende Ungleichung (20).

Zusätzlich sei noch bemerkt, daß unter den Voraussetzungen a) des Satz III die Lösung $u^*(x, y)$ ein relatives Minimum für das Integral (4) erzeugt. Hierzu hat man nur die Funktionen φ und f erst etwas oberhalb von $\Phi_2 + u_2$ und etwas unterhalb von $u_1 + \Phi_1$ umzudefinieren, ohne die Eigenschaften (15), (17), (18) von φ^* und f^* zu zerstören[18]). Dies ist natürlich auch im Falle $f \equiv 0$ möglich. Überdies darf man dann die absoluten Beträge von u_1 und u_2 beliebig klein wählen, sodaß für die Lösung $u^*(x, y)$ der homogenen Gleichung (3) gilt:

$$\text{Min } \Phi(s) = \Phi_1 \leqq u^*(x, y) \leqq \Phi_2 = \text{Max } \Phi(s).$$

Weiter ergibt sich aus den Eindeutigkeitssätzen 5) und 6) der zitierten Arbeit[19]) wegen (10), daß dieses $u^*(x, y)$ sicher dann die einzigste Lösung von (3) (bei $f \equiv 0$) mit Randwerten $\Phi(s)$ ist, falls φ eine der folgenden Bedingungen erfüllt.

A) $$\varphi(x, y, u) \geqq \varepsilon > 0$$

und $$\frac{\partial^2 \sqrt{\varphi(x, y, u)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sqrt{\varphi(x, y, u)}}{\partial y^2} \geqq 0 \qquad \text{in } B \text{ und für alle } u$$

B) $$\varphi(x, y, u) \geqq \varepsilon > 0$$

und $$\left| \frac{\frac{\partial^2 \sqrt{\varphi(x, y, u)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sqrt{\varphi(x, y, u)}}{\partial y^2}}{\sqrt{\varphi(x, y, u)}} \right| \leqq C < \lambda_1 \text{ in } B \text{ und für alle } u$$

wobei λ_1 der kleinste Eigenwert von $\Delta u + \lambda u = 0$ sein muß.

Zusammenfassend gilt daher die folgende Verallgemeinerung des Satzes vom Maximum der Potentialtheorie.

18) Die Eigenschaft (16) gelte also nun für

$$-\delta + u_1 + \Phi_1 \leqq u \leqq \Phi_2 + u_2 + \delta, \quad \delta > 0.$$

19) a. a. O. 2) S. 126.

Digitized by Google

Satz IV: *Für B, $\Phi(s)$ und $\varphi(x, y, u)$ gelten die Voraussetzungen des Satz III. Dann hat die Differentialgleichung*

$$\Delta u\, \varphi(x, y, u) = -\tfrac{1}{2}\varphi_u(x, y, u)(u_x^2 + u_y^2) - \varphi_x(x, y, u)\, u_x - \varphi_y(x, y, u)\, u_y \tag{27}$$

sicher eine Lösung $u^*(x, y)$ mit Randwerten $\Phi(s)$, für die gilt:

$$\text{Min } \Phi(s) \leqq u^*(x,y) \leqq \text{Max } \Phi(s)$$

und die ein relatives Minimum für das Integral (4) *(mit $F \equiv 0$) liefert. Ist überdies eine der obigen Voraussetzungen* A) *oder* B) *erfüllt, so ist die Lösung eindeutig durch die Randwerte bestimmt, also stets mit $u^*(x, y)$ identisch; in diesen Fällen gilt also: Eine Lösung von* (27) *nimmt kein eigentliches Maximum oder Minimum im Inneren des Definitionsbereiches an.*

Ebenso leicht läßt sich eine Verallgemeinerung des Paraf-schen Satzes angeben: Gelten nämlich für das stetig differentiierbare $f(x, y, u)$ im abgeschlossenen B die Ungleichungen

$$f(x, y, u) > 0 \text{ für } u > 0; \quad f(x, y, u) < 0 \text{ für } u < 0$$

so läßt sich die Voraussetzung a) von Satz III im Falle $\Phi_1 \leqq 0$ mit einem beliebig kleinen absoluten Betrag von u_1 erfüllen und im Falle $\Phi_2 \geqq 0$ mit beliebig kleinem $|u_2|$, sodaß für die Lösung $u^*(x, y)$ gilt:

$$\text{Min } (\Phi_1, 0) \leqq u^*(x, y) \leqq \text{Max } (\Phi_2, 0). \tag{28}$$

Sichert man noch die Eindeutigkeit der Lösung durch geeignete Voraussetzungen [z. B. die Bedingung A),

$$f_u(x, y, u) \geqq 0 \text{ und } f(x, y, u) \cdot \varphi_u(x, y, u) \leqq 0],$$

so kann wegen (28) *nie eine Lösung von* (3) *positive eigentliche Maxima und negative eigentliche Minima im Inneren des Definitionsbereiches annehmen.*

Zum Schluß sei noch auf eine Vereinfachung hingewiesen, die im Falle, daß $\varphi(x, y, u) = p(x, y) \cdot \varphi(u)$ ist, vorgenommen werden kann. Hier mache man an Stelle von (5) die Transformation $v = \int_0^u \sqrt{\varphi(\omega)}\, d\omega$, dann erhält man an Stelle von (10) eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial x}[p(x, y)\, v_x] + \frac{\partial}{\partial y}[p(x, y)\, v_y] = \frac{f(x, y, \psi(v))}{\sqrt{\varphi(\psi(v))}}$$

mit einem einfacheren unhomogenen Bestandteil.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXXIV. JAHRGANG

INHALT:

	Seite
Bemerkungen über die Bestimmung der Flugbahn eines Geschosses. Von R. Rothe	3—9
Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Von R. Ritter	10—19
Über die parabolische lineare Strahlenkongruenz und ihre Cayleyschen Regelflächen. Von U. Graf	20—29
Über eine Gruppe von Parabelsätzen. Von U. Graf und R. Kahlau	30—32
Bemerkungen im Anschluß an die Lalandesche Sonnenuhr. Von G. Scheffers	33—43
Abbildung der Flächen 2. Ordnung auf lineare Ebenenkomplexe im $\mathfrak{R}_5$. Von E. A. Weiss	44—51
Über eine Klasse zweifach-unendlicher, durch Bewegung eines starren Geradenpaares erzeugter Systeme. Von H. Jonas	52—71
Über die n-te Ableitung einer impliziten Funktion. Von O.-H. Keller	72—86
Berichte über die Sitzungen	1—2

1935

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

Mitteilungen.

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Oberinspektor M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschweg 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 110 b).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

VIERUNDDREISSIGSTER JAHRGANG

1935

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Graf, U., Über die parabolische lineare Strahlenkongruenz und ihre Cayleyschen Regelflächen	20—29
Graf, U., und **Kahlau, R.**, Über eine Gruppe von Parabelsätzen	30—32
Jonas, H., Über eine Klasse zweifach-unendlicher, durch Bewegung eines starren Geradenpaares erzeugter Systeme	52—71
Keller, O.-H., Über die n-te Ableitung einer impliziten Funktion	72—86
Ritter, R., Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung	10—19
Rothe, R., Bemerkungen über die Bestimmung der Flugbahn eines Geschosses	3—9
Scheffers, G., Bemerkungen im Anschluß an die Lalandesche Sonnenuhr	33—43
Weiss, E. A., Abbildung der Flächen 2. Ordnung auf lineare Ebenenkomplexe im $\mathfrak{R}_5$	44—51
304. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 31. Oktober 1934	1
305. „ am 28. November 1934	1
306. „ „ 12. Dezember „	1
307. „ „ 23. Januar 1935	1
308. „ „ 13. Februar „	2
309. „ „ 27. März „	2
310. „ „ 24. April „	2
311. „ „ 29. Mai „	2
312. „ „ 26. Juni „	2

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

304. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 31. Oktober 1934.

Vorsitzender: Herr Hammerstein. Anwesend: 19 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Geschäftlicher Teil:

Die Berichte des Kassenwartes und der Kassenprüfer werden entgegengenommen; dem Kassenwart wird daraufhin die Entlastung erteilt.

In geheimer Wahl wird zum ersten Vorsitzenden mit 18 von 19 abgegebenen gültigen Stimmen Herr E. Salkowski gewählt. Alle übrigen Wahlen werden durch Zuruf vorgenommen. Zum zweiten Vorsitzenden und Schriftführer wird Herr G. Grüß gewählt; Kassenwart bleibt Herr P. B. Fischer; ebenso werden als Kassenprüfer die Herren Singer und Zacharias wiedergewählt. In die Redaktionskommission werden hineingewählt die Herren E. Jacobsthal und Reinhardt. Die Redaktionskommission besteht jetzt aus dem Vorstande, den beiden eben genannten Herren und den Herren Feigl und E. Schmidt.

2. Wissenschaftlicher Teil:

Herr Ritter: Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

305. Sitzung am 28. November 1934.

Vorsitzender: Herr Salkowski. Anwesend: 15 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Graf: Über Cayleysche Regelflächen.

Herr Witt: Über eine Transformation einparametriger Gleichungen.

306. Sitzung am 12. Dezember 1934.

Vorsitzender: Herr Salkowski. Anwesend: 12 Mitglieder.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Salkowski: Der geometrische und analytische Zusammenhang einiger bekannter Flächentransformationen.

307. Sitzung am 23. Januar 1935.

Vorsitzender: Herr Salkowski. Anwesend: 16 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Kahlau: Über eine Gruppe von Parabelsätzen.

Herr Keller: Über die n-te Ableitung einer impliziten Funktion.

Digitized by Google

308. Sitzung am 13. Februar 1935.

Vorsitzender: Herr Salkowski. Anwesend: 15 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Remak: Über den Euklidischen Algorithmus in reell-quadratischen Zahlkörpern.

309. Sitzung am 27. März 1935.

Vorsitzender: Herr Salkowski. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Scheffers: Bemerkungen im Anschlusse an die Lalandesche Sonnenuhr.

Herr Rembs: Eine Deutung der willkürlichen Funktion in der Weierstraßschen Darstellung der Minimalflächen.

310. Sitzung am 24. April 1935.

Vorsitzender: Herr Salkowski. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Haack: Neuer Aufbau der Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe.

Herr Haentzschel: Bemerkung über eine von Weierstraß herrührende Gleichung.

Herr Salkowski legt eine Arbeit des Herrn E. A. Weiß vor: Abbildung der Flächen 2. Ordnung auf lineare Ebenenkomplexe im R_5.

311. Sitzung am 29. Mai 1935.

Vorsitzender: Herr Salkowski. Anwesend: 31 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Jonas: Über eine Klasse zweifach-unendlicher, durch Bewegung eines starren Geradenpaares erzeugter Systeme.

Herr Cauer: Neuere Methoden zur numerischen Auflösung von Systemen linearer Gleichungen.

312. Sitzung am 26. Juni 1935.

Die Sitzung fiel aus.

Digitized by Google

Bemerkungen über die Bestimmung der Flugbahn eines Geschosses[1]).

Von Rudolf Rothe.

1. Unter der Flugbahn versteht man die Bahn des Schwerpunktes eines Geschosses. Sie hängt ab von dem Luftwiderstande und den äußeren Kräften, die auf das Geschoß einwirken. Der Luftwiderstand wirkt, wenn das Geschoß wie ein Pfeil fliegt, in der Richtung der Bahntangente, andernfalls treten außer der Tangentialkomponente des Luftwiderstandes noch andere Komponenten auf, die man den äußeren Kräften hinzufügen kann.

Es sei $\mathfrak{t}$ der Einheitsvektor der Bahntangente; den Luftwiderstand (genauer: seine Tangentialkomponente) pflegt man in der Form

$$-m\,c\,f(v)\,\mathfrak{t}$$

anzunehmen, wo m die Geschoßmasse, v die Größe der Geschoßgeschwindigkeit, $f(v)$ die durch Versuche für jede Geschoßform zu erschießende Luftwiderstandsfunktion (durch Tabellen und Kurven gegeben) und c den Geschoßfaktor bedeutet; dieser ist durch die Formel

$$c = i\frac{q}{m}\delta$$

bestimmt, in der q den Geschoßquerschnitt, δ das Luftgewicht, und i einen Verlegenheitsfaktor, den sogenannten Formfaktor, bedeutet. Man hat geglaubt, i auch als Funktion von v betrachten zu sollen, aber wir wollen ihn stets als von v unabhängig ansehen, andernfalls ist in dem Produkt $cf(v)$ die Funktion $f(v)$ anders zu wählen.

Die äußeren, auf das Geschoß einwirkenden Kräfte sind vor allem die Schwerkraft, sodann aber die durch die Kreiselwirkung des rotierenden Langgeschosses entstehenden Kreiselkräfte, Wind, Regen, die infolge der Erdumdrehung auftretende Corioliskraft, schließlich die oben erwähnten außertangentialen Luftwiderstände; ihre Resultante sei

$$\mathfrak{G} = m\,\mathfrak{g}$$

wobei die Bezeichnung andeuten soll, daß eben die Schwerkraft den Hauptanteil liefert.

1) Vorgetragen in der 303. Sitzung am 27. Juni 1934.

Digitized by Google

Nach dem Grundgesetz der Dynamik ist, wenn $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ den Radiusvektor von einem beliebigen Ursprung 0 nach der Stelle bedeutet, wo sich der Geschoßschwerpunkt zur Zeit t befindet,

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} + \mathfrak{W} = m\mathfrak{g} - mcf(v)\mathfrak{t},$$

oder wegen (ds bedeutet das Bogenelement)[2])

$$\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \dot{\mathfrak{r}}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{v},$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{g} - cf(v)\mathfrak{t} = \mathfrak{g} - c\frac{f(v)}{v}\dot{\mathfrak{r}}. \tag{1}$$

2. In der elementaren Mechanik wird gezeigt, daß die Bahnbeschleunigung $\ddot{\mathfrak{r}}$ stets in der Schmiegungsebene der Bahn gelegen ist; da $\dot{\mathfrak{r}}$ in tangentialer Richtung zeigt, so liegt auch $\mathfrak{g}$ in der Schmiegungsebene, ein ebenfalls bekanntes Ergebnis der Mechanik. Daher läßt sich $\mathfrak{g}$ in eine Tangential- und eine Normalkomponente (in Richtung der Hauptnormale der Bahn) zerlegen. Um das auszuführen, bedient man sich der Frenetschen Formeln

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = k\mathfrak{n},\ \frac{d\mathfrak{n}}{ds} = -k\mathfrak{t} + \varkappa\mathfrak{b},\ \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = -\varkappa\mathfrak{n}, \tag{2}$$

worin $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ das begleitende Dreikant aus den Einheitsvektoren der Tangente, Haupt- und Binormale, k die Krümmung und $\varkappa$ die Windung bedeuten. Wegen

$$\dot{\mathfrak{r}} = v\mathfrak{t},$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = v^2\frac{d\mathfrak{t}}{ds} + \dot{v}\mathfrak{t}$$

geht (1) mit Benutzung von (2) über in

$$v^2k\mathfrak{n} + \dot{v}\mathfrak{t} = g - cf(v)\mathfrak{t},$$

woraus zugleich die gewünschte Zerlegung

$$\mathfrak{g} = (\dot{v} + cf(v))\mathfrak{t} + kv^2\mathfrak{n} \tag{3}$$

in Tangentialverzögerung und Zentrifugalbeschleunigung folgt. Daraus ergibt sich

---

2) Über die Anwendung dieser vektorischen Gleichung (1) zu einer Näherungskonstruktion der Flugbahn vgl. Th. Vahlen, Artilleristische Monatshefte 1918, S. 145, und Ballistik (Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter & Co) 1922, S. 29. Diese ursprünglich nur für ebene Schußbahnen und festes $\mathfrak{g}$ gedachte Konstruktion gilt auch für den allgemeinen Fall, wo sie dann räumlich oder nach darstellend-geometrischen Methoden auszuführen ist.

Digitized by Google

(4) $$\mathfrak{g}\mathfrak{b} = 0,$$

d. h. $\mathfrak{g}$ steht auf der Binormale senkrecht, was ja weiter nichts bedeutet, als daß $\mathfrak{g}$ in der Schmiegungsebene liegt.

3. *Unter welchen Bedingungen ist die Schußbahn eine* ***ebene*** *Kurve? — Notwendig und hinreichend dafür ist, daß auch* $\frac{d\mathfrak{g}}{ds}$ *in der Schmiegungsebene gelegen ist.*

Um das zu beweisen, differenziere man (4):

(5) $$\mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{g}}{ds} + \mathfrak{g}\frac{d\mathfrak{b}}{ds} = 0.$$

Nach der dritten Frenetschen Formel (2) ist aber, soll die Schußbahn eben sein, $\frac{d\mathfrak{b}}{ds} = 0$ wegen $\varkappa = 0$. Also muß

$$\mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{g}}{ds} = 0$$

sein, d. h. $d\mathfrak{g}/ds$ in der Schmiegungsebene liegen. Umgekehrt folgt aus (5)

$$\mathfrak{g}\frac{d\mathfrak{b}}{ds} = -\varkappa\mathfrak{g}\mathfrak{n} = 0.$$

Nach (3) ist nun

$$\mathfrak{g}\mathfrak{n} = kv^2,$$

also ist $\varkappa k v^2 = 0$, d. h. entweder $\varkappa = 0$ oder $k = 0$ oder $v = 0$; aber $k = 0$ bedeutet, daß die Schußbahn eine Gerade, also umso mehr eine ebene Kurve ist, und $v = 0$ bedeutet Ruhe statt Bewegung. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus (3) berechne man

$$\frac{d\mathfrak{g}}{ds} = (\dot{v} + cf(v))\frac{d\mathfrak{t}}{ds} + \left(\frac{\ddot{v}}{v} + \frac{d\,cf(v)}{ds}\right)\mathfrak{t} + kv^2\frac{d\mathfrak{n}}{ds} + \frac{d\,kv^2}{ds}\mathfrak{n},$$

woraus sich nach den Frenetschen Formeln (2) leicht ergibt:

(6) $$\frac{d\mathfrak{g}}{ds} = \left(\frac{\ddot{v}}{v} + \frac{d\,cf(v)}{ds} - k^2v^2\right)\mathfrak{t} + \left(k\dot{v} + kcf(v) + \frac{d\,kv^2}{ds}\right)\mathfrak{n} + k\varkappa v^2\mathfrak{b}.$$

Das ist die Zerlegung von $\frac{d\mathfrak{g}}{ds}$ in „natürliche“ Komponenten. Daraus folgt

(7) $$\mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{g}}{ds} = k\varkappa v^2$$

wegen $\mathfrak{b}\mathfrak{t} = 0$, $\mathfrak{b}\mathfrak{n} = 0$, $\mathfrak{b}^2 = 1$. Aus (7) folgt (5) für $\varkappa = 0$, und aus (7) und (5) folgt $k\varkappa v^2 = 0$ wie oben.

Digitized by Google

4. Die Formel (3) enthält eigentlich schon vollständig die Hauptgleichungen der äußeren Ballistik. Da $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ in derselben Ebene, der Schmiegungsebene, gelegen ist, gibt es einen Winkel $\theta = \sphericalangle \mathfrak{g}\mathfrak{n}$ derart, daß[3])

$$\mathfrak{g}^0 = -\sin\theta\,\mathfrak{t} + \cos\theta\,\mathfrak{n} \tag{8}$$

oder

$$\mathfrak{g}\mathfrak{n} = g\cos\theta,\ \mathfrak{g}\mathfrak{t} = -g\sin\theta$$

ist. Beachtet man noch

$$\dot{v} = v\frac{dv}{ds},$$

so folgt aus (3)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} &= -g\sin\theta - cf(v) \\ v^2 k &= g\cos\theta. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Diese beiden bekannten Gleichungen der äußeren Ballistik[4]) gelten mithin auch für den allgemeinen Fall der nicht-ebenen Flugbahn, nur hat jetzt θ die obige allgemeinere Bedeutung.

5. Jetzt werde im besonderen angenommen, $\mathfrak{G}$ sei eine nach ihrem Mittelpunkte M (Radiusvektor $\mathfrak{r}_M$) gerichtete Zentralkraft. Dann ist mit $\lambda < 0$

$$\mathfrak{g} = \lambda(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) = -g(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M)^0 = g\,\mathfrak{g}^0,$$

worin

$$g = -\lambda|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M| > 0$$

ist. Zur Abkürzung sei $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M = \bar{r}$ gesetzt. Aus (4) folgt jetzt

$$\mathfrak{b}\bar{r} = 0,$$

und da

$$\frac{d\mathfrak{g}}{ds} = \lambda\frac{d\mathfrak{r}}{ds} + \frac{d\lambda}{ds}\bar{r} = \lambda\mathfrak{t} + \frac{d\lambda}{ds}\bar{r}$$

ist, so ergibt sich leicht

$$\mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{g}}{ds} = \frac{d\lambda}{ds}\mathfrak{b}\bar{r} = 0.$$

3) Der obere Index 0 bedeutet stets den zugehörigen Einheitsvektor.

4) Vgl. C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Bd. I. 5. Aufl. Berlin 1925. S. 109 unten.

Digitized by Google

Wenn also die äußeren auf das Geschoß einwirkenden Kräfte eine Resultante haben, die immer nach demselben Punkte M, etwa dem Erdschwerpunkt, gerichtet ist, so liegt die Schußbahn bestimmt in einer Ebene. In dieser liegen die Punkte O und M sowie der Vektor $\mathfrak{g}$, durch die ihre Lage bestimmt ist.

Das Ergebnis bleibt auch bestehen, wenn der Mittelpunkt der Zentralkraft $\mathfrak{G}$ ins Unendliche rückt, bei festgehaltenem O und festgehaltener Richtung $\overline{OM}$. Dann ist $\mathfrak{g}^0 = -\bar{r}^0$ ein Einheitsvektor mit konstanter Richtung, und man hat $\mathfrak{g} = g\mathfrak{g}^0$ mit *konstantem* $\mathfrak{g}^0$. Dies ist die gewöhnliche Annahme der äußeren Ballistik.

6. Der absolute Betrag $|\bar{r}| = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M|$ werde mit r bezeichnet, und mit φ der Winkel, den der Vektor $\bar{r}$ gegen eine feste, durch M gehende Anfangsrichtung (Einheitsvektor $\mathfrak{i}$) in der Ebene der Schußbahn bildet, $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{i}\,\bar{r})$; r und φ bilden dann Polarkoordinaten der Schußbahn in Bezug auf den Punkt M als Pol. Ist $\psi = \sphericalangle(\bar{r}\,\mathfrak{t})$ und $\vartheta = \sphericalangle(\mathfrak{i}\,\mathfrak{t})$, so hat man

$$\vartheta = \varphi + \psi, \quad \theta = \psi + \pi/2$$

und bekanntlich

$$dr = \cos\psi\, ds, \quad r\,d\varphi = \sin\psi\, ds,$$

wie in der elementaren Differentialgeometrie der ebenen Kurven gezeigt wird[5]). Damit ist

$$dr = \sin\theta\, ds, \quad r\,d\varphi = \cos\theta\, ds. \tag{10}$$

Wenn man die Ebene der Schußbahn von der Seite betrachtet, daß der Winkel $\sphericalangle(\mathfrak{t}\,\mathfrak{n})$ im mathematisch negativen Sinne gemessen wird, wenn ferner die Schußbahn im Sinne des Schießens von links nach rechts durchlaufen wird, so liegt der Krümmungsmittelpunkt zur Rechten, und es ist

$$k = -\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{\sin\psi}{r} - \frac{d\psi}{ds}$$

oder

$$k = \frac{\cos\theta}{r} - \frac{d\theta}{ds}. \tag{11}$$

Die beiden Gleichungen (9) erhalten damit die Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} v\frac{dv}{ds} &= -g\sin\theta - cf(v) \\ v^2\frac{d\theta}{ds} &= \cos\theta\left(\frac{v^2}{r} - g\right). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

5) Vgl. z. B. meine „Höhere Mathematik" I, 4. Aufl. (Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1932). § 25 (8). S. 151.

Digitized by Google

Jetzt kann man ds durch Division wegschaffen und erhält dann die Verallgemeinerung der sogenannten *Hauptgleichung* der äußeren Ballistik

$$g\,d(v\cos\vartheta) = \frac{1}{3}\frac{\cos\vartheta}{r}\,d(v^3) + cvf(v)\,d\vartheta. \tag{13}$$

7. Es ist eine Kleinigkeit, hieraus die Formeln für den Fall abzuleiten, daß $\mathfrak{g}$ eine feste Richtung $\mathfrak{g}^0$ hat; denn man braucht dazu nur den Punkt M längs dieser Richtung ins Unendliche zu verlegen, d. h. $r \to \infty$ zu machen. Dabei verschwinden in (12) und (13) die Glieder mit $1/r$, außerdem wird, wenn man die Anfangsrichtung $\mathfrak{i}$ senkrecht zu $\mathfrak{g}$ nimmt, $\vartheta \to \vartheta$, und man erhält jetzt

$$\left\{\begin{aligned} v\frac{dv}{ds} &= -g\sin\vartheta - cf(v) \\ v^2\frac{d\vartheta}{ds} &= -g\cos\vartheta \end{aligned}\right. \tag{14}$$

und die „Hauptgleichung“

$$g\,d(v\cos\vartheta) = cvf(v)\,d\vartheta. \tag{15}$$

Dies sind die aus der Ballistik bekannten Gleichungen[6]; gewöhnlich werden sie unter der Annahme, g sei konstant, abgeleitet. Aber man sieht, daß dies nicht erforderlich ist, nur die Richtung von $\mathfrak{g}$ muß fest sein.

8. Die Formeln (10) und (12) enthalten alle Mittel, um die Schußbahn in Polarkoordinaten (r, φ) zu bestimmen, wenn g (Zentripetelbeschleunigung, Schwerebeschleunigung) als Funktion des Ortes in der Schußbahnebene gegeben ist. Denn das sind vier Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den fünf Veränderlichen $r, \varphi, \vartheta, v, s$. Man kann ds leicht wegschaffen und erhält

$$\left\{\begin{aligned} v\frac{dv}{dr} &= -g - cf(v) : \sin\vartheta \\ v^2\frac{d\vartheta}{dr} &= ctg\,\vartheta\left(\frac{v^2}{r} - g\right) \\ r\frac{d\varphi}{dr} &= ctg\,\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Ich will hier nicht auf die Integration dieses Satzes von drei gekoppelten Differentialgleichungen eingehen, sondern nur den praktisch wichtigen Fall betrachten, wo g und c nur von r, nicht auch

6) Vgl. C. Cranz, a. a. O. S. 110

Digitized by Google

von φ abhängen. Bei c ist das der Fall, wenn die Luftdichte $\delta = \delta(r)$ ist. Dann stellen die beiden ersten Gleichungen (16) zwei gekoppelte Differentialgleichungen zur Bestimmung von $v = v(r)$ und $\theta = \theta(r)$ dar. Danach bestimmt sich $\varphi = \varphi(r)$ aus der dritten Gleichung (16) durch eine Quadratur. Damit ist die Schußbahn bestimmt. Die Flugzeit ergibt sich ebenfalls durch eine Quadratur aus

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r \sin \theta}. \tag{17}$$

9. Wenn $\mathfrak{g}$ eine feste Richtung hat, muß man auf die Gleichungen (14) zurückgreifen, um die Schußbahn zu bestimmen. Man wählt hier rechtwinklige cartesische Koordinaten, deren x-Achse zu $\mathfrak{i}$, deren y-Achse zu $-\mathfrak{g}$ parallel und gleichgerichtet sein mögen, deren Ursprung aber ein beliebiger Punkt der Schießebene sein kann. (Gewöhnlich wählt man dazu den Punkt, an dem das Geschoß den Druck der Pulvergase zuerst nicht mehr spürt.) Dann ist

$$\frac{dx}{ds} = \cos \vartheta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \vartheta, \tag{18}$$

und (14) und (18) bilden jetzt einen Satz von vier gekoppelten Differentialgleichungen zwischen den Veränderlichen x, y, ϑ, v, s. Man kann auch hier ds wegschaffen und erhält

$$\left\{ \begin{aligned} v \frac{dv}{dy} &= -g - cf(v) : \sin \vartheta \\ v^2 \frac{d\vartheta}{dy} &= -g \operatorname{ctg} \vartheta \\ \frac{dx}{dy} &= \operatorname{ctg} \vartheta, \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Gleichungen, die man auch aus (16) durch Grenzübergang $r \to \infty$, $\theta \to \vartheta$ hätte herleiten können. Praktisch wichtig ist der Fall $g = g(y)$, $c = c(y)$. Dann kann man aus den beiden ersten Differentialgleichungen $v = v(y)$ und $\vartheta = \vartheta(y)$, und aus der dritten durch eine Quadratur $x = x(y)$ bestimmen, womit die Flugbahn bekannt ist. Die Flugzeit ergibt sich ebenfalls durch eine Quadratur aus

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v \sin \vartheta}; \tag{20}$$

(19) und (20) sind die üblichen Formeln der Ballistik.

Digitized by Google

Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung[1]).

Von Robert Ritter in Berlin.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Übertragung der für die partiellen Differentialgleichungen *erster* Ordnung üblichen geometrischen Deutung der Charakteristiken auf solche *zweiter* Ordnung. Wir gehen ähnlich dem Verfahren Kamkes in seinem Lehrbuch[2]) vor, legen dann jedoch Systeme zugrunde. Die Involutionssysteme zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung zeigen nicht nur — wie bekannt — in rein analytischer Hinsicht, sondern auch in bezug auf die mehr geometrische Gewinnung der Charakteristiken mittels Enveloppenbildung einparametrischer Flächenscharen die größte Analogie zu den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Bekanntlich[3]) stellt man sich nach Monge und Cauchy eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung[4])

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

geometrisch gedeutet, als eine Bedingung für die Flächenelemente (Punkte und Tangentialebenen) der gesuchten Integralfläche vor. Diese sei unter Auszeichnung der Koordinate z durch eine eindeutige, dreimal stetig differenzierbare Funktion $z(x, y)$ darzustellen. Um (1) zu integrieren, d. h. Flächenelemente, welche (1) erfüllen, zu finden, betrachtet man zunächst einen festen Raumpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ und läßt durch ihn zweifach unendlich viele *Ebenen* von Flächenelementen gemäß der Gleichung

$$\zeta = p_0 \xi + q_0 \eta \tag{2}$$

---

1) Vorgetragen in der 304. Sitzung am 31. Oktober 1934.

2) E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, 1930, 379 ff.

3) L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 1930, 265 ff. — E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung, 1893, 175 ff.

4) f sei im zugrundeliegenden Bereich des x-y-z-p-q-Raumes samt seinen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung eindeutig, endlich und stetig; ferner mögen f_p, f_q niemals beide zugleich verschwinden.

Digitized by Google

hindurchgehen, unter zunächst beliebiger Variation von p_0, q_0. Hierbei ist gesetzt

$$x - x_0 = \xi,\ y - y_0 = \eta,\ z - z_0 = \zeta. \tag{3}$$

Sollten diese Ebenen jedoch als Tangentialebenen von Integralflächen benutzbar sein, so müssen ihre Koeffizienten p_0, q_0 der Bedingung (1) genügen, wodurch die Mannigfaltigkeit der Ebenen auf eine einparametrische beschränkt wird. Es ist ferner der die Integration ermöglichende Umstand bekannt, daß diese Schar gewisse Raumkurven (bzw. Streifen erster Ordnung), nämlich die Charakteristiken (bzw. charakteristischen Streifen) festzulegen gestattet, welche auf den Integralflächen liegen müssen, so daß man diese aus ihnen aufbauen kann. Es wird hierzu die Enveloppe der einparametrischen Schar aller möglichen Tangentialebenen durch P_0 als ein Kegel mit der Spitze P_0 bestimmt. Man ordnet jedem Punkt P_0 den ihm zugehörigen Kegel als sog. Mongeschen Kegel zu und verlangt von jeder Integralfläche, daß sie in jedem ihrer Punkte den dort vorhandenen Kegel berührt. Dabei wird das Flächenelement der Integralfläche eine bestimmte Mantellinie des Kegels berühren, wodurch auf der Fläche eine bestimmte Fortschreitungsrichtung festgelegt wird. Die charakteristischen Kurven sind dann bekanntlich diejenigen, welche diese Richtungen einhalten, deren Tangenten also von jenen Mantellinien gebildet werden.

Auf den weiteren, bekannten Verlauf der Integration, welche ja auf die eines gewissen Systems *gewöhnlicher* Differentialgleichungen derselben Ordnung für die charakteristischen Streifen zurückgeführt wird, gehen wir nicht näher ein. Wir erwähnen nur noch, daß diese Reduktion des Integrationsproblems dadurch ermöglicht wird, daß man — geometrisch gesprochen — die „dreiparametrische" Gesamtheit der die Integralflächen berührenden Charakteristikentangenten des R_3 (jede Gerade analytisch festgelegt durch das Anfangsintegralflächenelement erster Ordnung und eine Streifenbedingung) als spezielles *Richtungsfeld* im R_3 deuten kann. Wir begnügen uns mit der geometrischen Deutung der Charakteristiken, die wir auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung dadurch übertragen wollen, daß wir die Ordnung der benutzten Berührungselemente entsprechend erhöhen. Vorher notieren wir noch die verallgemeinerungsfähigen Gleichungen bezüglich der Enveloppe.

Bei der Gleichung (1), die z. B. nach p auflösbar sei, muß man p, q aus den drei Gleichungen eliminieren

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & \zeta = p\xi + q\eta, \\ (2) & 0 = p_q\xi + \eta, \end{array}\right. \qquad (3)\quad p = \varphi(x_0, y_0, z_0, q). \tag{4}$$

Digitized by Google

Der Ausdruck p_q hängt nach (4₃) im allgemeinen von x_0, y_0, z_0, q ab, so daß wir (4₂) nach q auflösen. Der entstehende Wert ist offenbar von der Form

$$q = f_2\left(P_0, \frac{\eta}{\xi}\right), \tag{5}$$

so daß nach (4₃) ebenfalls wird

$$p = f_1\left(P_0, \frac{\eta}{\xi}\right). \tag{6}$$

Diese Funktionen genügen natürlich der Gleichung (1). Die Gleichung der *Enveloppe* wird nach (4₁)

$$\xi = f_1\left(P_0, \frac{\eta}{\xi}\right)\xi + f_2\left(P_0, \frac{\eta}{\xi}\right)\eta, \tag{7}$$

also die einer *Kegelfläche* mit der Spitze in P_0.

Wir kommen zur Übertragung der benutzten Begriffe auf die Gleichungen zweiter Ordnung. Die vorgegebene Gleichung sei[5])

$$g(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{8}$$

Den Inbegriff von acht festgewählten Zahlen $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$ nennt man bekanntlich ein Flächen- oder Streifenelement zweiter Ordnung. Der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ des R_3 ist dabei sein Trägerpunkt; p_0, q_0 geben die Stellung der durch ihn hindurchgehenden Ebene E_0 der Gleichung (2) an, während wir r_0, s_0, t_0 in naheliegender Weise (entsprechende Teilsumme der Taylorschen Reihe für ζ) zur Festlegung des folgenden *Paraboloids* Π_0 benutzen wollen, welches ebenfalls durch P_0 hindurchgeht und E_0 in P_0 berührt

$$\zeta = p_0\xi + q_0\eta + \frac{r_0}{2}\xi^2 + s_0\xi\eta + \frac{t_0}{2}\eta^2. \tag{9}$$

Wenn wir genau analog dem Verfahren bei der Gleichung erster Ordnung vorgehen wollen, so müssen wir uns für eine feste Wahl von P_0 und E_0 entscheiden, d. h. die Gesamtheit aller Π betrachten, welche durch P_0 hindurchgehen und dort sämtlich E_0 berühren. Um zu einer Enveloppenbildung, wie sie bei der ersten Ordnung stattfand, zu gelangen, bemerken wir, daß die Gesamtheit dieser Π eine *drei*dimensionale Mannigfaltigkeit ausmacht. Da es sich jedoch natürlich um *Integral*streifen handeln soll, welche die Gleichung (8) zu erfüllen haben, bleibt eine *zwei*parametrische Schar übrig.

---

5) g sei in dem zugrundeliegenden Bereich eine eindeutige, analytische Funktion seiner acht Argumente. Das entsprechende werde für z vorausgesetzt.

Digitized by Google

Wollen wir zur analogen, einfachen Enveloppenbildung übergehen, so müssen wir eine *ein*parametrische Schar dadurch auswählen, daß wir zu $g = 0$ noch eine zweite, unabhängige Bedingung $h = 0$ (h sei ebenfalls analytisch) zwischen r, s, t und Größen erster Ordnung *adjungieren*, so daß $g = 0$ und $h = 0$ ein *System* zweier simultaner, partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung bilden. Sein allgemeines Integral enthält oft nur eine willkürliche Funktion und evtl. eine willkürliche Konstante[6]). Gewisse Lösungen von $g = 0$ werden erst bei Adjunktion einer *anderen* Gleichung $h^* = 0$ erscheinen.

Der Enveloppenbildung liegen die drei Gleichungen zugrunde

$$(10)\qquad \begin{cases} (1) & g(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r, s, t) = 0, \\ (2) & h(\ldots\ldots\ldots) = 0, \\ (3) & \zeta = p_0\xi + q_0\eta + \frac{r}{2}\xi^2 + s\xi\eta + \frac{t}{2}\eta^2, \end{cases}$$

welche eine einparametrische Schar von Paraboloiden Π bestimmen. Und zwar müssen wir zwei der drei zweiten Ableitungen r, s, t mittels (10_1), (10_2) durch die dritte ausdrücken und diese Auflösungen in (10_3) eintragen. Man kann bekanntlich[7]) diese Auflösung immer — nötigenfalls nach einer Transformation der unabhängigen Variablen — so bewerkstelligt denken, daß man r und t als Funktionen von s erhält, was ja die symmetrischste Art ist. Wir wollen also ohne Minderung der Allgemeinheit die gegebenen Gleichungen in der Form annehmen

$$(11)\qquad \begin{cases} r + f(x, y, z, p, q, s) = 0, \\ t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0. \end{cases}$$

Sie wird dazu benutzt, die einparametrische Schar der Π als Funktion des Parameters s darzustellen. Die Enveloppe wird gewonnen, indem man s aus (10_3) und der aus ihr durch Differentiation nach s entstehenden Gleichung eliminiert

$$(12)\qquad \begin{cases} (1) & \zeta = p_0\xi + q_0\eta + \frac{r}{2}\xi^2 + s\xi\eta + \frac{t}{2}\eta^2, \\ (2) & 0 = \frac{r_s}{2}\xi^2 + \xi\eta + \frac{t_s}{2}\eta^2. \end{cases}$$

Hierbei sind r, t durch

6) vgl. Fußnote 12.

7) E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, t. 2, 1898, 47.

Digitized by Google

(13) $$r = -f(P_0, E_0, s), \quad t = -\varphi(P_0, E_0, s)$$

zu ersetzen, obenso die Ableitungen r_s, t_s durch die sich hieraus durch Differentiation ergebenden Ausdrücke. Wenn (12_2) noch s enthält, was wir zunächst annehmen wollen, so wird s eine Funktion

(14) $$s = f_{12}\left(P_0, E_0, \frac{\eta}{\xi}\right),$$

so daß nach (13) r und t ebenfalls von der Form werden.

(15) $$r = f_{11}\left(P_0, E_0, \frac{\eta}{\xi}\right), \quad t = f_{22}\left(P_0, E_0, \frac{\eta}{\xi}\right).$$

Die gesuchte *Enveloppe* bekommt durch Einsetzen von (14), (15) in (12_1) die (7) entsprechende Gleichung

(16) $$\zeta = p_0\xi + q_0\eta + \frac{1}{2} f_{11}\left(P_0, E_0, \frac{\eta}{\xi}\right)\xi^2 + f_{12}\left(P_0, E_0, \frac{\eta}{\xi}\right)\xi\eta + \frac{1}{2} f_{22}\left(P_0, E_0, \frac{\eta}{\xi}\right)$$

Ein allgemein geometrischer Charakter dieser Enveloppe kann offenbar nicht ohne weiteres angegeben werden (im Gegensatz zum Mongeschen Kegel).

Die Grenzlage der Schnittkurve eines Paraboloids Π_0 mit dem festen Wert $s = s_0$ und eines Nachbarparaboloids mit dem Werte $s = s_0 + (\Delta s)_0$ ergibt sich nach (12) als Schnitt von Π_0 mit einer zur z-Achse parallelen Ebene, genauer gesagt, mit einem Ebenenpaar, welches durch (12_2) dargestellt wird, wenn man sich in den (im allgemeinen) von s abhängigen Koeffizienten s durch s_0 ersetzt denkt. Hierdurch werden dem Punkte P_0 und der Ebene E_0 auf Π_0 zwei Richtungen und Krümmungen zugeordnet (entsprechend der Richtung der Mantellinie des Mongeschen Kegels). Fassen wir nun Π_0 als Schmiegungsparaboloid einer gewissen, durch jenes Element erster Ordnung (P_0, E_0) hindurchgehenden Integralfläche I_0 auf, so werden auch auf I_0 dem Element zwei Richtungen und Krümmungen (dieselben) zugeordnet.

Um diese Doppeldeutigkeit zu vermeiden, wollen wir über die bisher noch nicht festgelegte Funktion φ so verfügen, daß Eindeutigkeit entsteht, so daß ähnlich wie bei der ersten Ordnung jedem Punkte P_0, jetzt jedem Element erster Ordnung (P_0, E_0) auf I_0 stets *eine*, doppelt zu zählende Richtung (und Krümmung) zugeordnet wird. Wir können dann hoffen, ebenfalls ein vollständiges System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu gewinnen.

Zur Eindeutigkeit müssen wir offenbar verlangen, daß die rechte Seite von (12_2) ein vollständiges Quadrat ist, d. h. daß identisch in s gilt:

Digitized by Google

(17) $$1 - r_s t_s \equiv 1 - f_s \varphi_s \equiv 0.$$

Dies ist die erste der beiden bekannten Involutionsbedingungen [8]). Die zweite ergibt sich dann auf Grund der ersten unmittelbar aus den nach x, y differenzierten Gleichungen (11)

Welches ist nun die zugeordnete Richtung auf I_0? Zunächst ergibt sich wegen (17) aus (12_2) für die schneidende Ebene

(18) $$\frac{\eta}{\xi} = -(r_s)_0 = (f_s)_0.$$

Die Gleichung (9) schreiben wir in der Form

(19) $$\frac{\zeta}{\xi} = p_0 + q_0 \frac{\eta}{\xi} + \frac{r_0}{2}\xi + s_0 \eta + \frac{t_0}{2}\eta \frac{\eta}{\xi}.$$

Durch Grenzübergang $P \to P_0$ entsteht dann aus (18), (19)

(20) $$\frac{dy}{dx} = -r_s = f_s, \quad \frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx} = p + q f_s,$$

wenn wir den Index 0 wieder fortlassen, also einen beliebigen Raumpunkt betrachten. Die letzte Gleichung ist natürlich mit der ersten Streifenbedingung identisch.

Man nennt bekanntlich die Kurven auf der Integralfläche, welche diese Richtungen (20) einhalten (und die zugehörigen Krümmungen besitzen, siehe später) Charakteristiken; man leitet den Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ jedoch aus denjenigen simultan zu erfüllenden Gleichungen ab, welche diese Kurven als Ausnahmekurven beim Existenzsatz kennzeichnen, welcher durch einen nichtcharakteristischen, nichtsingulären Integralstreifen zweiter Ordnung genau eine Integralfläche hindurchzulegen gestattet [9]).

Wir haben somit gesehen, wie die Übertragung der geometrischen Deutung der Charakteristiken von der ersten Ordnung auf die zweite auf genau dieselben Involutionsbedingungen führt, die von Lie und Darboux durch rein analytische Untersuchungen über die eindeutige Berechenbarkeit derjenigen Ableitungen der Unbekannten erhalten wurden, die von höherer Ordnung als das vorgegebene System selbst sind, also hier der dritten Ableitungen. Man wollte hierdurch den Grad der Allgemeinheit des möglichen Integrales feststellen, insbesondere, ob es von endlich

8) a. a. O. (Fußnote 7) 48, 49.

9) Wir können jetzt, ähnlich dem Hinweis J. Lenses (Handb. d. Physik, Bd. 3, Kap. 10, Partielle Differentialgleichungen, Ziff. 10, Fußnote 2) für die Gleichungen erster Ordnung, bemerken, daß der Begriff „Charakteristik" aus der Theorie der einparametrischen Flächenscharen auch hier eine sinngemäße Anwendung findet.

Digitized by Google

vielen oder unendlich vielen willkürlichen Konstanten oder von einer willkürlichen Funktion abhängen kann. Für den letzten Fall ist die Bedingung (17) notwendig [10]), denn es dürfen die beiden Gleichungen für die gemischten dritten Ableitungen β, γ

$$(21) \qquad \begin{cases} (1) \quad \beta + f_s\gamma + \left(\dfrac{df}{dy}\right) = 0, \\ (2) \quad \gamma + \varphi_s\beta + \left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

nicht eindeutig nach ihnen auflösbar sein.

Diese Gleichung (21_1) gestattet es bekanntlich, ein vollständiges System S gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für die Charakteristiken anzugeben, wobei man wegen des im allgemeinen die Größe s enthaltenden Koeffizienten f_s in (20) bis zur zweiten Ordnung aufsteigen muß. Hierbei tritt nur die Kombination $\beta + f_s\gamma$ der dritten Ableitungen auf.

Wir weisen noch darauf hin, daß bei gleichen Richtungen für die Integralfläche I_0 (Schnitt mit der Schmiegungsebene der Charakteristik) und ihr Schmiegungsparaboloid Π_0 (Schnitt mit der Ebene parallel zur z-Achse) in P_0 auch Übereinstimmung der entsprechenden Kurvenkrümmungen besteht, da diese von der Richtung und den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich abhängen [11]). Daher können wir die Krümmung der charakteristischen Kurven der Integralfläche aus der der ebenen Paraboloidkurven (Parabeln) in P_0 ablesen.

Es folgt aus (9) für die Ableitungen auf Π_0

$$(22) \qquad \begin{cases} p = p_0 + r_0\xi + s_0\eta, \; q = q_0 + s_0\xi + t_0\eta, \\ r = r_0, \; s = s_0, \; t = t_0, \end{cases}$$

so daß längs der Richtung $\dfrac{dy}{dx}$ gilt

$$(23) \qquad \frac{dp}{dx} = r_0 + s_0\frac{dy}{dx}, \; \frac{dq}{dx} = s_0 + t_0\frac{dy}{dx},$$

was mit den beiden zweiten Streifenbedingungen aus dem System S identisch ist. Dieses setzt sich also genau wie bei der Gleichung

10) a. a. O. (Fußnote 7), 48.

11) Nach L. Kiepert, Grundriß der Differential- und Integralrechnung, Bd. 1, 1910, 674 ergibt sich für das Quadrat des gemeinsamen Krümmungshalbmessers ϱ_0

$$\varrho_0^2 = \left.\frac{[1 + r_s^2 + (r_s q - p)^2]^3}{(1 + r_s^2)(r - 2sr_s + tr_s^2)^2}\right|_0.$$

Digitized by Google

erster Ordnung aus einer durch Enveloppenbildung gewonnenen Gleichung für $\frac{dy}{dx}$, ferner Streifenbedingungen sowie differenzierten Ausgangsgleichungen zusammen. Die Reduktion des Integrationsproblems auf das von S wird in analoger Weise dadurch ermöglicht, daß man die „dreiparametrische“ [12]) Gesamtheit der die Integralflächen oskulierenden (von zweiter Ordnung berührenden) Charakteristikenelemente zweiter Ordnung (Richtung und Krümmung) des R_3 (jedes Element analytisch festgelegt durch das Anfangsintegralflächenelement zweiter Ordnung und drei Streifenbedingungen) als spezielles *Richtungsfeld* bereits im R_6 deuten kann.

Wir wollen noch kurz auf den Fall *linearer* Gleichungen eingehen, welcher auch hier, genau wie bei der linearen, partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in bezug auf die Enveloppe eine Sonderrolle spielt. Die Enveloppe entartet in analoger Weise. Bei der linearen Gleichung erster Ordnung folgert man bekanntlich aus (4), daß dem festen Punkt P_0 genau *eine* Richtung der Charakteristiken aller Integralflächen durch P_0 zuzuordnen ist. Sie wird durch die *Trägergerade desjenigen Ebenenbüschels* angegeben, *in welches der* Mongesche *Kegel ausartet.* Dabei stellt sich diese nach (4) als Schnitt einer zur z-Achse parallelen Ebene (4_2) mit einer zweiten Ebene (4_1) dar (siehe später (31)). Wegen der Unabhängigkeit der Richtung von der betrachteten Integralfläche bilden bereits die „Punktgleichungen“ der Charakteristiken ein vollständiges System zur Bestimmung der letzteren.

Daß bei dem System zweier linearer, involutorischer Gleichungen zweiter Ordnung genau analoge Verhältnisse vorliegen [13]), wird daran liegen, daß die Ausartung der Enveloppe der Schmiegungsparaboloide genau entsprechend erfolgt, so daß bereits die „Punkt- und Ebenengleichungen“ der Charakteristiken ein vollständiges System zu ihrer Bestimmung bilden werden.

Sind die beiden Funktionen f, φ linear in s [14]), so müssen natürlich wegen der ersten Involutionsbedingung die Koeffizienten von s zueinander reziprok sein.

---

12) Nach E. Goursat, a. a. O. (Fußnote 7), 59 kommt durch die Integration der Streifenbedingungen noch eine weitere willkürliche Konstante hinein, so daß man z. B. eine Kurve und noch die Tangentialebene in einem ihrer Punkte willkürlich, jedoch natürlich die Kurventangente enthaltend, vorgeben kann.

13) a. a. O. (Fußnote 7), 66 ff.

14) Es genügt offenbar, von einer die Linearität vorauszusetzen.

Digitized by Google

$$(24)\qquad \begin{cases} f = us + f^*, & u = u(x, y, z, p, q), \\ \varphi = \dfrac{s}{u} + \varphi^*, & f^* = f^*(\,.\;.\;.\;.), \\ & \varphi^* = \varphi^*(\,.\;.\;.\;.). \end{cases}$$

Wir nennen u den „Involutionsfaktor". Wir müssen uns für ein bestimmtes Anfangselement erster Ordnung (P_0, E_0) entscheiden. Dann setzen wir

$$(25)\qquad u_0 = u(P_0, E_0),\ f_0^* = f^*(P_0, E_0),\ \varphi_0^* = \varphi^*(P_0 E_0).$$

Nach (12_1) haben wir die folgenden Paraboloide in Abhängigkeit von s zu betrachten

$$(26)\qquad \zeta = p_0\xi + q_0\eta - \frac{f_0^*}{2}\xi^2 - \frac{\varphi_0^*}{2}\eta^2 + s\left(-\frac{u_0}{2}\xi^2 + \xi\eta - \frac{1}{2u_0}\eta^2\right),$$

wobei der Koeffizient von s natürlich ein vollständiges Quadrat sein muß. Die beiden Gleichungen (12) gehen über in

$$(27)\qquad \begin{cases} \zeta = p_0\xi + q_0\eta - \dfrac{f_0^*}{2}\xi^2 - \dfrac{\varphi_0^*}{2}\eta^2 - \dfrac{s}{2u_0}(\dot\eta - u_0\xi)^2, \\ 0 = \qquad\qquad - \dfrac{1}{2u_0}(\eta - u_0\xi)^2. \end{cases}$$

Wir folgern, daß dem festen Anfangselement erster Ordnung (P_0, E_0) genau *ein* Element zweiter Ordnung (Richtung und Krümmung) der Charakteristiken aller Integralflächen durch (P_0, E_0) zuzuordnen ist. Es wird durch das Element derjenigen *Parabel* gegeben, *in welche die Enveloppe der Schmiegungsparaboloide ausartet*[15]. Sie ergibt sich nach (27) als Schnitt der zur z-Achse parallelen Doppelebene

$$(28)\qquad (\eta - u_0\xi)^2 = 0$$

mit dem Paraboloid

$$(29)\qquad \zeta = p_0\xi + q_0\eta - \frac{f_0^*}{2}\xi_0 - \frac{\varphi_0^*}{2}\eta^2.$$

Der Involutionsfaktor u, welcher noch die zweite Involutionsbedingung erfüllen muß, *legt somit die Stellung der schneidenden Doppelebene fest.* Auch dieses entspricht genau den Verhältnissen bei der ersten Ordnung, denn für die lineare Gleichung

$$(30)\qquad p + uq + f^* = 0,\ u = u(x, y, z),\ f^* = f^*(\,.\;.\;.)$$

geht (4) über in

15) Natürlich enthält jetzt auch die im Nenner von ϱ_0^2 in Fußnote 11 auftretende quadratische Form $r - 2sr_s + tr_s^2$ nur Ableitungen erster Ordnung.

Digitized by Google

$$(31) \qquad \begin{cases} \xi = -f_0^* \xi + q(\eta - u_0 \xi), \\ 0 = \qquad\qquad (\eta - u_0 \xi), \end{cases}$$

so daß also auch hier *der Linearfaktor u die Stellung der schneidenden Ebene angibt.*

Bei der zweiten Ordnung kann u einmal von dem ganzen Anfangselement (P_0, E_0) abhängen, es treten aber auch Fälle ein, daß es nur vom Punkte P_0, insbesondere von seiner Projektion auf die xy-Ebene abhängt, oder daß es für den ganzen Bereich konstant ist. —

Eine weitere Übertragung auf partielle Differentialgleichungen (bzw. Systeme solcher) höherer, etwa n-ter Ordnung erscheint möglich, indem man Schmiegungsflächen (-„paraboloide“) höheren, also ebenfalls n-ten Grades betrachtet.

Digitized by Google

Über die parabolische lineare Strahlenkongruenz und ihre Cayleyschen Regelflächen[1]).

Von Ulrich Graf in Berlin.

Die Gruppe der automorphen Kollineationen einer parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 ist holoedrisch isomorph zur Gruppe der Laguerreschen Transformationen der (euklidischen) Ebene. Die Geometrie in der Kongruenz P_1^1 läßt sich daher mit Hilfe einer Abbildung untersuchen, durch welche die Strahlen von P_1^1 eineindeutig auf die Speere einer Ebene bezogen werden. Im Folgenden wird zunächst diese Abbildung entwickelt und dann zur Untersuchung der Cayleyschen Flächen, d. h. der in P_1^1 enthaltenen Regelflächen dritten Grades[2]), benutzt.

I. Die parabolische lineare Kongruenz.

In Plückerschen Linienkoordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ sei eine parabolische lineare Kongruenz P_1^1 als Schnitt der beiden durch die Gleichungen

$$\mathfrak{X}_{31} = 0 \text{ und } \mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{12} = 0$$

dargestellten linearen Komplexe gegeben. In Verbindung mit der Plückerschen quadratischen Fundamentalrelation

$$\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0$$

lautet die Gleichung von P_1^1

$$\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{X}_{03}^2 = 0.$$

Wird in affinen Koordinaten x, y, z ein Achsensystem derart eingefügt, daß die vereinigte Leitgerade von P_1^1 mit der y-Achse und der Hauptstrahl mit der x-Achse zusammenfallen, so hat ein gegebener Strahl g von P_1^1 in den drei Rissen (siehe Figur) die Gleichungen

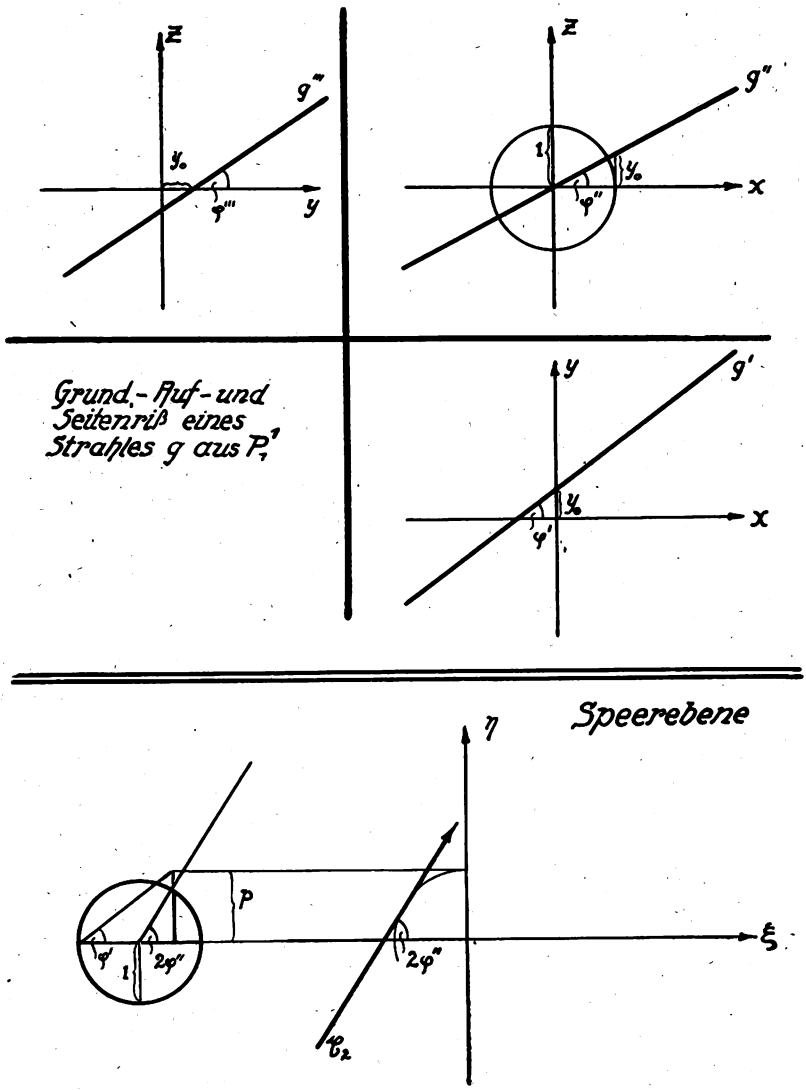
$$\begin{aligned} &\text{Grundriß: } g': \ \mathfrak{X}_{02}\cdot x - \mathfrak{X}_{01}\cdot y - \mathfrak{X}_{12} = 0; \\ &\text{Aufriß: } \quad g'': \ \mathfrak{X}_{03}\cdot x - \mathfrak{X}_{01}\cdot z \quad\quad = 0; \\ &\text{Seitenriß: } g''': \ \mathfrak{X}_{03}\cdot y - \mathfrak{X}_{02}\cdot z - \mathfrak{X}_{23} = 0. \end{aligned}$$

1) Vorgetragen in der 305. Sitzung am 28. November 1934.

2) Die Cayleyschen Flächen, deren Regelscharen in P_1^1 liegen, heißen in der Kongruenz enthalten.

Digitized by Google

Sind φ', φ'', φ''' die Anstiegwinkel von g', g'', g''' und ist y_0 die y-Koordinate desjenigen Punktes, in dem g die Leitgerade trifft, so gilt $y_0 = tg\,\varphi''$.



Konstruktive Abbildung der Strahlen g einer parabolischen linearen Kongruenz auf die Speere $\mathfrak{x}_\lambda$ einer Ebene.

Die Strahlen g von P_1' werden eineindeutig auf die Speere einer ξ-η-Ebene bezogen. Zur Festlegung eines solchen Speeres werden homogene Speerkoordinaten $\mathfrak{x}_\lambda$ benutzt, die mit den Hesseschen Koordinaten p, ϑ durch die Verhältnisse

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = 1 : -\cos\vartheta : -\sin\vartheta : p$$

Digitized by Google

verknüpft sind[3]). Zwischen den $\mathfrak{x}_\lambda$ gilt die Beziehung

$$\mathfrak{x}_0^2 = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2.$$

Die Zuordnung der Strahlen $\mathfrak{X}_{ik}$ zu den Speeren $\mathfrak{x}_\lambda$ erfolgt auf Grund der Gleichungen

$$(*) \qquad \boxed{\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{01}) : \mathfrak{X}_{03} : \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{X}_{01}) : \mathfrak{X}_{02}}$$

oder, bei Benutzung von p, ϑ und φ', φ'', φ''',

$$1 : -\cos\vartheta : -\sin\vartheta : p = 1 : \sin 2\varphi'' : -\cos 2\varphi'' : (1 + \cos 2\varphi'') \cdot tg\,\varphi'.$$

Hiernach ist die Abbildung leicht konstruktiv durchzuführen (siehe Figur); die Orientierung der Speere ist dadurch festgelegt, daß der Speer $\mathfrak{x}_\lambda$ den Winkel $2\varphi''$ gegen den positiven ξ-Speer bildet.

Der positive ξ-Speer ist das Bild des Hauptstrahles, der negative ξ-Speer das der uneigentlichen Geraden von P_1^1. Der Leitgeraden entspricht der sich selbst entgegengesetzte Speer $\mathfrak{x}_0 = 0$, der von der uneigentlichen Geraden in der ξ-η-Ebene getragen wird.

Den ∞^1 Strahlenbüscheln der parabolischen linearen Kongruenz sind die ∞^1 Parallelenbüschel, den ∞^3 allgemeinen Regelflächen zweiten Grades, die einscharig in P_1^1 enthalten sind, die ∞^3 Zykel (orientierte Kreise) der Speerebene zugeordnet.

Analytisch ist ein Zykel durch eine homogene lineare Gleichung

$$a_0\mathfrak{x}_0 + a_1\mathfrak{x}_1 + a_2\mathfrak{x}_2 + a_3\mathfrak{x}_3 = 0$$

festgelegt. Für $a_3 = 0$ zerfällt er in ein Paar Parallelenbüschel. Nach (*) entspricht dem Zykel der Schnitt von P_1^1 mit der linearen Kongruenz

$$\tfrac{1}{2}(a_0 - a_2) \cdot \mathfrak{X}_{01} + a_3 \cdot \mathfrak{X}_{02} + a_1 \cdot \mathfrak{X}_{03} + \tfrac{1}{2}(a_0 + a_2) \cdot \mathfrak{X}_{23} = 0,$$

d. h. eine einscharig in P_1^1 liegende Regelfläche zweiten Grades, deren Gleichung in den affinen Koordinaten x, y, z

$$\tfrac{1}{2}(a_0 - a_2) \cdot x^2 + \tfrac{1}{2}(a_0 + a_2) \cdot z^2 + a_3 \cdot xy + a_1 \cdot xz - a_3 \cdot z = 0$$

lautet.

Die Gruppe der automorphen Kollineationen der parabolischen linearen Kongruenz ist isomorph den Laguerreschen Transformationen der Speerebene. Die Distanz zweier Zykel als Invariante der Laguerreschen Gruppe findet sich auf Grund der benutzten Abbildung in der Kongruenz als Grenzwert eines Doppelverhältnisses, und zwar in einer Form, die durch das Entstehen der para-

3) Vgl. die Einführung orientierter Elemente z. B. bei H. Beck: „Koordinatengeometrie", Berlin 1919, S. 297.

Digitized by Google

bolischen Kongruenz als Grenzfall einer nicht speziellen (hyperbolischen oder elliptischen) Kongruenz bedingt ist. In jeder nicht speziellen Kongruenz, bei der der Abstand der beiden Leitgeraden l sein möge, bestimmen zwei in ihr einscharig enthaltene Regelflächen zweiten Grades $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ eine Büschelschar[4]) $\mathfrak{R}_1^2 + \lambda \mathfrak{R}_2^2 = 0$, die zwei je in Paare von Strahlenbüscheln zerfallene Flächen $\mathfrak{S}_1^2$ und $\mathfrak{S}_2^2$ enthält. Beim Grenzübergänge $d \to 0$ zur parabolischen Kongruenz fallen $\mathfrak{S}_1^2$ und $\mathfrak{S}_2^2$ zusammen, jedoch behält der Ausdruck

$$D = \lim_{d \to 0} D.V.(\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2; \mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{S}_2^2)$$

einen endlichen, von $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ abhängigen Wert. Dieser Wert D als Invariante der automorphen Kollineationen von P_1^1 entspricht nach (*) der Distanz zweier Zykel in der Speerebene.

Der Gruppe G_6 eigentlicher Laguerrescher Transformationen ist die Gruppe Γ_6 eigentlicher automorpher Kollineationen von P_1^1 zugeordnet; D ist eine absolute Invariante dieser Gruppe. Die uneigentlichen Laguerreschen Transformationen H_6 führen auf die Schar X_6 uneigentlicher automorpher Kollineationen von P_1^1; D ändert bei diesen Transformationen sein Vorzeichen. Der erweiterten Gruppe L_7 von Laguerreschen Transformationen schließlich entsprechen die Transformationen derjenigen Gruppe Λ_7 automorpher Kollineationen von P_1^1, welche die Verhältnisse der D-Größen invariant lassen.

In der gemischten Gruppe (Γ_6, X_6) sind drei Arten von involutorischen Transformationen enthalten, die der Spiegelung am Zykel, am Zykelbüschel und am Zykelbündel entsprechen[5]).

I. Die Spiegelung an einem Zykel ergibt in P_1^1 die paarweise Zuordnung der Kongruenzstrahlen als reziproke Polaren für eine einscharig in P_1^1 enthaltene Regelfläche zweiten Grades. Die Strahlenbüschel von P_1^1 werden dabei in sich übergeführt.

II. Die Spiegelung am Zykelbüschel ergibt eine durch eine Büschelschar von einscharig in P_1^1 enthaltenen Regelflächen zweiten Grades bestimmte involutorische Transformation, wobei einem

4) Die Büschel bzw. Bündel von Regelflächen zweiten Grades sind wegen der Autodualität der linearen Kongruenz Büschelscharen bzw. Bündelheere. Vgl. St. Jolles: „Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen aus den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades", Crelles Journ. 172, 1934, Seite 1.

5) Vgl. eine ausführliche Darstellung der Speer- und Zykelgeometrie bei Müller-Krames: „Die Zyklographie", Leipzig u. Wien 1929. Siehe auch L. Bieberbach: „Einleitung in die höhere Geometrie", Berlin-Leipzig 1933, Seite 100 ff.

Digitized by Google

gegebenen Strahle von P_1' der vierte harmonische Strahl auf der durch ihn und das Grundgeradenpaar der Büschelschar gelegten Regelfläche zweiten Grades zugeordnet wird.

III. Die Spiegelung am Zykelbündel ergibt eine durch ein Bündelheer von einscharig in P_1' enthaltenen Regelflächen zweiten Grades bestimmte involutorische Transformation, wobei einem gegebenen Strahle von P_1' derjenige Kongruenzstrahl zugeordnet wird, der mit ihm zusammen als Grundgeradenpaar eine im Bündelheer enthaltene Büschelschar von Regelflächen zweiten Grades bestimmt.

Die involutorischen Transformationen I und III sind primäre Involutionen[6]), und zwar ist I die durch eine allgemeine einscharig in P_1' enthaltene Regelfläche zweiten Grades induzierte Involution, während III diejenige involutorische Transformation ist, die in einem gegebenen Bündelheer von P_1' durch jede zerfallene Regelfläche zweiten Grades bestimmt wird. Die involutorischen Transformationen II schließlich sind sekundäre Involutionen; den konstruktiven Aufbau, auch für konjugiert imaginäre Grundgeradenpaare der Büschelschar, siehe bei St. Jolles l. c. S. 430.

Regelflächen, Büschelscharen oder Bündelheere von Regelflächen aus P_1' heißen zu einer Regelfläche $\mathfrak{R}^2$, einer Büschelschar φ oder einem Bündelheer Φ involutorisch gelegen, wenn sie durch die durch $\mathfrak{R}^2$, φ oder Φ bestimmte involutorische Transformation in sich übergeführt werden.

a) Zu jeder einscharig in P_1' enthaltenen Regelfläche zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$ liegen alle je in zwei (getrennte oder vereinigte) Paare von Strahlenbüscheln zerfallene Regelflächen involutorisch.

b, c) Eine Regelfläche $\mathfrak{R}^2$ und eine Büschelschar φ oder ein Bündelheer Φ liegen zueinander involutorisch, wenn $\mathfrak{R}^2$ der Büschelschar oder dem Bündelheer angehört.

d) Zwei Büschelscharen φ_1 und φ_2 liegen zueinander involutorisch, wenn die beiden sie bestimmenden Strahlenpaare harmonisch auf einer Regelfläche zweiten Grades liegen.

e) Eine Büschelschar φ und ein Bündelheer Φ liegen zueinander involutorisch, wenn auf der φ und Φ gemeinsamen Regelfläche $\mathfrak{R}^2$ die beiden Grundgeraden von φ und die beiden Grund-

6) Vgl. St. Jolles: „Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz", Math. Zeitschr. 27, 1928, Seite 427. Siehe auch G. Haenzel: „Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung", Crelles Journ. Bd. 166, Heft 3, 1923, Seite 167.

Digitized by Google

geraden jeder durch $\mathfrak{R}^2$ gehenden und in Φ enthaltenen Büschelschar harmonisch liegen.

Zwei Bündelheere Φ_1 und Φ_2 schneiden einander in einer Büschelschar φ mit den Grundgeraden s_1, s_2. In dem Büschel $\Phi_1 + \lambda \Phi_2 = 0$ sind zwei spezielle Bündelheere Ω_1 und Ω_2 enthalten, bestehend aus allen Regelflächen durch s_1 bzw. s_2.

f) Zwei Bündelheere Φ_1 und Φ_2 liegen zueinander involutorisch, wenn das Doppelverhältnis $D.V.(\Phi_1, \Phi_2; \Omega_1, \Omega_2) = -1$ ist. Jede gegebene Büschelschar von P_1^1, die mit φ keine Regelfläche gemein hat, trifft die vier Bündelheere Φ_1, Φ_2, Ω_1, Ω_2 in vier Regelflächen $\mathfrak{R}_1^2$. Bei involutorischer Lage von Φ_1 und Φ_2 ist dann auch stets $D.V.(\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2; \mathfrak{R}_3^2, \mathfrak{R}_4^2) = -1$.

1. Jede Büschelschar besitzt ∞^2 zu ihr involutorisch gelegene Büschelscharen.
2. Jede Büschelschar besitzt ∞^1 zu ihr involutorisch gelegene Bündelheere.
3. Jedes Bündelheer besitzt ∞^2 zu ihm involutorisch gelegene Büschelscharen.
4. Jedes Bündelheer besitzt ∞^2 zu ihm involutorisch gelegene Bündelheere.

Die involutorischen Transformationen I und III gehören der Schar X_6, die Involutionen II der Gruppe Γ_6 an. Jede Transformation aus Γ_6 läßt sich aus höchstens vier involutorischen Transformationen III zusammensetzen. Jede Involution II läßt sich auf ∞^1 Arten aus je zwei involutorischen Transformationen III an zueinander involutorisch gelegenen Bündelheeren zusammensetzen.

Die Existenz der beiden involutorischen Transformationen I und III ist charakteristisch für die parabolische lineare Kongruenz. In der elliptischen und hyperbolischen Kongruenz E_1^1 und H_1^1 können I und III nicht unterschieden werden, da jedes Bündelheer einscharig in E_1^1 oder H_1^1 enthaltener (allgemeiner) Regelflächen zweiten Grades autopolar im polaren Raume einer (allgemeinen) Regelfläche zweiten Grades liegt, während in der parabolischen Kongruenz P_1^1 zu jeder allgemeinen Regelfläche zweiten Grades das Bündelheer aller ∞^2 zerfallenen Regelflächen von P_1^1 reziprok polar liegt.

Auf die große Anzahl von Sätzen über einscharig in der parabolischen linearen Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades sowie ihre Büschelscharen und Bündelheere, die alle mit Hilfe der benutzten Abbildung aus der ebenen Speergeometrie gefolgert werden

Digitized by Google

können, soll hier nicht eingegangen, sondern die vorliegende Zuordnung zur Untersuchung der in einer parabolischen linearen Kongruenz liegenden Regelflächen dritten Grades, der Cayleyschen Flächen, benutzt werden.

II. Die Cayleyschen Regelflächen.

Eine Cayleysche Regelfläche kann als die Gesamtheit aller Strahlen einer parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 betrachtet werden, die einen Kegelschnitt treffen, der die Leitgerade der Kongruenz in einem Punkte schneidet. Die Torsalebene einer solchen Regelfläche $\mathfrak{F}^3$ hat mit dieser nur die dreifach zu zählende Leitgerade von P_1^1 gemein [7]).

Diese Flächen $\mathfrak{F}^3$ haben, wie rechnerisch auf Grund der Zuordnungsgleichungen (*) leicht bestätigt wird, zum Bilde in der ξ-η-Ebene die kubischen Hyperzykel [8]). Die Laguerreschen Hyperzykel sind analytisch durch homogene quadratische Gleichungen

$$\sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k = 0, \qquad a_{ik} = a_{ki}$$

festgelegt [9]). Nach (*) entspricht diesem Ausdruck in den $\mathfrak{X}_{ik}$ die Gleichung eines quadratischen Komplexes, der P_1^1 in einer Regelfläche vierten Grades $\mathfrak{F}^4$ schneidet. Beim kubischen Hyperzykel nun, der sich in den $\mathfrak{x}_\lambda$ nicht mehr rein darstellen läßt, ist von dieser $\mathfrak{F}^4$ ein Strahlenbüschel abgespalten, so daß sich eine Regelfläche dritten Grades, eben eine Cayleysche Regelfläche $\mathfrak{F}^3$, ergibt.

Die kubischen Hyperzykel sind von E. Laguerre im Rahmen seiner Speergeometrie ausführlich untersucht worden [10]); aus der Fülle der dort aufgezeigten Sätze sollen hier nur diejenigen herausgegriffen werden, die invariant sind gegenüber den Laguerreschen Transformationen. Ihnen entsprechen in der parabolischen linearen

7) Vgl. z. B. Müller-Krames: „Konstruktive Behandlung der Regelflächen", Leipzig u. Wien 1931, Seite 174 ff.

8) Diese kubischen Hyperzykel sind (auf ∞^1 Arten) Reflexionsantikaustiken (je) einer Parabel für Parallelbeleuchtung, d. h. sie können (auf ∞^1 Arten) dadurch erzeugt werden, daß an allen Tangenten einer Parabel eine feste orientierte Gerade, die nicht zur Scheiteltangente parallel sein darf, gespiegelt wird. Vgl. E. Laguerre: „Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole les rayons incidents étant parallèles", Oeuvres II, pg 636.

9) Vgl. W. Blaschke: „Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene", Monatshefte f. Math. u. Physik 21 (1910), Seite 3 ff.

10) Vgl. insbesondere E. Laguerre: „Sur les courbes de direction de la troisième classe", Oeuvres II, pg 660.

Digitized by Google

Kongruenz P_1^1 solche Aussagen, die ungeändert bleiben bei beliebigen Kollineationen von P_1^1 in sich.

Es gilt:

Jede Cayleysche Fläche $\mathfrak{F}^3$ ist bestimmt durch fünf Strahlen der sie tragenden parabolischen Kongruenz P_1^1; in einer vorgegebenen Kongruenz P_1^1 liegen ∞^5 Cayleysche Flächen.

Je zwei solcher Flächen $\mathfrak{F}^3$ haben, abgesehen von der Leitlinie, vier Strahlen von P_1^1 miteinander gemein.

Jede $\mathfrak{F}^3$ hat mit jeder Regelfläche zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$ von P_1^1 drei und mit jedem Strahlenbüschel von P_1^1 einen Strahl gemein.

Den konstruktiven Aufbau einer Cayleyschen Fläche $\mathfrak{F}^3$ aus drei Regelflächen $\mathfrak{R}_\lambda^2$ von P_1^1 gestattet

Satz I: *Liegen in einer parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 drei einscharig in ihr enthaltene Regelflächen zweiten Grades $\mathfrak{R}_\lambda^2$ ($\lambda = 1, 2, 3$) durch einen Strahl s vor und wird in jedem Strahlenbüschel φ von P_1^1 zu den drei Strahlen, welche die $\mathfrak{R}_\lambda^2$ in φ besitzen, derjenige vierte Strahl konstruiert, der mit den anderen drei ein gegebenes festes Doppelverhältnis D bildet, so ergeben diese vierten Strahlen eine Cayleysche Regelfläche $\mathfrak{F}^3$, der auch der den $\mathfrak{R}_\lambda^2$ gemeinsame Strahl s angehört. Außerdem besitzt $\mathfrak{F}^3$ drei Geraden, die je zweien der $\mathfrak{R}_\lambda^2$ gemeinsam sind.*

Oder auch

Satz Ia: *Sind in einer parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 s_0, s_1, s_2, s_3 vier Strahlen einer Cayleyschen Regelfläche $\mathfrak{F}^3$ und $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$, $\mathfrak{R}_3^2$ die drei Regelflächen zweiten Grades durch s_0 und je zwei der drei anderen Strahlen, so ist in jedem Strahlenbüschel von P_1^1 das Doppelverhältnis, das die vier den Flächen $\mathfrak{F}^3$, $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$, $\mathfrak{R}_3^2$ angehörenden Strahlen bilden, konstant.*

Der Beweis dieses Satzes folgt auf Grund der benutzten Abbildung aus dem Théorème II von Laguerre (Anm. 10).

Wenn die drei Ausgangsflächen $\mathfrak{R}_\lambda^2$ nicht durch einen Strahl von P_1^1 gehen, ergibt sich bei dieser Konstruktion eine Regelfläche vierten Grades von P_1^1.

Weiterhin gilt

Satz II: *Sind r_1, r_2; s_1, s_2 zwei gegebene Strahlenpaare und t ein beliebiger Strahl einer Cayleyschen Fläche $\mathfrak{F}^3$ und werden in der diese tragenden parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 die beiden Regelflächen zweiten Grades $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ durch die Strahlen r_1, r_2, t und s_1, s_2, t gelegt, so gehören die zweiten Strahlen, die $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ außer t gemein haben, alle einem Strahlenbüschel von P_1^1 an.*

Die Richtigkeit des Satzes folgt aus Théorème I, Anm. 10.

Digitized by Google

Der Satz II gibt eine für die Cayleysche Fläche charakteristische Bindung für sechs gegebene ihrer Strahlen wieder. Der Sachverhalt läßt sich auch folgendermaßen ausdrücken:

Satz IIa: *Sind in einer parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 zwei Strahlenpaare r_1, r_2 und s_1, s_2 und ein Strahlenbüschel φ gegeben, so lassen sich durch jeden Strahl aus φ und die gegebenen Strahlenpaare zwei Regelflächen zweiten Grades legen, die noch einen zweiten Strahl t gemein haben. Alle diese Strahlen t liegen auf einer Cayleyschen Regelfläche durch r_1, r_2 und s_1, s_2.*

Indem bei dieser Konstruktion jeder Strahlenbüschel φ von P_1^1 benutzt wird, ergeben sich die ∞^1 Cayleyschen Regelflächen durch vier Strahlen von P_1^1. Diese einstufige Mannigfaltigkeit wird als $\mathfrak{F}^3$-Büschel bezeichnet; er ist durch zwei ihm angehörende Flächen bestimmt.

Satz III: *Jeder $\mathfrak{F}^3$-Büschel durch vier Strahlen t_i von P_1^1 enthält vier je in eine Regelfläche zweiten Grades und einen Strahlenbüschel zerfallene Cayleysche Flächen, nämlich diejenigen vier, die aus der Regelfläche zweiten Grades durch drei der Strahlen t_i und dem durch den vierten Strahl bestimmten Strahlenbüschel bestehen.*

Für die $\mathfrak{F}^3$ berührenden $\mathfrak{R}^2$ gilt

Satz IV: *In der parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 gibt es durch jeden gegebenen Strahl drei Regelflächen zweiten Grades, die eine in P_1^1 enthaltene Cayleysche Fläche $\mathfrak{F}^3$ berühren. Die drei Berührungsstrahlen und der Ausgangsstrahl liegen wieder auf einer Regelfläche zweiten Grades von P_1^1.*

Dieser Satz wird auf Grund der benutzten Zuordnung aus der Bemerkung (14) von Laguerre (Anm. 10) gefolgert.

Die Cayleysche Fläche ist außer den Ebenen, Kegeln, Flächen zweiten Grades und Tangentenflächen der kubischen Raumkurven die einzige Fläche, die mehr als ∞^2 Kollineationen in sich gestattet[11]; jede Cayleysche Fläche $\mathfrak{F}^3$ besitzt nämlich ∞^3 automorphe Kollineationen. Auf diejenigen dieser Transformationen[12], die zugleich die die $\mathfrak{F}^3$ tragende lineare Kongruenz P_1^1 fest lassen, bezieht sich

Satz V: *Jede Cayleysche Regelfläche $\mathfrak{F}^3$ gestattet und bestimmt in*

11) Vgl. S. Lie, Math. Ann. 24, 1884, Seite 545.

12) Die zugehörigen Untersuchungen für die kubischen Hyperzykel finden sich bei W. Blaschke, Anm. 9, Seite 46.

Vgl. auch die allgemeinen Sätze über parabolische Netzflächen bei H. Mohrmann: „Über die Haupttangentenkurven auf den Netzflächen", Math. Ann. 73, 1913, Seite 571.

Digitized by Google

ler sie tragenden parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 eine eingliedrige remischte Untergruppe aus (Γ_6, X_6) und eine zweigliedrige Untergruppe us A_1 von bezüglich $\mathfrak{F}^3$ automorphen Kollineationen. Unter diesen Transformationen ist keine involutorische Transformation des III. Typus nthalten.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die hier entwickelte Abildung der parabolischen linearen Kongruenz der Erweiterung auf eliebige (hyperbolische oder elliptische) Kongruenzen fähig ist. Der Typ der Kongruenz findet dabei seinen Ausdruck in der Metrik der Speerebene, derart, daß die Strahlen einer hyperbolischen, parabolischen, elliptischen linearen Kongruenz zugeordnet werden den Speeren einer Ebene mit hyperbolischer, euklidischer, lliptischer Metrik. Der Aufbau dieser Abbildung würde hier jeloch zu weit führen.

Digitized by Google

Über eine Gruppe von Parabelsätzen [1]).

Von Ulrich Graf und Rudolf Kahlau in Berlin.

In den folgenden Bemerkungen sollen eine Reihe von Parabelsätzen, wie sie z. B. im Schulunterricht als Aufgaben und Übungsmaterial der analytischen Geometrie vorkommen können, von einem verallgemeinernden Standpunkt aus betrachtet werden, so daß sich die sonst so vielgestaltigen Aussagen und Sätze von einem Blickpunkt aus gleichzeitig erkennen lassen.

Ähnlich wie sich die Kreisgeometrie in der Ebene mit Hilfe der üblichen stereographischen Projektion als Kreisgeometrie auf der Kugel deuten läßt, sollen Parabelkonfigurationen in der Ebene mit Hilfe einer stereographischen Projektion als Konfigurationen von Ebenen im Raume gedeutet werden. Die diese Abbildung vermittelnde Fläche 2. Ordnung wird demgemäß als Zylinder gewählt, der auf der Grundebene aufliegt. Alle Parabeln, deren Symmetrieachsen der Berührungsmantellinie des Zylinders parallel sind, werden somit stereographisch auf Ellipsen des Zylinders bezogen; der allen Parabeln gemeinsame uneigentliche Punkt geht in den auf der höchsten Mantellinie des Zylinders gelegenen Ellipsenpunkt über (siehe Figur). Durch die Betrachtung von Konfigurationen am Zylinder ergeben sich umgekehrt auf Grund des Projektionsvorganges Aussagen über die Parabeln in der Grundebene. Auf gleichartigem Wege ließen sich durch stereographische Projektion eines Strahlenhyperboloides Sätze über Hyperbeln in der Ebene folgern.

Je nachdem die in Betracht gezogenen räumlichen Sätze für allgemeine (z. B. Kugel und Strahlenhyperboloid) und singuläre (wie den Zylinder) oder nur für singuläre Flächen 2. Ordnung $\mathfrak{F}^2$ gelten, enthalten die auf Grund einer stereographischen Abbildung gefolgerten Sätze der Ebene Aussagen über Kreise, Parabeln derselben Achsenrichtung und Hyperbeln derselben Asymptotenrichtungen, oder sie sind charakteristisch für Parabeln [2]). Die

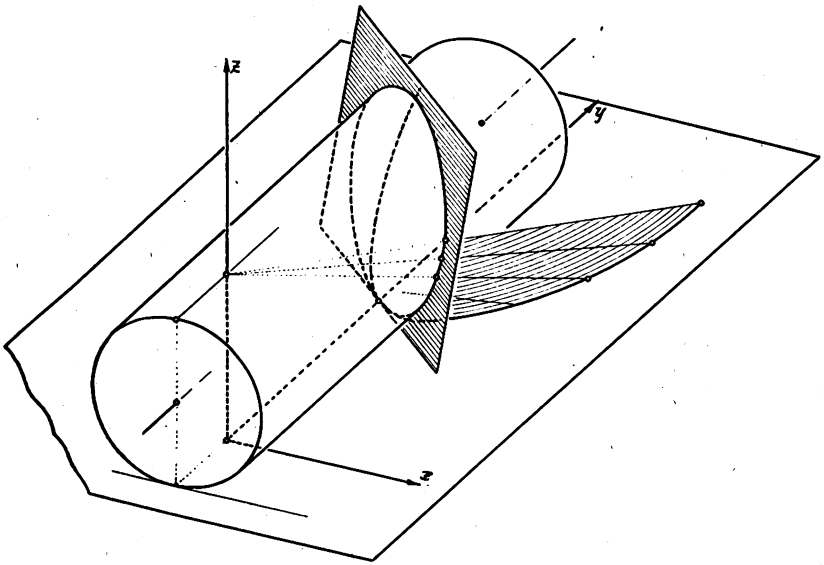
1) Vorgetragen von Herrn Kahlau in der 307. Sitzung am 23. Januar 1935.

2) In projektiver Verallgemeinerung sind derartige Sätze gültig für Kegelschnitte durch zwei gemeinsame (konjugiert imaginäre, zusammenfallende, reell verschiedene) Punkte. Für die rechnerische Behandlung erweist es sich als vorteilhaft, diese Punkte auf die uneigentliche Gerade zu legen.

Digitized by Google

Gruppe der automorphen Kollineationen der stereographischen Bezugsfläche $\mathfrak{F}^2$ ist holoedrisch isomorph der Gruppe der Kreis-, Parabel- oder Hyperbelverwandtschaften, je nachdem $\mathfrak{F}^2$ eine Kugel, ein Zylinder oder ein Strahlenhyperboloid ist. Einer Invarianz der räumlichen Tatsachen gegenüber den automorphen Kollineationen von $\mathfrak{F}^2$ entspricht daher eine Invarianz der aufzustellenden Sätze gegenüber diesen Kegelschnittverwandtschaften in der Grundebene.

Im folgenden soll das Übertragungsprinzip für den Fall von Parabelsätzen an zwei Beispielen gezeigt werden, und zwar einerseits an einem Satz, der auch für Kreise und Hyperbeln gleicher Asymptotenrichtungen gilt, und anderseits an einem Satz, der für die Parabel charakteristisch ist [3]).



Stereographische Projektion des Zylinders.

Den Ausgangspunkt bildet die Figur von acht assoziierten Punkten auf $\mathfrak{F}^2$ [4]). Liegen vier solcher Punkte in einer Ebene, so gehören auch die anderen vier einer Ebene an. Auf Grund der stereographischen Projektion folgt daher

3) Unter Parabeln werden hier und im folgenden stets Parabeln gleicher Achsenrichtung verstanden, die der Berührungsmantellinie des benutzten Zylinders parallel ist.

4) Das sind die acht Grundpunkte eines Bündels von Flächen 2. Ordnung, dem $\mathfrak{F}^2$ angehört.

Digitized by Google

Satz 1: *Gehören in einer Folge von vier Parabeln vier Punkte aus verschiedenen Schnittpunktepaaren einer Parabel an, so liegen auch die übrigen vier auf einer Parabel.*

Während dieser Satz, wie aus seiner Ableitung hervorgeht, genau so für Kreise und Hyperbeln gleicher Asymptotenrichtungen gilt[5]), ist die folgende Aussage für Parabeln charakteristisch, da der entsprechende räumliche Satz nur auf singulären Flächen 2. Ordnung gilt.

Satz 2: *Berühren vier Parabeln einander in zyklischer Folge, so liegen die vier Berührungspunkte stets wieder auf einer Parabel.*

Den beiden hier als Beispiele angeführten Sätzen lassen sich nach dem gleichen Prinzip eine große Anzahl ähnlicher an die Seite stellen[6]). Ferner folgt aus der stereographischen Projektion, daß für den Fall der Inzidenz von Ellipse und Projektionszentrum S die stereographischen Bilder Geraden werden; infolgedessen kann in allen abgeleiteten Sätzen „Parabel" sinngemäß durch „Gerade" ersetzt werden.

Wenngleich für den Schüler die hier zu Grunde gelegten Tatsachen als zu schwierig angesehen werden müssen, so ergibt sich doch für den Lehrer gerade auf Grund dieser Spezialisierung die Möglichkeit, mit Hilfe eines derartigen Überblickes, der ein Beispiel für die Anwendung räumlicher Betrachtungen auf die Geometrie der Ebene ist, Aufgaben der verschiedensten Schwierigkeitsgrade zu entwerfen und sie im Unterrichte der analytischen Geometrie zu behandeln.

5) Für Kreise stammt dieser Satz von A. Miquel, J. math. p. appl. 9, Paris 1844, p. 23.

6) Eine Zusammenstellung solcher räumlichen Sätze findet sich bei E. Müller: „Einige Gruppen von Sätzen über orientierte Kreise", Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. 21, 1911, S. 168 ... 192, wo diese räumlichen Tatsachen mit Hilfe der zyklographischen Projektion zur Aufstellung von Sätzen über Zykelkonfigurationen der Laguerreschen Geometrie benutzt werden.

Digitized by Google

Bemerkungen im Anschluß an die Lalandesche Sonnenuhr[1]).

Von Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

1. Der Astronom Josèphe Jérôme de Lalande (1732 bis 1807) erfand in noch jüngeren Jahren eine Sonnenuhr von ungewöhnlicher Art[2]). Auf dem waagerechten Rasen seines Gartens sah man eine Ellipse, deren Nebenachse nach Norden gerichtet war. Die Ellipse trug ringsherum eine Skala der 24 Stunden von Tag und Nacht. Auf der Nebenachse befand sich eine zweite Skala, die fürs Datum. Wenn nun Lalande an einem sonnigen Tag Besuch bekam, veranlaßte er seinen Gast, sich auf der zum Datum gehörigen Stelle der Nebenachse aufzupflanzen. Der Gast sah dann, wie sein eigner Schlagschatten gerade diejenige Stelle der Ellipse überdeckte, an der man die Tagesstunde ablesen konnte, selbstverständlich wie bei allen Sonnenuhren die Sonnenzeit, nicht die bürgerliche Zeit. Die Ablesung war natürlich um so genauer, je dünner der Gast war.

Sonst baut man Sonnenuhren bekanntlich ganz anders. Man benutzt als Schattenwerfer oder Weiser einen zur Erdachse parallelen festen Stab, weil der an allen Tagen des Jahres zur selben Stunde seinen Schatten in dieselbe Richtung wirft. Das folgt daraus, daß sich die Erde täglich einmal gleichförmig um ihre Achse dreht.

Vielleicht ist es nicht überflüssig, bei dieser Gelegenheit einmal davon zu sprechen, daß man im Altertum und Mittelalter Sonnenuhren nicht so wie jetzt bauen konnte. Der Grund lag darin, daß man die Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang in 12 Stunden zerlegte, deren Länge daher im Laufe des Jahres veränderlich war. Diese sogen. babylonische Zeitmessung war für die Völker des Morgenlandes und Mittelmeeres einigermaßen erträglich, weil

1) Vorgetragen in der 309. Sitzung am 27. März 1935.

2) Ich lernte diese Sonnenuhr kennen aus zwei Aufsätzen in Zeitschriften für die Jugend: „Sonnenuhren“ im Guten Kameraden, 31. Jhrgg. 1917, S. 532/3, und „Allerlei über Sonnenuhren“ von Riem im Neuen Deutschen Jugendfreund, 71. Jhrgg. o. J., S. 405—408. Ich möchte glauben, daß auch der erste Artikel von Riem herstamme, wenn nicht in ihm 1755, dagegen im zweiten 1760 als Jahr der Erfindung genannt wäre.

Digitized by Google

im Süden die Tageslänge nicht so großen Schwankungen ausgesetzt ist wie bei uns, und auch, weil es nicht so sehr auf Pünktlichkeit ankam. Wie gesagt, wirft ein zur Erdachse paralleler Weiser seinen Schatten bei unsrer Zeitmessung alltäglich zur selben Stunde in dieselbe Richtung; nur die Länge des Schattens ändert sich. Anders gesagt: Der Schatten, den ein einzelner Punkt, z. B. der Endpunkt des Weisers, alltäglich zur selben Stunde auf die Grundebene wirft, hat als geometrischen Ort eine Gerade, die vom Einsteckpunkte des Weisers ausgeht. Wenn man dagegen alltäglich zur selben babylonischen Stunde beobachtet, ergibt sich als geometrischer Ort eine algebraische Kurve höherer Ordnung, die allerdings für das in Betracht kommende Stück nicht viel von einer Geraden abweicht. Man behalf sich also damit, daß man nicht einen Stab, sondern einen einzelnen Punkt, etwa die Spitze eines Obelisken, Schatten werfen ließ. Man beobachtete die geometrischen Örter des Schattens und zog sie angenähert als gerade Linien aus. Erst die mechanischen Uhren mit Räderwerk bedingten eine das ganze Jahr hindurch gleichbleibende Stundenlänge. Man begann jedoch leider die Stundenzählung mit dem Sonnenuntergange, weshalb beständiges Nachregulieren nötig war. Erst als man vernünftiger Weise die Stundenzählung von Mittag oder Mitternacht an begann, war der Weg frei für die Sonnenuhren von heute.

Aber den Sonnenuhren ist es dann doch schlecht gegangen: Gerade als es endlich möglich geworden war, sie sehr einfach und doch sehr genau herzustellen, waren sie entbehrlich geworden, weil die mechanischen Uhren immer handlicher und wohlfeiler geworden waren und zudem auch bei schlechtem Wetter, ja auch nachts nicht versagten.

2. Nun aber zurück zur Lalandeschen Sonnenuhr! Ihr Weiser ist nicht parallel zur Erdachse, sondern ein lotrechter Stab (roh ersetzt durch jenen dünnen Gast). Die Richtung des Schattens, den ein lotrechter Stab auf die Grundebene wirft, wird nicht nur von der Tagesstunde, sondern auch vom Datum bedingt. Mit x sei die Tagesstunde bezeichnet, d. h. die Anzahl der seit Mitternacht vergangenen Stunden. Das Datum werde gemessen durch die Anzahl y der Tage seit Neujahr. Schließlich sei z der Tangens des Winkels, den der Schlagschatten des lotrechten Stabes mit der Richtung nach Norden bildet. Alsdann ist z eine gewisse Funktion der beiden Veränderlichen x und y.

Diesem Umstande trug Lalande dadurch Rechnung, daß er den Stab nicht festmachte, sondern je nach dem Datum längs der

Digitized by Google

Nebenachse der Ellipse hin und her wandern ließ. Daß man damit auskommen kann, muß zunächst stutzig machen. Denn im allgemeinen ist es keineswegs möglich, eine von zwei Veränderlichen x und y abhängige Richtung so bequem dadurch zu gewinnen, daß man den zu x gehörigen Punkt einer gewissen Skala mit dem zu y gehörigen Punkt einer gewissen andern Skala geradlinig verbindet. Vielmehr wird das nur für Funktionen z von besonderer Art möglich sein. Dies kann man leicht ganz allgemein feststellen: Wir nehmen auf der Grundebene irgendzwei Kurven k_1 und k_2 als Träger von Skalen an. Die Abszissenachse gehe nach Norden. Da die Kurve k_1 die x-Skala tragen soll, hat man unter den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ der Punkte von k_1 Funktionen von x zu verstehen. Entsprechend sind die Koordinaten $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_2$ der Punkte von k_2 als Funktionen von y aufzufassen. Wir schreiben also:

$$\mathfrak{x}_1 = u(x), \quad \mathfrak{y}_1 = v(x) \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_2 = \varphi(y), \quad \mathfrak{y}_2 = \psi(y).$$

Die Gerade vom Punkt (x) von k_1 nach dem Punkt (y) von k_2 bildet mit der Abszissenachse einen Winkel, dessen Tangens ist:

$$z = \frac{\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2}{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2} = \frac{v(x) - \psi(y)}{u(x) - \varphi(y)}.$$

Eine Sonnenuhr im Lalandeschen Sinn ist somit nur dann möglich, wenn der Tangens z der Schattenrichtung eine Funktion von dieser besonderen Art ist.

Wir werden sogleich sehen, daß das in der Tat zutrifft. Vorher sei noch bemerkt, daß es ein wenig bequemer ist, das Datum y nicht seit Neujahr, sondern seit der Frühlingsnachtgleiche zu zählen. Ferner bedeute β unsere geographische Breite, und ε sei die Neigung der Ekliptik (rund $23^1/_2$ Grad). Man kann dann für jede Stunde x und für jedes Datum y den Tangens z der Schattenrichtung berechnen nach der Formel:

$$z = \frac{\sin\frac{\pi x}{12}\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon\sin^2\frac{2\pi y}{365}}}{\sin\beta\cos\frac{\pi x}{12}\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon\sin^2\frac{2\pi y}{365}} + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\frac{2\pi y}{365}},$$

auf deren Ableitung ich wohl nicht einzugehen brauche. Wenn man Zähler und Nenner mit der Quadratwurzel dividiert, sieht man, daß diese Funktion z die Form

$$z = \frac{v(x)}{u(x) - \varphi(y)}$$

Digitized by Google

bekommt und sich also wirklich der soeben gefundenen allgemeineren Form unterordnet. Da hier $\psi(y)$ gleich Null ist, befindet sich die y-Skala auf der nach Norden gehenden Abszissenachse. Wenn man auch die besonderen Formen beachtet, die die übrigen Funktionen hier haben, erkennt man, daß die x-Skala eine Ellipse ist, deren Nebenachse auf der Abszissenachse liegt. Man kommt also zur Lalandeschen Sonnenuhr. (Noch einfacher in Nr. 7.)

3. Hierdurch wurde meine Aufmerksamkeit auf die Funktionen von der besonderen Art

$$z = \frac{v(x)-\psi(y)}{u(x)-\varphi(y)}$$

gelenkt. Selbstverständlich ist es einerlei, ob da Differenzen oder Summen stehen. Schreiben wir daher lieber

$$z = \frac{v(x)+\psi(y)}{u(x)+\varphi(y)}. \tag{1}$$

Deutet man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten im Raum, so stellt (1) eine Fläche dar. *Wie kann man nun alle diese Flächen durch geometrische Eigenschaften kennzeichnen?*

Am nächsten liegt es, erst einmal die beiden Flächen

$$z = u(x)+\varphi(y) \qquad \text{und} \qquad z = v(x)+\psi(y)$$

ins Auge zu fassen. Das sind Schiebungsflächen. Die eine wie die andere geht hervor, wenn man eine in der xz-Ebene befindliche Kurve ohne Drehen verschiebt längs einer in der yz-Ebene befindlichen Kurve. Diese beiden Flächen werden also vollständig bestimmt durch zwei willkürlich in jenen Ebenen annehmbare Kurvenpaare; beliebige Flächenpunkte gehen aus den Kurvenpaaren einfach durch Parallelogramme hervor. Man könnte alsdann die Fläche (1) dadurch gewinnen, daß man von den zu einem beliebigen Koordinatenpaar x, y gehörigen Höhen z der beiden Schiebungsflächen das Verhältnis bildete und dies als z-Koordinate benutzte. Aber das ist ein Umweg; erwünscht ist eine Ableitung der Fläche (1) aus Kurven, die ihr selbst angehören.

Man wird diesen Weg einschlagen: Wir geben dem x etwa n Werte $x_1, x_2 \ldots x_n$ und auch dem y, also $y_1, y_2 \ldots y_n$. Dann liegen n^2 Wertepaare x_i, y_k vor. Zu jedem gehört nach (1) eine Höhe z, die entsprechend mit z_{ik} bezeichnet werde:

$$z_{ik} = \frac{v(x_i)+\psi(y_k)}{u(x_i)+\varphi(y_k)}.$$

Digitized by Google

Dadurch erhalten wir insgesamt n^2 Gleichungen:

$$z_{ik}\,u(x_i) - v(x_i) + z_{ik}\,\varphi(y_k) - \psi(y_k) = 0. \tag{2}$$

Sie sind linear und homogen in den $4n$ Größen:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x_1),\ u(x_2)\ldots u(x_n),\ v(x_1),\ v(x_2)\ldots v(x_n), \\ \varphi(y_1),\ \varphi(y_2)\ldots \varphi(y_n),\ \psi(y_1),\ \psi(y_2)\ldots \psi(y_n). \end{array}\right. \tag{3}$$

Da nun n^2 gleich $4n$ ist, wenn $n = 4$ gewählt wird, kann man aus den dann vorhandenen 16 Gleichungen alle Größen (3) eliminieren, so daß eine Gleichung hervorgeht, die nur die 16 Höhen z_{ik} enthält. Das erfordert jedoch die Ausrechnung einer 16-reihigen Determinante, was kein Vergnügen ist, wenn sie auch viele Nullen aufweist. Man muß auch darauf gefaßt sein, daß sich die Determinante identisch gleich Null herausstellen könnte, und dann hätte man eine große Arbeit vertan. Vereinfachen wir also die Sachlage und nehmen wir n nur gleich 3 an. Dann liegen 9 Gleichungen in 12 Größen (3) vor. Man kann sich die Aufgabe stellen, 8 Größen zu eliminieren, etwa alle mit Ausnahme von

$$\varphi(y_1),\ \varphi(y_2),\ \psi(y_1),\ \psi(y_2).$$

Dies kommt wieder darauf hinaus, daß eine gewisse, jetzt aber nur 9-reihige Determinante ausgerechnet und gleich Null gesetzt werden muß. Das Ergebnis hat die folgende allgemeine Gestalt:

$$A[\varphi(y_1) - \varphi(y_2)] - B[\psi(y_1) - \psi(y_2)] = 0,$$

worin A und B Ausdrücke in den 9 Höhen z_{ik} allein sind. Wenn nun vorerst bloß zur Abkürzung

$$\frac{\psi(y_1) - \psi(y_2)}{\varphi(y_1) - \varphi(y_2)} = c \tag{4}$$

gesetzt wird, sieht die Gleichung so aus:

$$A - cB = 0.$$

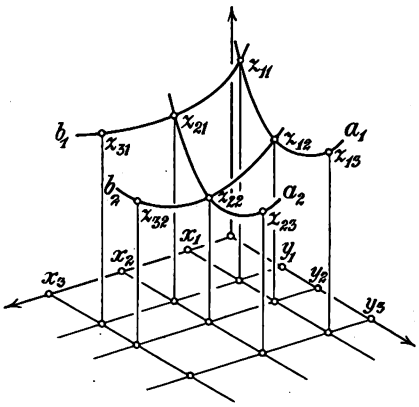
Ausführlich geschrieben lautet sie wie folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} (z_{22} - z_{21})(z_{32} - z_{31})(z_{33} - z_{23})(z_{13} - z_{12})(z_{11} - c) + \\ + (z_{32} - z_{31})(z_{12} - z_{11})(z_{13} - z_{33})(z_{23} - z_{22})(z_{21} - c) + \\ + (z_{12} - z_{11})(z_{22} - z_{21})(z_{23} - z_{13})(z_{33} - z_{32})(z_{31} - c) = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

4. Was bedeutet dies geometrisch? Ich will von der zunächst noch unbegründeten Annahme ausgehen, daß man einer Fläche von der Gattung (1) vorschreiben darf, daß sie zwei zur yz-Ebene par-

Digitized by Google

allele Ebenen und zwei zur xz-Ebene parallele Ebenen in beliebig wählbaren Kurven a_1, a_2 und b_1, b_2 schneide, siehe Figur 1. Die beiden ersten Ebenen mögen zu bestimmt angenommenen Abszissen x_1 und x_2 gehören, die beiden andern zu bestimmt angenommenen Ordinaten y_1 und y_2. Die vier Kurven haben vier Punkte gemein, deren Höhen z_{11}, z_{21}, z_{12}, z_{22} sind. Nun verstehen wir unter x_3 und y_3 *veränderliche* Koordinaten. Die zur yz-Ebene parallele Ebene mit der Abszisse x_3 schneidet die angenommenen Kurven b_1 und b_2 in Punkten, deren Höhen z_{31} und z_{32} sind. Ebenso schneidet die zur xz-Ebene parallele Ebene mit der Ordinate y_3 die angenommenen Kurven a_1 und a_2 in Punkten, deren Höhen z_{13} und z_{23} sind. Somit sind alle neun Höhen z_{ik} bekannt mit Ausnahme der Höhe z_{33}. Wenn nun auch c, jene nur von x_1, x_2, y_1, y_2 abhängige Größe (4), irgendwie bestimmt angenommen wird, enthält die Gleichung (5) als einzige Unbekannte die zu den beliebigen Koordinaten x_3 und y_3 gehörige Höhe z_{33} der Fläche. Man übersieht, daß sie eine rationale Funktion der übrigen acht Höhen z_{ik} und der Größe c ist. Mithin ist der zu x_3 und y_3 gehörige Punkt der Fläche eindeutig bestimmt.



Figur 1.

Nachträglich kann man leicht dartun, daß die Fläche mit den so konstruierbaren Punkten (x_3, y_3, z_{33}) in der Tat eine Fläche von der Gattung (1) ist. Denn die veränderlichen Koordinaten x_3 und y_3 kommen in (5) nur dort vor, wo Größen z_{ik} mit einem Index gleich 3 auftreten, d. h. z_{31} und z_{32} sind Funktionen von x_3 allein und z_{13} und z_{23} Funktionen von y_3 allein. Wenn man nun die Gleichung (5) nach z_{33} auflöst, erkennt man ohne Mühe, daß sich für z_{33} ein Bruch ergibt, dessen Zähler und Nenner Summen von Funktionen von x_3 allein und von y_3 allein sind, w. z. b. w. Hierdurch wird man auch darüber beruhigt, daß man der aus den 9 Gleichungen (2) nicht eliminierbaren Größe c einen beliebigen konstanten Wert geben darf. Noch mehr: Wenn man x_3 in x_1 oder x_2 oder auch y_3 in y_1 oder y_2 übergehen läßt, lehrt (5), daß die willkürlich angenommenen Kurven a_1, a_2, b_1, b_2 in der Tat der gefundenen Fläche angehören. Da c beliebig wählbar ist, hat sich also gezeigt, *daß durch die vier zu den Koordinatenebenen parallelen*

Digitized by Google

Kurven a_1, a_2, b_1, b_2, wie man sie auch wählen mag, stets einfach unendlichviele Flächen von der Gattung (1) *gehen.*

Über diese Flächenschar läßt sich noch etwas aussagen: Die linke Seite von (5) ist sowohl in z_{33} als auch in c linear. Erteilen wir also der Konstante c vier Werte, d. h. greifen wir vier der Flächen heraus, so gehören dazu vier Höhen z_{33}, die dasselbe Doppelverhältnis wie die vier Werte c haben. Daher: *Die einfach unendlichvielen Flächen von der Gattung* (1), *die durch die vier angenommenen Kurven a_1, a_2, b_1, b_2 gehen, schneiden auf allen zur z-Achse parallelen Geraden projektive Punktreihen aus.*

5. Hiermit kann man aber noch nicht zufrieden sein. Die in der Gleichung (5) vorkommenden Operationen lassen sich nach der Annahme jener vier Kurven a_1, a_2, b_1, b_2 allerdings zeichnerisch etwa in der Projektion auf die xz-Ebene oder auf die yz-Ebene) wiedergeben. Aber eine wirklich schöne Konstruktion fehlt noch. Nahe liegt es, die Doppelverhältnisse $(z_{1k}, z_{2k}, z_{3k}, c)$ und $(z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}, c)$ einzuführen. Doch bin ich auch dadurch noch nicht zu einer eleganten geometrischen Konstruktion gekommen. Nur Eines kann man noch allgemein bemerken: Weil in (5) nur Differenzen der Größen z_{ik} und c vorkommen, folgt: Hat man für den Fall $c = 0$ eine Konstruktion gefunden, so bekommt man daraus die Konstruktion für irgendeinen andern Wert von c, indem man die xy-Ebene um die Strecke c in der Richtung der z-Achse verschiebt.

Die Formel (5) drückt eine kennzeichnende Eigenschaft aller Flächen von der Gattung (1) aus und zwar eine Eigenschaft im Großen. Von da könnte man zu einer Eigenschaft im Kleinen, im Infinitesimalen, dadurch gelangen, daß man nach und nach die Grenzübergänge von x_1, x_2, x_3 zu einer einzigen Koordinate x und die von y_1, y_2, y_3 zu einer einzigen Koordinate y machte. Dabei sind natürlich Differentiationen erforderlich; mithin ist mehrfache Differenzierbarkeit der Funktionen in (1) vorauszusetzen, was bisher nicht notwendig war. Die Grenzübergänge werden zum Teil recht umständlich, weil öfters statt einmaliger zweimalige Differentiation nötig wird. Aber man kann so zu partiellen Differentialgleichungen gelangen, denen alle Funktionen von der Form (1) genügen, vorausgesetzt wie gesagt, daß hinreichend oftmalige Differentiation gestattet ist.

Ich will über meine Rechnungen in dieser Richtung nicht weiter sprechen, dagegen einen andern Weg gehen, auf dem man verhältnismäßig bequem zu der Einsicht kommt, *durch welche partielle Differentialgleichungen die Funktionen (1) gekennzeichnet werden können.*

Digitized by Google

6 [3]). Wir nehmen an, die in (1) vorkommenden Funktionen von x oder y seien hinreichend oft differenzierbar. Dann ergibt sich zunächst leicht:

$$\frac{z_{xx}}{z_x} = \frac{2u'z_x + u''z - v''}{u'z - v'}.$$

Daher ist zu fordern, daß z einer Bedingung genüge von der Form:

$$\frac{z_{xx}}{z_x} = \frac{2z_x + \alpha z - \gamma}{z - \beta}, \tag{6}$$

worin α, β, γ Funktionen von x allein sein sollen. Aber diese drei Funktionen sind nicht beliebig, vielmehr besteht zwischen ihnen die Beziehung:

$$\gamma = \alpha\beta + \beta'.$$

Mithin kann die Forderung (6) von γ befreit werden:

$$\frac{z_{xx}}{z_x} = \alpha + \frac{2z_x - \beta'}{z - \beta}. \tag{7}$$

Wir unterdrücken den einfachen Beweis für die Umkehrung: Eine Funktion z von x und y hat stets die Form (1), sobald sie einer Gleichung (7) genügt, in der α und β nur von x abhängen.

Durch Differentiation nach y wird die Bedingung (7) auch von α frei, und es kommt:

$$\frac{\partial^2 ln\, z_x}{\partial x\, \partial y} - \frac{2z_{xy}}{z - \beta} + \frac{(2z_x - \beta')z_y}{(z - \beta)^2} = 0.$$

Diese Gleichung wird etwas bequemer, wenn man $z - \beta$ als neue Funktion F einführt. Dann ergibt sich nach gehöriger Ordnung:

$$F_x = -z_x + 2\frac{\partial ln\, z_y}{\partial x} F - \frac{1}{z_y}\frac{\partial^2 ln\, z_x}{\partial x\, \partial y} F^2. \tag{8}$$

Nun darf man aber die Bedingung, daß β nur von x abhängt, nicht vergessen. Wegen $\beta = z - F$ besagt sie:

$$F_y = z_y. \tag{9}$$

Notwendig und hinreichend ist demnach, daß es eine Funktion F gebe, die den beiden Gleichungen (8) und (9) genügt.

Aber diese Gleichungen haben dann und nur dann eine gemeinsame Lösung F, wenn F auch die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

befriedigt. Rechnet man sie auf Grund von (8) und (9) aus und

3) Diese Nummer 6 wurde im Vortrag selbst nicht gebracht.

Digitized by Google

setzt man dann darin für F_y nach (9) den Wert z_y ein, so sondert sich der Faktor F einmal ab. Weil er nicht gleich Null ist (denn das wäre wegen $F = z - \beta$ trivial), darf er gestrichen werden. Daher ergibt sich schließlich eine Gleichung, aus der man F berechnen kann:

$$F = \frac{2\,\dfrac{\partial^2 ln\,\dfrac{z_y}{z_x}}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{z_y}\,\dfrac{\partial^2 ln\, z_x}{\partial x\,\partial y}\right)}. \tag{10}$$

Mithin hat z dann und nur dann die Form (1), wenn diese Funktion F den Gleichungen (8) und (9) genögt. Man übersieht, daß dann zwei Gleichungen hervorgehen, in denen die partiellen Ableitungen von z bis zur fünften Ordnung auftreten. Daher:

Damit eine Funktion z von x und y, der partielle Ableitungen bis zur fünften Ordnung zukommen, ein Quotient

$$z = \frac{v(x) + \psi(y)}{u(x) + \varphi(y)}$$

aus Summen von Funktionen von x allein und von y allein sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie gewissen zwei partiellen Differentialgleichungen fünfter Ordnung genüge.

Eine von diesen beiden Differentialgleichungen läßt sich noch verhältnismäßig kurz hinschreiben, nämlich diejenige, die durch Einsetzen von (10) in (9) hervorgeht:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2\,\dfrac{\partial^2 ln\,\dfrac{z_y}{z_x}}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{z_y}\,\dfrac{\partial^2 ln\, z_x}{\partial x\,\partial y}\right)} - z\right] = 0. \tag{11}$$

Die andere dagegen wird ziemlich umständlich. Aber wir brauchen sie nicht zu berechnen. Denn von vornherein ist klar, daß das System der beiden partiellen Differentialgleichungen ungeändert bleiben muß, wenn man x mit y vertauscht. Deshalb muß auch diejenige Gleichung bestehen, die aus (11) durch dieselbe Vertauschung hervorgeht:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2\,\dfrac{\partial^2 ln\,\dfrac{z_x}{z_y}}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{z_x}\,\dfrac{\partial^2 ln\, z_y}{\partial x\,\partial y}\right)} - z\right] = 0. \tag{12}$$

Digitized by Google

Mithin muß sich die vorhin erwähnte umständliche Gleichung mit Rücksicht auf (11) auf die Form (12) bringen lassen. Dieser Schluß würde nur dann nicht gelten, wenn (12) dieselbe Gleichung wie (11) wäre. Daß das nicht sein kann, sieht man daran, daß in (11) häufiger nach y und in (12) häufiger nach x differenziert wird. Somit ergibt sich:

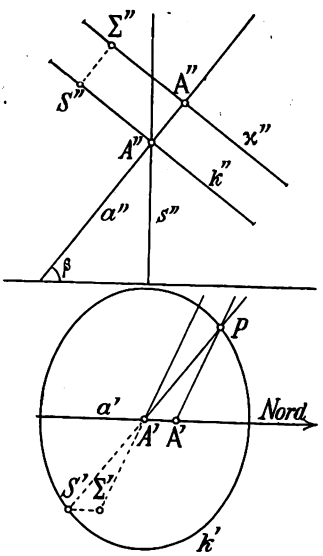
Diejenigen Funktionen z von x und y, denen die allgemeine Form

$$z = \frac{v(x)+\psi(y)}{u(x)+\varphi(y)}$$

zukommt, sind, falls sie partielle Ableitungen bis zur fünften Ordnung haben, die gemeinsamen Lösungen der beiden partiellen Differentialgleichungen fünfter Ordnung (11) *und* (12).

7. Die Lalandesche Sonnenuhr ist Schuld an den langwierigen Rechnungen, die in den vorhergehenden Nummern nur zum Teil wiedergegeben sind. Einen versöhnenden Abschluß bekommen unsere Betrachtungen, wenn noch gezeigt wird, *auf welch überaus einfachem Weg man ohne Rechnung zur Lalandeschen Sonnenuhr kommt*:

Man stelle auf die wagerechte Grundebene eine Aufrißebene in der Richtung nach Norden hin, so daß eine zur Erdachse parallele Gerade a im Grundriß als Parallele a' zur Projektionsachse erscheint und im Aufriß als Gerade a'' unter dem Winkel β der geographischen Breite emporsteigt, siehe Figur 2. Auf a wird ein Punkt A angenommen. Diejenigen Sonnenstrahlen, die während eines Tages den Punkt A treffen, bilden bekanntlich einen Drehungskegel mit der Achse a, so daß man für jeden einzelnen Tag die Sonne durch einen Punkt ersetzen darf, der längs eines Kreises rotiert, dessen Drehungsachse a ist. Insbesondere artet der Kegel für den Tag der Frühlingsnachtgleiche in eine Ebene aus, d. h. für diesen Tag ist die Bahn der gedachten Sonne ein Kreis k, der A als Mitte hat. Dieser Kreis erscheint im Aufriß als eine zu a' senkrechte Strecke k'' und im Grundriß als eine Ellipse k', deren Nebenachse nach Norden geht. Zu irgendeiner bestimmten Stunde des Tages des Frühlingsanfanges ist irgendein Punkt S von k die gedachte Sonne. Nun stehe auf



Figur 2.

Digitized by Google

der Grundrißebene ein lotrechter Stab s durch A. Sein Schlagschatten auf der Grundebene liegt auf der Geraden von S' nach A' über A' hinaus und bedeckt daher den Gegenpunkt P von S' auf der Ellipse k'. Zur selben Stunde, aber an irgendeinem andern Tag[4]) muß man sich die Sonne an einer Stelle Σ denken, die aus S hervorgeht, wenn man den Kreis k längs a um eine gewisse Strecke verschiebt. Die Länge der Verschiebungsstrecke läßt sich nebenbei bemerkt aus dem gegebenen Datum leicht mit Hilfe der Neigung der Ekliptik ableiten. Der verschobene Kreis sei $\varkappa$, seine Mitte A. Offenbar ist dann im Grundrisse $S'\Sigma'$ parallel und gleich $A'\mathsf{A}'$. Der Schlagschatten des Stabes s liegt jetzt auf der Geraden von Σ' nach A' über A' hinaus. Wenn man nun aber den Stab s längs der Nebenachse der Ellipse k' von A' bis A' wandern läßt, wobei sich ja die Richtung seines Schattens nicht ändert, da der Stab immer lotrecht bleiben soll, fällt der Schlagschatten auf die Parallele zu $\Sigma' A'$ durch A'[5]). Man sieht sofort, daß diese Parallele durch den Gegenpunkt P von A' geht. Somit verdeckt der Schatten des entsprechend dem Datum längs der Nebenachse der Ellipse k' wandernden Stabes an allen Tagen des Jahres zur selben Stunde denselben Punkt P der Ellipse. Dies aber ist das Wesen der Lalandeschen Sonnenuhr. *Die Ellipse dieser Sonnenuhr ist also die senkrechte Projektion eines Kreises, dessen Ebene zur Äquatorebene parallel liegt.* Das Beiwerk, die Bestimmung der Schritte des Wanderns von s längs der Nebenachse, mag man sich selbst überlegen.

Man könnte meinen, daß Lalande auf diesem Weg zu seiner Sonnenuhr gekommen wäre. Allerdings macht ein Umstand das doch zweifelhaft: Nachträglich fand ich, daß auch Joh. Heinrich Lambert (1728—1777) die Sonnenuhr in seinen „*Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik*“, 2. Teil, Berlin 1770, S. 314—322, gefunden hat und zwar auf einem anderen Weg unter Benutzung der Brennpunkte der Ellipse. Möglicherweise hat es Lalande so wie er gemacht. Übrigens nennt Lambert seinen Vorgänger nicht, aber er sagt einleitend, er müsse es dahingestellt sein lassen, ob das, was er vorbringe, neu sei.

4) In unserer Figur 2, die sich auf die geographische Breite von Berlin bezieht (β gleich rund 52 Grad) und auf 9 Uhr morgens, ist es der Junianfang.

5) Man könnte durch die Figur dazu verleitet werden, zu glauben, daß der Schatten des verschobenen Stabes s längs der Geraden $\Sigma'\mathsf{A}'$ falle. Die Punkte S und Σ sind jedoch nur Hilfssonnen, brauchbar für die Schatten des angenommenen Punktes A. Die wahre Sonne hat man sich unendlichfern zu denken, d. h. im Grundrisse kommen nicht die Punkte S' und Σ' in Betracht, sondern nur die Richtungen von S' bzw. Σ' nach A'.

Digitized by Google

Abbildung der Flächen 2. Ordnung auf lineare Ebenenkomplexe im $\mathfrak{R}_5$ [1].

Von E. A. Weiss in Bonn.

Bildet man die Geraden des r_8 in bekannter Weise auf die Punkte einer $\mathfrak{M}_4^2$ im $\mathfrak{R}_5$ ab, so entsprechen den beiden zu einer regulären Fläche 2. Ordnung gehörigen Bündeln von linearen Erzeugungskomplexen zwei in Bezug auf $\mathfrak{M}_4^2$ polare Ebenen. Bildet man dann weiter die Ebenen des $\mathfrak{R}_5$ dadurch, daß man ihre 20 Graßmannschen Koordinaten als homogene Punktkoordinaten deutet, auf Punkte im R_{19} ab, so erhält man eine Abbildung der Flächen 2. Ordnung des r_8 auf Punkte des R_{19}. Diese Abbildung ist für den Fall regulärer Flächen 2. Ordnung von C. Segre ausführlich behandelt worden [2]. Wir ergänzen hier die Segresche Untersuchung erstens durch die Abbildung der singulären Flächen und zweitens durch die Angabe einer neuen Konstruktion des regulären linearen Ebenenkomplexes.

Einem beliebigen Punkte des R_{19} entspricht im $\mathfrak{R}_5$ ein linearer Ebenenkomplex. Die Flächen 2. Ordnung werden daher durch die Segresche Abbildung mit den linearen Ebenenkomplexen des $\mathfrak{R}_5$ in Beziehung gebracht, und es ist daher notwendig, zunächst an die wichtigsten Eigenschaften dieser, ebenfalls von C. Segre [3] untersuchten Komplexe zu erinnern.

1. Ein *linearer Ebenenkomplex im* $\mathfrak{R}_5$ wird durch eine lineare Gleichung in Ebenenkoordinaten definiert. Es sind vom Standpunkte der projektiven Geometrie aus vier Arten solcher Komplexe zu unterscheiden:

---

1) Vorgelegt in der 310. Sitzung am 24. April 1935.

2) C. Segre, Sui complessi lineari di schiere rigate o regoli. Rend. Acc. dei Lincei **26**, 1917, S. 341. Sulla geometria delle schiere rigate o regoli, e in particolare sui complessi lineari di tali enti. Ann. di Mat. pura ed. appl. (3) **27**, 1918, S. 151.

3) C. Segre, Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni. Ann. di Mat. pura ed. appl. (3) **27**, 1918, S. 75. Vgl. auch die dort in No. 27 angegebenen Arbeiten von O. Landsberg, W. Reichel, R. Weitzenböck und E. Veneroni.

Digitized by Google

Der *höchstsinguläre Komplex* besteht aus den Treffebenen $\mathfrak{X}$ einer festen Ebene $\mathfrak{E}$:

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{E}'\mathfrak{E}''\mathfrak{X}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'') = 0. \tag{1}$$

Der *reguläre Komplex* besitzt zwei eindeutig bestimmte, verschiedene, windschiefe *Kernebenen* $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, mit deren Hilfe er sich in der Gestalt:

$$\xi_1(\mathfrak{E}\mathfrak{E}'\mathfrak{E}''\mathfrak{X}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'') + \xi_2(\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{F}''\mathfrak{X}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'') = 0 \tag{2}$$

darstellen läßt. Ein Büschel vom Typus (2), das von zwei höchstsingulären Komplexen aufgespannt wird, wollen wir ein *syzygetisches Büschel* nennen.

Für die *einfach-singulären Komplexe* fallen die beiden Kernebenen zusammen.

Der *zweifach-singuläre Ebenenkomplex* besitzt ∞^4 Paare (in einem Punkte inzidenter) Kernebenen.

Die Inzidenzbeziehung für zwei Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$:

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{E}'\mathfrak{E}''\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{F}'') = 0 \tag{3}$$

ist in den Koordinaten der beiden Ebenen alternierend. Deutet man die Komplexkoordinaten als Punktkoordinaten im R_{19}, so wird daher durch (3) ein Nullsystem (*das Nullsystem des* R_{10}) definiert. Zwei lineare Ebenenkomplexe, deren Bildpunkte in Bezug auf dieses Nullsystem konjugiert sind (d. h. ein Bildpunkt liegt in dem Null-R_{18} des anderen), heißen selbst *konjugiert*. Die höchstsingulären Komplexe, die zu einem festen Komplexe $\mathfrak{C}$ konjugiert sind, sind Treffebenenkomplexe von Ebenen, die dem Komplex $\mathfrak{C}$ angehören.

2. In Bezug auf die *Abbildung der Flächen 2. Ordnung* sind nun die Segreschen Resultate folgende:

Die $\mathfrak{M}_4^2$ enthält, den ∞^3 Punkten x und den ∞^3 Ebenen u des r_3 entsprechend ∞^3 erzeugende Ebenen 1. Art und ∞^3 erzeugende Ebenen 2. Art. Bei der Abbildung der Ebenen des $\mathfrak{R}_5$ auf Punkte des R_{19} wird diese $\mathfrak{M}_4^2$ als Ort ihrer erzeugenden Ebenen 1. und 2. Art auf zwei Mannigfaltigkeiten M_3^3 abgebildet, die in zwei zueinander windschiefen Räumen R_9 liegen. Die Punkte der einen M_3^3 entsprechen den Punkten, die Punkte der anderen M_3^3 den Ebenen des r_3. Wir unterscheiden daher die $M_3^3(x)$ im $R_9(x)$ von der $M_3^3(u)$ im $R_9(u)$. Die hier gewonnene Abbildung der Punkte und Ebenen des r_3 auf Punkte zweier M_3^3 ist identisch mit der, welche man erhält, wenn man die Koeffizienten der Gleichung einer Fläche 2. Klasse oder Ordnung als Punktkoordinaten im R_9 deutet. Die Punkte des $R_9(x)$ entsprechen also den Flächen

Digitized by Google

2. Klasse, die Punkte des $R_9(u)$ den Flächen 2. Ordnung des r_r. In dieser, zuerst von Th. Reye untersuchten Abbildung[4]) entsprechen den Flächen vom Range 4, 3, 2 oder 1 die Punkte allgemeiner Lage des betreffenden R_9, die Punkte einer gewissen M_3^4, einer M_6^{10} und der bereits genannten M_3^8.

Zwei Punkte der beiden R_9, die zueinander in Bezug auf das Nullsystem des R_{19} konjugiert sind, entsprechen Fläche 2. Ordnung und Fläche 2. Klasse, die zueinander apolar sind. Zwei beliebige Punkte ein- und desselben R_9 sind immer zueinander konjugiert: Im Nullsystem des R_{19} sind die beiden R_9 „vollständige Räume". Die Punkte der beiden R_9 sind daher Bilder von „Erzeugungskomplexen" 1. und 2. Art der $\mathfrak{M}_4^2$: Ein zu $R_9(x)$ gehöriger Erzeugungskomplex, Bild einer Fläche 2. Klasse f^2, enthält alle Ebenen 1. Art der $\mathfrak{M}_4^2$, dagegen nur ∞^2 Ebenen 2. Art, die Bildebenen der f^2 angehörigen Ebenen.

Einem Punkte allgemeiner Lage des $R_9(u)$, — einem solchen, der einer regulären Fläche 2. Ordnung entspricht — wird hiernach ein bestimmter Punkt des $R_9(x)$ zugeordnet: Zwei zugeordnete Punkte entsprechen ein und derselben f^2, die einmal als *Fläche 2. Ordnung*, das andere Mal als *Fläche 2. Klasse* erscheint. Die beiden Punkte spannen im R_{19} eine Gerade auf. Es handelt sich um die Bildgerade eines syzygetischen Büschels und die beiden Kernebenen dieses Büschels sind die Bildebenen, die die *Fläche als Linienort* darstellen.

Es sei jetzt K der Bildpunkt einer Fläche 2. Klasse k^2 im Raume $R_9(x)$. Die zu k^2 apolaren Flächen 2. Ordnung werden auf die zu K in Bezug auf das Nullsystem des R_{19} konjugierten Punkte F von $R_9(u)$ abgebildet. Da jeder Punkt von $R_9(x)$ zu K konjugiert ist, sind alle Punkte der Verbindungsgeraden eines Punktes F mit dem entsprechenden Punkte von $R_9(x)$ zu K konjugiert, insbesondere die beiden Punkte, die höchstsingulären Komplexen entsprechen. So gehören die Ebenen eines Erzeugungskomplexes paarweise als Paare in Bezug auf $\mathfrak{M}_4^2$ polarer Ebenen zusammen. Jedes Ebenenpaar ist, soweit es sich um ein Paar windschiefer Ebenen handelt, Bildebenenpaar einer regulären Fläche 2. Ordnung und Klasse, die zu der durch den Erzeugungskomplex dargestellten Fläche 2. Klasse apolar ist.

Soweit die Segreschen Resultate über die Abbildung der regulären Flächen 2. Ordnung.

---

4) Th. Reye, Über Systeme und Gewebe von Flächen 2. Grades, Crelles Journal 82, 1877, S. 54.

Digitized by Google

3. *Abbildung der singulären Flächen 2. Ordnung oder Klasse.* Bisher war vorausgesetzt worden, daß es sich im r_3 um reguläre Flächen, im $\mathfrak{R}_5$ um Paare windschiefer Ebenen und infolgedessen in jedem der beiden R_9 um Punkte allgemeiner Lage handele. Wir untersuchen jetzt die Sonderfälle.

a) *Flächen vom Range 3.* Ein Kegel 2. Ordnung des r_3 wird auf einen Punkt der M_3^4 des $R_9(u)$ abgebildet. Der doppeltgezählte Kegelscheitel liefert die zugehörige Fläche 2. Klasse. Sie wird auf einen Punkt von $M_3^3(x)$ abgebildet. Die Verbindungslinie der beiden Punkte berührt die M_9^{42}, Ort der Bildpunkte aller höchstsingulären Komplexe, im Punkte von $M_3^3(x)$. Das durch den Kegel bestimmte syzygetische Büschel enthält daher nur eine doppelt zu zählende Kernebene.

Satz 1. *Der einer Fläche 2. Ordnung (oder Klasse) vom Range 3 entsprechende Erzeugungskomplex ist einfach singulär mit einer erzeugenden Ebene 1. (oder 2.) Art von $\mathfrak{M}_4^2$ als doppelt-zählender Kernebene.*

b) *Flächen vom Range 2.* Die Ebenen eines Ebenenpaares im r_3 schneiden sich in einer Geraden. Um das interessante Bild des Ebenenpaares im R_{19} vollständig übersehen zu können, müssen wir zunächst das *Bild einer Geraden im R_{19}* untersuchen. Eine Gerade des r_3 wird auf einen Punkt $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{M}_4^2$ im $\mathfrak{R}_5$ abgebildet. Dieser Punkt bestimmt einen durch ihn hindurchlaufenden $\mathfrak{R}_4$, seinen Tangential-$\mathfrak{R}_4$. Wir betrachten die Mannigfaltigkeit aller durch den Punkt $\mathfrak{X}$ laufenden und in seinem Tangential-$\mathfrak{R}_4$ liegenden Ebenen. Diese Mannigfaltigkeit ist — im $\mathfrak{R}_4$ — dual zu der Mannigfaltigkeit aller Geraden, die in einem $\mathfrak{R}_3$ gelegen sind und wird daher auf eine auf M_9^{42} gelegene reguläre M_4^2 abgebildet. Eine solche M_4^2 spannt einen R_5 auf. Wir können diesen R_5 als Bild der Ausgangsgeraden im R_{19} ansehen.

Um die hiernach den ∞^4 Geraden des r_3 entsprechenden ∞^4 R_5 des R_{19} konstruieren zu können, bemerken wir, daß der Tangential-$\mathfrak{R}_4$ eines Punktes $\mathfrak{X}$ der $\mathfrak{M}_4^2$ die $\mathfrak{M}_4^2$ in einem Kegel $\mathfrak{M}_3^2$ schneidet, der ∞^1 erzeugende Ebenen 1. Art und ∞^1 erzeugende Ebenen 2. Art enthält. Die Figur dieses Kegels ist zur Figur einer regulären Fläche 2. Ordnung dual. Die auf dem Kegel gelegenen „Reguli“ von erzeugenden Ebenen 1. und 2. Art werden daher auf die beiden Kegelschnitte abgebildet, in denen zwei, zu M_4^2 polare Ebenen diese M_4^2 schneiden. Da die Ebenen des Kegels erzeugende Ebenen 1. und 2. Art der $\mathfrak{M}_4^2$ sind, handelt es sich um zwei auf $M_3^3(x)$ bzw. $M_3^3(u)$ gelegene Kegelschnitte.

Digitized by Google

Jeder der beiden Kegelschnitte spannt eine Ebene auf. Wir betrachten die von dem Kegelschnitt auf $M_3^8(u)$ aufgespannte Ebene. Die Punkte des Kegelschnittes stellen die durch die Gerade $\mathfrak{X}$ laufenden Doppelebenen des r_3 dar. Verbindet man im r_3 zwei Doppelebenen dieser Art, $(ax)^2 = 0$ und $(bx)^2 = 0$, durch ein Büschel von Flächen 2. Ordnung, so erhält man ein Büschel von Ebenenpaaren, die zu dem Paare a, b harmonisch liegen. Es sind daher die Punkte der von dem Kegelschnitt aufgespannten Ebene des $R_9(u)$ Punkte der Sehnenmannigfaltigkeit $M_6^{10}(u)$ der $M_3^8(u)$. Dual werden die auf der Geraden $\mathfrak{X}$ gelegenen Punktepaare auf die Punkte einer Ebene von $M_6^{10}(x)$ abgebildet. Diese beiden Ebenen spannen dann zusammen den gesuchten Bild-R_5 unserer Geraden auf.

Satz 2. *Eine Gerade von r_3 wird als Ort ihrer Doppelpunkte auf einen Kegelschnitt von $M_3^8(x)$, als Ort ihrer Doppelebenen auf einen Kegelschnitt von $M_3^8(u)$ abgebildet. Die beiden Kegelschnitte spannen je eine auf $M_6^{10}(x)$ bzw. $M_6^{10}(u)$ gelegene Ebene $E(x)$ bzw. $E(u)$ auf, Ort der Bildpunkte der auf der Geraden gelegenen Punkte- bzw. Ebenenpaare. Der Verbindungs-R_5 der beiden Ebenen schneidet M_9^{42} in einer regulären M_4^2, welche durch die beiden Kegelschnitte läuft. Die Ebenen $E(x)$ und $E(u)$ sind in Bezug auf diese M_4^2 polar.*

Nach diesen Vorbereitungen erkennen wir sofort, daß ein Ebenenpaar des r_3 auf einen zweifach singulären Ebenenkomplex abgebildet wird. Ein solcher Komplex ist in der Tat dadurch charakterisiert, daß sein Bildpunkt in einem R_5 liegt, der M_9^{42} in einer M_4^2 schneidet. Seine ∞^4 Kernebenenpaare werden auf die Punktepaare abgebildet, in denen die ∞^4 durch seinen Bildpunkt laufenden und im R_5 gelegenen Geraden die M_4^2 schneiden. Von diesen Geraden sind in unserem Falle zwei Systeme ausgezeichnet:

a) Durch den Bildpunkt A des Ebenenpaares $(ax).(bx) = 0$ läuft ein ebenes Büschel von Bisekanten des Kegelschnittes, in dem die durch A laufende erzeugende Ebene $E(u)$ von $M_6^{10}(u)$ die Mannigfaltigkeit $M_3^8(u)$ (und damit M_9^{42}) schneidet. Darunter befinden sich zwei Tangenten. Daher sind ∞^1 Kernebenenpaare des zum Ebenenpaare $(ax).(bx) = 0$ gehörigen linearen Ebenenkomplexes die auf $\mathfrak{M}_4^2$ gelegenen Bildebenenpaare der in r_3 zu a, b harmonischen Ebenenpaare (darunter die Bildebenen von a und b, jede doppelt gezählt).

b) Durch A läuft ein ausgezeichnetes Bündel von Bisekanten der M_4^2, das Bündel der Verbindungslinien des Punktes A mit den Punkten von $E(x)$. Darunter befinden sich, den Punkten des auf $E(x)$ gelegenen Kegelschnittes entsprechend, ∞^1 Tangenten an M_4^2.

Digitized by Google

Die den Berührungspunkten entsprechenden, doppeltzählenden Kernebenen sind die ∞^1 durch den Punkt $\mathfrak{X}$ laufenden erzeugenden Ebenen 1. Art.

Um die übrigen Kernebenenpaare angeben zu können, denken wir uns den Punkt A mit einem Punkte allgemeiner Lage P von $E(x)$, Bildpunkt eines auf $\mathfrak{X}$ gelegenen Punktepaares p, q verbunden. Der Polar-R_3 der Verbindungslinie AP in Bezug auf M_4^2 schneidet den Kegelschnitt von $E(u)$ in den Bildpunkten von a, b, den Kegelschnitt von $E(x)$ in den Bildpunkten von p, q. Daher sind insbesondere die Schnittpunkte dieser Verbindungslinie mit M_4^2 zugleich zu diesen vier Punkten in Bezug auf M_4^2 konjugiert. Konjugierten Punkten der M_4^2 entsprechen aber Ebenen, die sich längs einer Geraden schneiden. Die Schnittpunkte entsprechen daher den Ebenen, die einmal die Schnittgeraden der Bildebenen von a, p und b, q, das andere Mal die Schnittgeraden der Bildebenen von a, q und b, p verbinden. (Diese Figur ist dual zur Figur von zwei in Bezug auf eine reguläre Fläche 2. Ordnung polaren Geraden.) Da die Schnittpunkte der Geraden AP mit M_4^2 in keinem der beiden R_9 liegen, sind die Kernebenenpaare nicht Bilder von Flächen 2. Ordnung oder Klasse. Jedes Kernebenenpaar dieser Art ist vielmehr ein Paar in Bezug auf $\mathfrak{M}_4^2$ polarer Ebenen, von denen jede $\mathfrak{M}_4^2$ in einem Geradenpaare schneidet. Ein Geradenpaar der $\mathfrak{M}_4^2$ liefert im r_3 ein Paar verschränkter Geradenbüschel.

Die hier betrachteten ∞^2 Kernebenenpaare des zum Ebenenpaare a, b gehörigen linearen Ebenenkomplexes werden daher im r_3 auf die Paare verschränkter Geradenbüschel in den Ebenen a, b abgebildet, deren Scheitel zwei beliebige Punkte der Schnittgeraden von a, b sind.

Satz 3. *Ein Ebenenpaar a, b wird im $\mathfrak{R}_5$ auf einen zweifach singulären Ebenenkomplex abgebildet. Kernpunkt des Komplexes ist der auf $\mathfrak{M}_4^2$ gelegene Bildpunkt $\mathfrak{X}$ der singulären Geraden des Ebenenpaares. Von den ∞^4 Kernebenenpaaren des Komplexes bleiben nur die folgenden bei der Polarität an $\mathfrak{M}_4^2$ in Ruhe* (und sind daher hier allein von Interesse):

I. ∞^1 *Paare von erzeugenden Ebenen 2. Art von $\mathfrak{M}_4^2$ durch $\mathfrak{X}$.* (Bilder der Ebenenpaare in r_3, die zum Paare a, b harmonisch sind, darunter a, b doppelt gezählt.)

II. ∞^1 *erzeugende Ebenen 1. Art von $\mathfrak{M}_4^2$ durch $\mathfrak{X}$, jede doppelt gezählt.* (Bilder der auf der Geraden $\mathfrak{X}$ gelegenen Punkte.)
∞^2 *Paare in Bezug auf $\mathfrak{M}_4^2$ polarer Ebenen, von denen jede die Bildebenen von a und b längs einer Geraden schneidet.* (Bild-

Digitized by Google

ebenen der ∞^2 Paare verschränkter Geradenbüschel, die man dem Ebenenpaare einbeschreiben kann.)

c) *Flächen vom Range 1.* Diese Flächen werden auf höchstsinguläre lineare Ebenenkomplexe abgebildet.

Wir fassen das Ergebnis unserer Untersuchung in der folgenden Tabelle zusammen:

R_{19}	$\mathfrak{R}_5$	r_3
Punkt allg. Lage eines R_9	regulärer Ebenenkomplex	Fläche vom Range 4
Punkt allg. Lage einer M_3^4	einfach singulärer Ebenenkomplex	Fläche vom Range 3
Punkt allg. Lage einer M_6^{10}	zweifach singulärer Ebenenkomplex	Fläche vom Range 2
Punkt einer M_3^3	höchstsingulärer Ebenenkomplex	Fläche vom Range 1

4. *Eine Konstruktion des regulären linearen Ebenenkomplexes.* Die Überlegungen der vorigen Nummer gestatten es, Methoden für die Erzeugung der verschiedenen Arten von linearen Ebenenkomplexen abzuleiten. Wir beschränken uns auf die Angabe einer Erzeugung des regulären Komplexes.

Die Kernebenen eines Komplexes seien die in Bezug auf $\mathfrak{M}_4^2$ polaren Bildebenen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ einer regulären Fläche 2. Ordnung f^2. Diese Ebenen sind die Inzidenzgebiete einer involutorischen automorphen Kollineation der $\mathfrak{M}_4^2$, dem Bilde der mit f^2 im r_3 verbundenen Polarität. Wie im r_3 durch die Polarität jedem Punkte eine Polarebene zugeordnet wird, so wird im $\mathfrak{R}_5$ jeder Ebene 1. Art eine leicht konstruierbare Ebene 2. Art von $\mathfrak{M}_4^2$ zugeordnet. Einem Polartetraeder von f^2 entsprechend erhalten wir so auf $\mathfrak{M}_4^2$ „Polarquadrupel" 1. und 2. Art, jedes bestehend aus vier Ebenen 1. bzw. 2. Art, die paarweise „in Bezug auf die involutorische Kollineation konjugiert" sind (d. h. jede Ebene 1. Art eines Polarquadrupels schneidet die jeder anderen Ebene 1. Art des Quadrupels zugeordnete Ebene 2. Art und umgekehrt).

Man erhält nun alle Flächen 2. Ordnung, die zu einer vorgegebenen Fläche 2. Klasse apolar sind, indem man durch die Polartetraeder der Fläche 2. Klasse alle möglichen Flächen 2. Ordnung hindurchlegt. Übertragung in den $\mathfrak{R}_5$ liefert:

Satz 4. *Es seien zwei windschiefe, zueinander in Bezug auf eine reguläre $\mathfrak{M}_4^2$ polare Ebenen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ vorgegeben. Man konstruiere auf $\mathfrak{M}_4^2$ die zu $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ gehörigen Polarquadrupel aus erzeugenden Ebenen*

Digitized by Google

. Art (2. Art) und zu jedem Polarquadrupel die ∞^5 gemeinsamen Treffebenen. Der Ort aller dieser Ebenen ist ein regulärer linearer Ebenenkomplex. (Erzeugungskomplex 1. Art (2. Art) der $\mathfrak{M}_4^2$.)

Diese Konstruktion ist aus dem Grunde bemerkenswert, weil ie die Chaslessche Konstruktion des linearen Geradenkomplexes m r_3 verallgemeinert: Durch ein Paar polarer Geraden wird auf iner f^2 eine involutorische automorphe Kollineation bestimmt, die n jedem der beiden Erzeugendenreguli eine Involution hervorruft. Die Treffgeradenkongruenzen aller in einem der beiden Reguli enthaltenen Geradenpaare dieser Involution erzeugen einen regulären linearen Geradenkomplex (Erzeugungskomplex der f^2)[5]).

5) C. Segre hat a. a. O. eine andere Verallgemeinerung dieser Konstruktion angegeben. Bei ihm tritt an Stelle der $\mathfrak{M}_4^2$ eine $\mathfrak{M}_3^3$ als Analogon zur f^2. Vgl. E. A. Weiss, Über eine Invariante von vier Ebenen des R_5. Sitzber. der Berl. Math. Ges. 32, 1932, S. 17.

Digitized by Google

Über eine Klasse zweifach-unendlicher, durch Bewegung eines starren Geradenpaares erzeugter Systeme [1]).

Von H. Jonas.

Das im folgenden gelöste Problem führt auf einen Spezialfall derjenigen geometrischen Gebilde, die sich durch Zusammensetzung der asymptotischen Flächentransformationen an Hand des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes [2]) ergeben. Es sind das Paare aufeinander bezogener Strahlenkongruenzen von der Eigenschaft, daß auf den Strahlen g der einen je ∞^1 Punkte P, in projektiven Reihen angeordnet, und auf den Strahlen g' der anderen je ∞^1 Punkte P' derart bestimmt werden können, daß eine jede der Verbindungslinien PP' eine W-Kongruenz mit den Ortsflächen der Punkte P und P' als Brennflächen durchläuft. Um einen solchen, wie wir sagen wollen, *zusammengesetzten W-Verband* als Ganzes auf einmal entstehen zu lassen, kann man von einem konjugierten Kurvennetz besonderer Art ausgehen, das charakterisiert ist durch die Existenz von vier, durch eine Relation von der Form $\theta_1\theta_2 = \theta_3\theta_4$ verbundenen Integralen der zugehörigen, von den Punktkoordinaten erfüllten Laplaceschen Differentialgleichung. Der von einem festen Punkt O zu dem laufenden Punkt dieses *erzeugenden konjugierten Systems* gelegte Leitstrahl liefert dann die jeweilige Richtung des gemeinsamen Lotes zu g und g'; den Parametern entsprechen auf den beiden Scharen der Flächen (P) und (P') die Asymptotenlinien. Verweisen kann ich betreffs dieser allgemeinen Methode nur auf einen kurzen Abschnitt in einem früher gehaltenen Vortrag [3]). Nähere Ausführungen und Ergänzungen beabsichtige ich demnächst an anderer Stelle zu geben. Hier genüge die Bemerkung, daß in dem nachstehend behandelten Fall das erzeugende konjugierte System ein Orthogonalnetz der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt O ist. Die Untersuchung kann, unabhängig von einer Theorie der zusammengesetzten W-Verbände, auf eine

1) Vorgetragen in der 311. Sitzung am 29. Mai 1935.

2) Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale 2 (1903), S. 69 ff.

3) Jonas, Über die Transformation der konjugierten Systeme usw. Berl. Math. Ges. Ber. 14 (1915), S. 96; s. das. S. 106—108.

Digitized by Google

infache Fragestellung gegründet werden, wobei insbesondere die Korrespondenz der Asymptotenlinien auf den beteiligten Flächen nicht von vornherein gefordert wird. Das Ergebnis darf Interesse beanspruchen: es führt mitten hinein in die Theorie einer neuen, durch Vielseitigkeit der geometrischen Beziehungen ausgezeichneten Transformation, die eine Erweiterung der zwischen den Biegungsflächen des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids vermittelnden Bianchi-Transformation darstellt.

1. Als Ausgangspunkt diene uns die folgende Aufgabe: *Durch zweiparametrige Bewegung eines Paares starr gekoppelter windschiefer Geraden g, g' soll ein System Σ entstehen, der Bedingung genügend, daß sich die Lage der auf g bzw. g' beweglichen Punkte P und P', in Zahl mindestens je drei, für jede Stellung des Geradenpaares so wählen läßt, daß die Tangentialebene der von einem Punkte P beschriebenen Fläche (P) durch g' geht und die einer Fläche (P') die Gerade g enthält.* Es ist klar, daß dann eine jede der Verbindungslinien PP' gemeinschaftliche Tangente der betreffenden Flächen (P) und (P') wird.

Für ein Wertepaar der Variablen sei X die Richtung[4]) des gemeinsamen Lotes zu g und g'. Durch den Punkt X der Bildkugel (X) legen wir die zu g und g' parallelen Tangenten und bezeichnen mit $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ die Richtungen ihrer *Winkelhalbierenden*. Dabei sei das rechtwinklige Dreikant $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ gleichstimmig mit dem Dreikant x, y, z (oder z, x, y) der Koordinatenachsen, also die Determinante $(X, X^{(1)}, X^{(2)}) = +1$. Als Parameterlinien $\beta = \text{const}$ und $\alpha = \text{const}$ führen wir auf der Einheitskugel (X) das orthogonale Netz derjenigen Kurven ein, die $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ zu Tangentenrichtungen haben. Wird dementsprechend

$$\sum dX^2 = e\,d\alpha^2 + g\,d\beta^2, \tag{1}$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{e})_\beta, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{e}}(\sqrt{g})_\alpha \tag{2}$$

gesetzt, so gilt die Gaußsche Gleichung in der Form:

$$m_\beta + n_\alpha + \sqrt{e}\sqrt{g} = 0. \tag{3}$$

4) Ich schreibe: Richtung X, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus sind, entsprechend Punkt x, Fläche (x). Eine in x geschriebene Gleichung hat stets vektorielle Bedeutung und ist durch Hinzufügen der analogen Beziehungen in y und z zu ergänzen. Die Ableitungen nach den Variablen α und β werden durch Indizes bezeichnet.

Digitized by Google

Die Differentialrelationen für die Drehungen des Dreikants (X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$) lauten:

$$(4)\qquad \begin{cases} X_\alpha = \sqrt{e}\, X^{(1)}, & X_\beta = \sqrt{g}\, X^{(2)}, \\ X^{(1)}_\alpha = -mX^{(2)} - \sqrt{e}\, X, & X^{(1)}_\beta = nX^{(2)}, \\ X^{(2)}_\alpha = mX^{(1)}, & X^{(2)}_\beta = -nX^{(1)} - \sqrt{g}\, X. \end{cases}$$

Als *Scheitel* S des Geradenpaars g, g' [5]) bezeichnen wir die Mitte des Minimalabstandes. Für die Fläche $(S; \mathfrak{x})$ machen wir, indem wir die Fortschreitungen von S auf die bewegten Achsen projizieren, den Ansatz:

$$(5)\qquad \mathfrak{x}_\alpha = \mu X + \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)}, \qquad \mathfrak{x}_\beta = \nu X + \nu_1 X^{(1)} + \nu_2 X^{(2)}.$$

Die 6 Koeffizienten sind zunächst den Integrabilitätsbedingungen unterworfen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mu_\beta - \nu_\alpha = \sqrt{g}\, \mu_2 - \sqrt{e}\, \nu_1, \\ (\mu_1)_\beta - (\nu_1)_\alpha = n\mu_2 + m\nu_2 + \sqrt{e}\, \nu, \\ (\mu_2)_\beta - (\nu_2)_\alpha = -n\mu_1 - m\nu_1 - \sqrt{g}\, \mu. \end{cases}$$

Der konstante Winkel von g und g' sei 2σ. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(7)\qquad \cos\sigma = a, \qquad \sin\sigma = b. \qquad (a^2 + b^2 = 1)$$

Über die Längeneinheit wollen wir, was sich weiterhin als vorteilhaft erweist, so verfügen, daß der konstante Minimalabstand der Geraden $\sin 2\sigma = 2ab$ wird. Die Lage der ausgezeichneten Punkte P auf g und P' auf g' bestimmen wir durch die von den Fußpunkten des gemeinsamen Lotes aus gerechneten Abszissen t und t', gesuchten Funktionen der Parameter α, β. Danach ergibt sich für die von P und P' beschriebenen Flächen $(P; x)$ und $(P'; x')$ die Darstellung:

$$(8)\qquad \begin{cases} (P) & x = \mathfrak{x} - ab\, X + t\,(aX^{(1)} + bX^{(2)}), \\ (P') & x' = \mathfrak{x} + ab\, X + t'\,(aX^{(1)} - bX^{(2)}). \end{cases}$$

Für die durch P und g' bzw. durch P' und g gelegten Ebenen führen wir die Richtungsvektoren ξ und ξ' ihrer Normalen (Richtungskosinus proportional mit ξ, η, ζ und mit ξ', η', ζ') ein:

$$(9)\qquad \xi = tX + bX^{(1)} + aX^{(2)}, \qquad \xi' = t'X - bX^{(1)} + aX^{(2)}.$$

---

5) S wird in der Folge auch *Scheitel* eines bewegten gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids.

Digitized by Google

Wir bringen zum Ausdruck, daß ξ normal zur Fläche $(P; x)$, also $\sum \xi dx = 0$ sein soll, und finden mit Hilfe von (5) und (4) die Beziehungen:

$$10) \qquad t_\alpha = At^2 + Bt + C, \qquad t_\beta = \bar{A}t^2 + \bar{B}t + \bar{C},$$

in denen

$$11) \quad \begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{e}}{2b}, \quad B = \dfrac{(a^2 - b^2)\, m - \mu}{2ab}, \\ C = \dfrac{1}{2}\left(b\sqrt{e} - \dfrac{\mu_1}{a} - \dfrac{\mu_2}{b}\right), \\ \bar{A} = \dfrac{\sqrt{g}}{2a}, \quad \bar{B} = \dfrac{-(a^2 - b^2)\, n - \nu}{2ab} \\ \bar{C} = \dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{g} - \dfrac{\nu_1}{a} - \dfrac{\nu_2}{b}\right) \end{cases}$$

ist. Durch Gleichsetzen der beiden auf Grund von (10) berechneten Ausdrücke für $t_{\alpha\beta}$ erhält man eine quadratische Gleichung für t. Die Forderung, daß mindestens drei Punkte P auf g existieren, bedingt, daß die Koeffizienten derselben einzeln verschwinden müssen. Damit wird dann (10) eine *unbeschränkt integrable totale Differentialgleichung vom Riccatischen Typus* für t. Das allgemeine Integral enthält eine willkürliche Konstante, liefert also ∞^1 Punkte P. Je vier partikuläre Lösungen haben bekanntlich konstantes Doppelverhältnis[5]; das bedeutet: die ∞^1 Flächen $(P; x)$ schneiden die Geraden g in projektiven Punktreihen. Die drei Bedingungsgleichungen sind:

$$(12) \quad \begin{cases} \text{(a)} & A_\beta - \bar{A}_\alpha + A\bar{B} - \bar{A}B = 0, \\ \text{(b)} & B_\beta - \bar{B}_\alpha + 2A\bar{C} - 2\bar{A}C = 0, \\ \text{(c)} & C_\beta - \bar{C}_\alpha + B\bar{C} - \bar{B}C = 0. \end{cases}$$

Zunächst ergibt sich aus (12a) mit Berücksichtigung von (2):

$$b\sqrt{g}\,(m + \mu) - a\sqrt{e}\,(n + \nu) = 0.$$

Man gewinnt nun aber, wie im Anschluß an (8), (9) unmittelbar zu übersehen ist, die analoge Riccatische Gleichung für t', indem man überall b durch $-b$ ersetzt. Damit auch für diese (12a) besteht, muß

$$(13) \qquad \mu = -m, \qquad \nu = -n$$

6) Vgl. dazu im folg. die Formel (30).

Digitized by Google

sein. Dadurch vereinfachen sich die Ausdrücke für B und $\bar{B}$:

$$B = \frac{a}{b} m, \quad \bar{B} = \frac{b}{a} n. \tag{14}$$

Wir nehmen jetzt (12 c) und erhalten bei entsprechender Zerfällung:

$$\begin{cases} (\mu_1)_\beta - (\nu_1)_\alpha + n(\sqrt{e} - \mu_2) + \frac{a^2}{b^2} m\nu_2 = 0, \\ (\mu_2)_\beta - (\nu_2)_\alpha - m(\sqrt{g} - \nu_1) - \frac{b^2}{a^2} n\mu_1 = 0, \end{cases} \tag{15}$$

hieraus mittels der zweiten und dritten Gleichung (6) und der Formeln (13):

$$\mu_1 = 0, \qquad \nu_2 = 0. \tag{16}$$

Die erste Relation (6) geht über in:

$$m_\beta - n_\alpha = \sqrt{e}\,\mu_2 - \sqrt{g}\,\nu_1, \tag{17}$$

die beiden anderen, gleichwertig mit (15), in:

$$(\nu_1)_\alpha = n(\sqrt{e} - \mu_2), \qquad (\mu_2)_\beta = m(\sqrt{g} - \nu_1). \tag{18}$$

Dazu kommt (12 b), und zwar, ohne zu zerfallen, in folgender Gestalt:

$$\frac{a}{b} m_\beta - \frac{b}{a} n_\alpha + \frac{a^2 - b^2}{2ab} \sqrt{e}\sqrt{g} - \frac{\sqrt{e}}{2ab} \nu_1 + \frac{\sqrt{g}}{2ab} \mu_2 = 0. \tag{19}$$

An Stelle der beiden noch vorkommenden Koeffizienten μ_2, ν_1 führen wir zwei neue Hilfsgrößen $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ ein. Wir setzen:

$$\mu_2 = -\sqrt{E} + \tfrac{1}{2}\sqrt{e}, \qquad \nu_1 = \sqrt{G} + \tfrac{1}{2}\sqrt{g} \tag{20}$$

und erhalten aus (18) die Beziehungen:

$$(\sqrt{E})_\beta = m\sqrt{G}, \qquad (\sqrt{G})_\alpha = n\sqrt{E}, \tag{21}$$

aus denen hervorgeht, daß *gleichzeitig mit dem gesuchten System Σ eine Fläche*

$$\tilde{x} = \int (\sqrt{E} X^{(1)} d\alpha + \sqrt{G} X^{(2)} d\beta) \tag{22}$$

mit dem Quadrat des Linienelements

$$\sum d\tilde{x}^2 = E d\alpha^2 + G d\beta^2 \tag{23}$$

bestimmt wird, für die das Orthogonalnetz (α, β) der Einheitskugel (X) das Gaußsche sphärische Bild der Krümmungslinien vorstellt.

Digitized by Google

Aus (17), (19) ergibt sich das Gleichungspaar

$$(24) \qquad \begin{cases} 2m_\beta = -\sqrt{e}\sqrt{g} + \sqrt{E}\sqrt{g} + \sqrt{G}\sqrt{e}, \\ 2n_\alpha = -\sqrt{e}\sqrt{g} - \sqrt{E}\sqrt{g} - \sqrt{G}\sqrt{e}, \end{cases}$$

das (3) im Gefolge hat. Diese Zerspaltung der Gaußschen Relation charakterisiert die Fläche (22) als zu einer von Bianchi betrachteten, etwas allgemeineren Klasse gehörig, die noch den Fall umfaßt, daß in (24) rechts das Glied $\pm c\sqrt{E}\sqrt{G}$ hinzutritt. Einer einfachen geometrischen Deutung sind die Formeln (24), auch bei Einführung der Hauptkrümmungsradien, nicht zugänglich. Bianchi[7]) fand diese Flächenklasse bei Beantwortung der Frage nach den besonderen Ribaucourschen Transformationen, bei denen eine homogene quadratische Relation die vier transformierenden Funktionen verbindet. Zur Bestimmung der intrinseken Bestimmungselemente (Fundamentalgrößen) hat man das aus (24), (2), (21) bestehende *System von sechs partiellen Differentialgleichungen* für die sechs Funktionen $m, \sqrt{e}, \sqrt{E}, n, \sqrt{g}, \sqrt{G}$ zu integrieren. Dabei können[8]) $m, \sqrt{e}, \sqrt{E}$ für einen Anfangswert $\beta = \beta_0$ als Funktionen von α, ebenso $n, \sqrt{g}, \sqrt{G}$ für $\alpha = \alpha_0$ als Funktionen von β willkürlich angenommen werden.

2. Wichtig ist der, wie es scheint, von Bianchi nicht bemerkte Umstand, daß man aus dem System (24), (2), (21) — man multipliziere die erste Gleichung (24) mit m, die zweite mit n — durch Integration zwei Relationen von der Form

$$(25) \qquad m^2 = -\tfrac{1}{2}e + \sqrt{E}\sqrt{e} + \varphi(\alpha), \qquad n^2 = -\tfrac{1}{2}g - \sqrt{G}\sqrt{g} + \psi(\beta)$$

gewinnt. Über die Parameter α und β kann man noch so verfügen, daß nicht verschwindendes $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ sich auf ± 1 reduziert. Damit wird:

$$(26) \qquad \sqrt{E} = \tfrac{1}{2}\sqrt{e} + \frac{m^2 - \varepsilon_1}{\sqrt{e}}, \quad \sqrt{G} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g} - \frac{n^2 - \varepsilon_2}{\sqrt{g}},$$

wobei für ε_1 und ε_2 die Werte $0, +1, -1$ in Betracht kommen.

---

7) Bianchi, Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili Rom Acc. Linc. Mem. (5) 12 (1918), S. 413; das. §§ 48, 49.

8) S. ebenda den Anfang von § 49. Dort findet sich ferner die den Grad der Allgemeinheit geometrisch kennzeichnende Feststellung, daß zwei sich rechtwinklig schneidende Raumkurven als Krümmungslinien der Fläche beliebig gewählt werden können.

Digitized by Google

Für unser System Σ stellt sich jetzt die Ortsfläche $(S; \mathfrak{x})$ des Scheitels im Anschluß an (5), (13), (16), (20), (26) mittels des durch e und g intrinsek bestimmten rechtwinkligen Dreikants $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ folgendermaßen dar:

$$(27)\quad \mathfrak{x} = \int\left[\left(-mX - \frac{m^2-\varepsilon_1}{\sqrt{e}}X^{(2)}\right)d\alpha + \left(-nX - \frac{n^2-\varepsilon_2}{\sqrt{g}}X^{(1)}\right)d\beta\right].$$

Die beiden Riccatischen Gleichungen für t und t' lauten:

$$(28)\quad \begin{cases} t_\alpha = \dfrac{\sqrt{e}}{2b}t^2 + \dfrac{a}{b}mt + \dfrac{1}{2}\left(b\sqrt{e} + \dfrac{m^2-\varepsilon_1}{b\sqrt{e}}\right), \\ t_\beta = \dfrac{\sqrt{g}}{2a}t^2 + \dfrac{b}{a}nt + \dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{g} + \dfrac{n^2-\varepsilon_2}{a\sqrt{g}}\right), \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} t'_\alpha = -\dfrac{\sqrt{e}}{2b}t'^2 - \dfrac{a}{b}mt' - \dfrac{1}{2}\left(b\sqrt{e} + \dfrac{m^2-\varepsilon_1}{b\sqrt{e}}\right), \\ t'_\beta = \dfrac{\sqrt{g}}{2a}t'^2 - \dfrac{b}{a}nt' + \dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{g} + \dfrac{n^2-\varepsilon_2}{a\sqrt{g}}\right). \end{cases}$$

Dabei hängen also die Bildkugel (X) und die Fläche $(S; \mathfrak{x})$ von der Konstanten $\operatorname{tg}\sigma = \dfrac{b}{a}$ des Geradenpaares nicht ab; das besagt: *Das Strahlensystem der gemeinsamen Lote ist Träger von* ∞^1 *Systemen* Σ. Hiernach liegt die Vermutung nahe, daß die Riccatische Gleichung von der Form (28) einen Transformationsprozeß definiert, bei dem $\dfrac{b}{a}$ die Rolle einer *charakteristischen Konstanten* spielt, analog den Verhältnissen, wie sie von der Bäcklundschen Transformation, der Bianchi-Transformation B_k und anderen Fällen her geläufig sind. Daß dies zutrifft, wird später gezeigt werden.

Ist t eine partikuläre Lösung von (28), so ist das allgemeine, durch zwei Quadraturen bestimmbare Integral:

$$(30)\quad t + \frac{e^{\omega}}{\Phi + c} \qquad (c = \text{const, e Exp})$$

dabei ist:

$$(31)\quad \omega = \int\left[\left(\frac{\sqrt{e}}{b}t + \frac{a}{b}m\right)d\alpha + \left(\frac{\sqrt{g}}{a}t + \frac{b}{a}n\right)d\beta\right],$$

$$(32)\quad \Phi = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sqrt{e}}{b}d\alpha + \frac{\sqrt{g}}{a}d\beta\right).$$

Digitized by Google

Entsprechend werde aus t' die im folgenden gebrauchte Größe ω' gebildet:

$$\omega' = \int\left[\left(-\frac{\sqrt{e}}{b}t' - \frac{a}{b}m\right)d\alpha + \left(\frac{\sqrt{g}}{a}t' - \frac{b}{a}n\right)d\beta\right]. \tag{33}$$

Um die Flächen $(P; x)$ und $(P'; x')$ zu untersuchen, berechnen wir:

$$\begin{cases} \xi_\alpha = (t_\alpha - b\sqrt{e})X + (t\sqrt{e} + am)X^{(1)} - bmX^{(2)}, \\ \xi_\beta = (t_\beta - a\sqrt{g})X - anX^{(1)} + (t\sqrt{g} + bn)X^{(2)}, \end{cases} \tag{34}$$

ebenso ξ'_α, ξ'_β und finden mit Benutzung von (28), (29):

$$\begin{cases} (\xi + \xi')_\alpha = \frac{R_\alpha}{R}(\xi - \xi'), \qquad (t + t')_\alpha = \frac{R_\alpha}{R}(t - t'), \\ (\xi - \xi')_\beta = \frac{R_\beta}{R}(\xi + \xi'), \qquad (t - t')_\beta = \frac{R_\beta}{R}(t + t'), \end{cases} \tag{35}$$

wobei R durch die Quadraturen (31), (33) gegeben ist:

$$R = e^{\frac{1}{2}(\omega - \omega')}. \tag{36}$$

In (35) haben wir die wohlbekannten Differentialrelationen der Moutardschen Transformation, die, wie ersichtlich, im vorliegenden Falle *vier* Integrale ξ, η, ζ, t der Moutardschen Differentialgleichung:

$$\xi_{\alpha\beta} = M\xi \qquad \left(M = \frac{R_{\alpha\beta}}{R}\right) \tag{37}$$

mit den vier Integralen ξ', η', ζ', t' der Gleichung:

$$\xi'_{\alpha\beta} = M'\xi' \qquad \left(M' = R\left(\frac{1}{R}\right)_{\alpha\beta}\right) \tag{38}$$

verbindet. Man bestätigt überdies an Hand von (8), (9), (27), (34) die Gültigkeit der Lelieuvreschen Formeln für die Fläche $(P; x)$ und die sich daran knüpfende Darstellung der zwischen $(P; x)$ und $(P'; x')$ vermittelnden W-Kongruenz:

$$\begin{cases} x_\alpha = -(\eta_\alpha\zeta - \xi_\alpha\eta), \qquad x_\beta = \eta_\beta\zeta - \xi_\beta\eta, \\ x' = x + \eta\zeta' - \zeta\eta'. \end{cases} \tag{39}$$

Danach besteht zunächst der Satz: *Auf den Flächen der beiden Scharen $(P; x)$ und $(P'; x')$ des durch die zweiparametrige Bewegung des Geradenpaares g, g' erzeugten Systems Σ entsprechen sich die Asymptotenlinien (α, β). Jede der ∞^1 Flächen $(P; x)$ bildet zusammen mit einer jeden der Flächen $(P'; x')$ die Brennflächen einer W-Kon-*

Digitized by Google

gruenz. Es liegt also ein *zusammengesetzter W-Verband* besonderer Art vor.

Aus (9) erhält man weiter die Beziehungen:

$$\sum \xi^2 = t^2 + 1, \qquad \sum \xi'^2 = t'^2 + 1, \tag{40}$$

in denen sich die Summe über die Buchstaben ξ, η, ζ erstreckt. Aus (34) und den analogen Formeln für ξ' folgert man, wobei man (28), (29) zu einer leicht zu übersehenden Umformung heranzuziehen hat:

$$\begin{cases} \sum (\xi_\alpha)^2 = (t_\alpha)^2 + \varepsilon_1, & \sum (\xi_\beta)^2 = (t_\beta)^2 + \varepsilon_2, \\ \sum (\xi'_\alpha)^2 = (t'_\alpha)^2 + \varepsilon_1, & \sum (\xi'_\beta)^2 = (t'_\beta)^2 + \varepsilon_2. \end{cases} \tag{41}$$

Aus (40) entnimmt man, daß *es sich bei den Flächen* $(P; x)$, $(P'; x')$ *um eine geometrische Deutung der Moutardschen Gleichungen mit vier, der quadratischen Relation*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - t^2 = 1 \tag{42}$$

genügenden Integralen ξ, η, ζ, t *handelt.* Die Gleichungen (41) sind insoweit als Folgerungen aufzufassen, als sich aus (42) und (37)

$$\frac{\partial}{\partial \beta}[\sum (\xi_\alpha)^2 - (t_\alpha)^2] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}[\sum (\xi_\beta)^2 - (t_\beta)^2] = 0$$

ergibt. Die Konstanten ε_1, ε_2 $(= 0, \pm 1)$ ersetzen dann wie in (26) die bei der Integration zunächst auftretenden Funktionen $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$; sie machen die Unterscheidung einzelner Fälle nötig. Für die Moutardschen Differentialgleichungen mit n durch eine quadratische Relation verbundenen Lösungen hat Bianchi[9]), auch unter der erweiterten Annahme: $\sum_1^n \pm \theta_i^2 = f_1(\alpha) + f_2(\beta)$, die Existenz ausgezeichneter Moutardscher Transformationen nachgewiesen, bei denen eine gleichlautende Relation die transformierten Größen verbindet. Der zwischen den Flächen $(P; x)$ und $(P'; x')$ des Systems Σ aufgedeckte geometrische Zusammenhang steht damit im Einklang. Zu einer wesentlichen Ergänzung des Bianchischen Resultats im Falle $n = 4$ werden wir im folgenden gelangen: *die Moutardsche Transformation hat hier nicht den Charakter eines elementaren Prozesses, sondern zerfällt in zwei selbständige einfachere Transformationen*[10]).

9) Bianchi, Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni. Mem. della Soc. Ital. delle Sc. (detta dei XL) (3) **13**, S. 261; s. auch; Rom Acc. Linc. Rend. **13**$_2$ (1904), S. 283.

10) An die Relation $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \vartheta^2 = 1$ knüpfen sich, abgesehen von der

Digitized by Google

3. Das bereits angedeutete nächste Ziel der Untersuchung ist: *mit* $(S; \mathfrak{x})$ *direkt verbundene, d. h. ohne Integrationsprozeß zugängliche Flächen aufzufinden, die dem gleichen Typus wie die Scharen* $P; x), (P'; x')$ *angehören, so daß letztere als das Ergebnis einer durch die Riccatische Gleichung* (28) *bezw.* (29) *definierten Transformation erscheinen.* Der natürliche Weg, der sich hierzu bietet, ist die Betrachtung der beiden Grenzfälle des Systems Σ, die für $b = 0$ und $a = 0$ vorliegen. Die Geraden g und g' fallen dann vereinigt in die eine oder die andere der durch S gelegten Richtungen $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$. Wir setzen demnach unter Bezugnahme auf (8) und 9), wobei u bzw. v die von S aus gerechnete Abszisse sei:

43) $$x^{(u)} = \mathfrak{x} + uX^{(1)}, \qquad \xi^{(u)} = uX + X^{(2)},$$

44) $$x^{(v)} = \mathfrak{x} + vX^{(2)}, \qquad \xi^{(v)} = vX + X^{(1)}.$$

u und v lassen sich nun in der Tat so bestimmen, daß für die Flächen $(x^{(u)})$ und $(x^{(v)})$ die Richtungen der Normalen durch die Vektoren $\xi^{(u)}$ und $\xi^{(v)}$ gegeben sind; überdies bilden auch hier die Kurven (α, β) die Asymptotenlinien. Wir finden nämlich:

45)
$$\begin{cases} x_\alpha^{(u)} = -(u\sqrt{e}+m)\,X + u_\alpha X^{(1)} - \left(um + \dfrac{m^2-\varepsilon_1}{\sqrt{e}}\right) X^{(2)}, \\ x_\beta^{(u)} = -nX + \left(u_\beta - \dfrac{n^2-\varepsilon_2}{\sqrt{g}}\right) X^{(1)} + un\,X^{(2)}, \end{cases}$$

46) $$\xi_\alpha^{(u)} = u_\alpha X + (u\sqrt{e}+m)\,X^{(1)}, \quad \xi_\beta^{(u)} = (u_\beta - \sqrt{g})\,X - nX^{(1)} + u\sqrt{g}\,X^{(2)},$$

mithin

$$\sum x_\alpha^{(u)} \xi^{(u)} = -u^2\sqrt{e} - 2um - \frac{m^2-\varepsilon_1}{\sqrt{e}}, \quad \sum x_\beta^{(u)} \xi^{(u)} = 0.$$

Damit auch der erste Ausdruck verschwindet, muß

47) $$u\sqrt{e} + m = \pm\sqrt{\varepsilon_1}$$

sein; gleicherweise ergibt sich für v die Formel:

48) $$v\sqrt{g} + n = \pm\sqrt{\varepsilon_2}.$$

Deutung im elliptischen Raume, gewisse von Bianchi (s. das vorst. Zitat) gefundene isometrische Paare Tschebyschefscher Netze. Der Moutardsche Prozeß führt dabei auf Transformationen mit gleichen konstanten Abständen zwischen korrespondierenden Punkten der gegebenen und der transformierten Flächen und erweist sich trotz dieser einfachen geometrischen Eigenschaft als zerlegbar, allerdings im Komplexen. Hierüber s. Jonas, Die Ribaucoursche Transformation der sphärisch-elliptischen Geometrie als Transformationsprinzip im euklidischen Raume. Math. Ann. 107 (1932), S. 420; das. §§ 4 u. 7.

Digitized by Google

Der Realität wegen werde weiterhin der Wert -1 für ε_1 und ε_2 ausgeschlossen. Zu bestätigen ist noch, daß auch die Gleichungen

$$\sum x_\alpha^{(u)}\,\xi_\alpha^{(u)} = 0, \qquad \sum x_\beta^{(u)}\,\xi_\beta^{(u)} = 0$$

erfüllt sind. Die erste folgt unmittelbar aus (45), (46), die zweite setzt

$$2u_\beta = (u^2+1)\sqrt{g} + \frac{n^2-\varepsilon_2}{\sqrt{g}} \tag{49}$$

voraus. Diese Formel erhält man aber, indem man (47) nach β differentiiert, (2), (24), (26) anwendet und schließlich m selber durch (47) ausdrückt.

Man stellt unschwer fest, daß $\xi^{(u)}, \eta^{(u)}, \zeta^{(u)}, u$ einerseits, $\xi^{(v)}, \ldots, v$ andrerseits Lösungen je einer Moutardschen Gleichung sind und daß $(x^{(u)})$ und $(x^{(v)})$ die zu den beiden ersten Formeln (39) völlig analoge Lelieuvresche Darstellung gestatten. Dazu kommt noch, daß wieder, wie man aus (46), (47), (49) entnimmt, die Beziehungen

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum(\xi^{(u)})^2 = u^2+1 & \sum(\xi_\alpha^{(u)})^2 = (u_\alpha)^2+\varepsilon_1, \\ & \sum(\xi_\beta^{(u)})^2 = (u_\beta)^2+\varepsilon_2 \end{array}\right. \tag{50}$$

und entsprechende für $\xi^{(v)}, \ldots$ gelten, so daß also die neuen Flächen $(x^{(u)}), (x^{(v)})$ tatsächlich der gleichen Klasse angehören wie die Flächen $(P; x), (P'; x')$ des Systems Σ.

Die Normalen zweier Flächen $(x^{(u)})$ und $(x^{(v)})$ treffen einander; denn es ist:

$$x^{(u)} + v\,\xi^{(u)} = x^{(v)} + u\,\xi^{(v)} = \mathfrak{x} + uX^{(1)} + vX^{(2)} + uv\,X. \tag{51}$$

Zugleich wird ersichtlich, daß *diese Normalen Erzeugende verschiedener Scharen eines bewegten gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids $z = xy$ sind, dessen Scheitel mit S und dessen Achse (z-Achse) mit der Richtung X zusammenfällt, während die Scheitelerzeugenden (x- und y-Achse) in die Richtungen $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ fallen.*

Es empfiehlt sich, die beiden Annahmen *A*) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ und *B*) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, auf die wir uns beschränken, jetzt getrennt zu behandeln.

4. *Fall A*) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. — Durch (47), (48) sind dann je zwei Werte für u und v:

$$u_{1,2} = \frac{-m \pm 1}{\sqrt{e}}, \qquad v_{1,2} = \frac{-n \pm 1}{\sqrt{g}} \tag{52}$$

gegeben. Die Scheitelerzeugenden des in S konstruierten Para-

Digitized by Google

oloids $z = xy$ durchlaufen zwei auf die gemeinsamen asymptotischen Parameter α, β bezogenen W-Kongruenzen, wir wollen sagen: ein *System rechtwinkliger W-Kreuze*. Die vier Brennflächenmäntel bestimmen sich mittels der Abszissen (52) aus den Formeln 43), (44) und gehören dem durch das Bestehen von (50) im Verein mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ charakterisierten *Flächentypus A* an. Ihre Normalen bilden auf dem bewegten Paraboloid $x = u$, $y = v$, $z = uv$ ein durch die vier Parameterwerte (52) definiertes Vierseit ausgezeichneter Erzeugender.

Wichtigen Aufschluß über ziemlich tiefliegende Eigenschaften der Flächen des Typus A bringt die Erledigung der Frage, wie sich nun umgekehrt aus einer dieser Flächen eine Fläche (S) als Trägerin eines Paraboloidsystems ergibt. Es zeigt sich nämlich, daß auch ein solcher Übergang auf *vier*fache Weise möglich ist. Wir leiten die folgenden Tatsachen her, bei deren Formulierung wir für den Augenblick den oberen Zeiger u fortlassen: *Ist* (x) *eine Fläche vom Typus A, gegeben durch die Lelieuvresche Darstellung*

$$x = \int [-(\eta_\alpha \zeta - \xi_\alpha \eta)\, d\alpha + (\eta_\beta \zeta - \xi_\beta \eta)\, d\beta] \tag{53}$$

auf Grund eines Systems von vier, die Relationen

$$\sum \xi^2 = u^2 + 1, \quad \sum (\xi_\alpha)^2 = (u_\alpha)^2 + 1, \quad \sum (\xi_\beta)^2 = (u_\beta)^2 + 1 \tag{54}$$

erfüllenden Lösungen einer Moutardschen Differentialgleichung, so gehen vom laufenden Punkt x der Fläche vier ausgezeichnete Tangenten aus, die vier W-Kongruenzen bilden, deren zweite Brennmäntel gleichfalls dem Flächentypus A angehören. Auf diesen Tangenten liegen, und zwar auf einem Kreise mit dem Radius $|u|$ *um den Punkt x, vier Punkte S, Scheitel gleichseitiger hyperbolischer Paraboloide* $z = xy$, *die miteinander die Normale der Fläche* (x) *als homologe (d. i. durch denselben Parameterwert definierte) Erzeugende u gemein haben und je eine der vier Tangenten von* (x) *als Scheitelerzeugende zulassen. Die vier anderen, in den Punkten S sie rechtwinklig schneidenden Scheitelerzeugenden fügen sich zu einem variablen windschiefen Viereck zusammen, dessen Seiten wieder W-Kongruenzen und dessen Ecken die diesen paarweise gemeinsamen Brennmäntel, abermals Flächen vom Typus A, beschreiben. Von den Normalen der letztgenannten Flächen liegt eine jede auf je zweien der vier Paraboloide, neben der Geraden u als zweite gemeinsame, der anderen Schar angehörende homologe Erzeugende, so daß die vier Paraboloide durch einen viergliedrigen Zyklus von Spiegelungen an gemeinschaftlichen Tangentialebenen verbunden werden.*

Digitized by Google

Beim Beweise werde der obere Zeiger u wieder hinzugefügt. Es sei also jetzt $(x^{(u)})$ eine gegebene Fläche vom Typus A [s. (53), (54)], $\xi^{(u)}$ der Normalenvektor. Wir führen, zunächst unter Bevorzugung der Ableitungen nach α und auf (43) Bezug nehmend, das rechtwinklige Dreikant $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$, Determinante $+1$, durch die Formeln:

$$uX + X^{(2)} = \xi^{(u)}, \qquad u_\alpha X + \varepsilon X^{(1)} = \xi_\alpha^{(u)} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{55}$$

ein und definieren die Fläche $(S; \mathfrak{x})$ durch:

$$\mathfrak{x} = x^{(u)} - uX^{(1)}. \tag{56}$$

Das ist infolge des doppelten Vorzeichens auf *zwei* Arten möglich; man denke sich die Größen X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $\mathfrak{x}$ mit der unterscheidenden Marke $\varepsilon (= \pm 1)$ versehen. Die Bestimmung ist eindeutig, da aus (55) die dritte in X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ lineare Gleichung:

$$\varepsilon X - u_\alpha X^{(1)} - \varepsilon u X^{(2)} = \eta_\alpha^{(u)} \xi^{(u)} - \xi_\alpha^{(u)} \eta^{(u)} \tag{57}$$

folgt. Die Ausdrücke selber werden übrigens nicht gebraucht; die Bedingungen für die orthogonale Matrix verifiziert man unmittelbar an Hand von (54).

Zu zeigen ist nun, daß der gegenwärtige Sachverhalt sich mit den Ergebnissen deckt, die wir im Anschluß an das durch (24), (26) charakterisierte Orthogonalnetz (α, β) der Einheitskugel (X) gewonnen haben. Wir bemerken, daß $\sum \xi^{(u)} X^{(1)} = 0$, also die Richtung $X^{(u)}$ Tangente der Fläche $(x^{(u)})$ ist. Bei den nunmehr erforderlichen Differentiationen bedienen wir uns des vorerst völlig allgemeinen Ansatzes:

$$\begin{cases} X_\alpha^{(1)} = r X^{(2)} - q X, & X_\beta^{(1)} = r' X^{(2)} - q' X, \\ X_\alpha^{(2)} = p X - r X^{(1)}, & X_\beta^{(2)} = p' X - r' X^{(1)}, \\ X_\alpha = q X^{(1)} - p X^{(2)}, & X_\beta = q' X^{(1)} - p' X^{(2)}. \end{cases} \tag{58}$$

Wir differentiieren die erste Gleichung (55) nach α, beachten die zweite und finden: $p = 0$; wir differentiieren ferner die zweite nach β, berücksichtigen die Moutardsche Gleichung in der Form: $\xi_{\alpha\beta}^{(u)} = \frac{u_{\alpha\beta}}{u} \xi^{(u)}$ und schließen, indem wir rechts die erste Gleichung (55) heranziehen: $q' = 0$. Damit tritt aber an die Stelle von (58) das System (4) bei gleichzeitigem Bestehen von (2) und (3): wir setzen also: $q = \sqrt{e}$, $r = -m$, $p' = -\sqrt{g}$, $r' = n$[11]). Auf dem

11) Zur Kürzung des Beweises trägt wesentlich die Tatsache bei, daß auch auf die Berechnung dieser Größen verzichtet werden kann.

Digitized by Google

ezeichneten Wege ergibt sich überdies:

59) $$u\sqrt{e}+m = \varepsilon.$$

chließlich werde die erste Gleichung (55) nach β differentiiert:

60) $$(u_\beta - \sqrt{g})\,X - nX^{(1)} + u\sqrt{g}\,X^{(2)} = \xi^{(u)}_\beta.$$

Hieraus folgt mit Hilfe der dritten Relation (54):

61) $$2u_\beta = (u^2+1)\sqrt{g} + \frac{n^2-1}{\sqrt{g}}.$$

Beseitigt man u mittels (59), so entsteht die Formel:

62) $$2m_\beta = -\sqrt{e}\sqrt{g} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{e}}(m^2-1) - \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{g}}(n^2-1),$$

lie mit (24), (26) für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ äquivalent ist. Die Eigenschaften des Dreikants $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ sind damit bestätigt. Auch ür die Fläche $(S; \mathfrak{x})$ erhält man die ursprüngliche Darstellung 27), indem man (56) differentiiert, die nach (53) für $x^{(u)}_\alpha$ und $x^{(u)}_\beta$ unächst geltenden Lelieuvreschen Ausdrücke der Gleichung 57) gemäß umformt und endlich u_β und u mittels (61) und (59) ortschafft. Da nun (59) mit der ersten Relation (52) übereinstimmt, besteht tatsächlich zwischen den Flächen $(S; \mathfrak{x})$ und $(x^{(u)})$ ler frühere Zusammenhang.

Eine gleiche, aber die Ableitungen nach β benutzende Konstruktion ordnet dem laufenden Punkte der Fläche $(x^{(u)})$ ein zweites Paar von Tangenten mit analogen Eigenschaften zu. Dabei möge das Dreikant $(X_0, X_0^{(1)}, X_0^{(2)})$, der Scheitel des Paraboloids S_0, $\mathfrak{x}_0$ heißen; zur Unterscheidung der beiden Möglichkeiten wäre die Marke $\varepsilon'(= \pm 1)$ anzubringen. Die Bestimmungsgleichungen, zu denen $(X_0, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}) = +1$ hinzukommt, sind:

(63) $$uX_0 + X_0^{(1)} = \xi^{(u)}, \quad u_\beta X_0 - \varepsilon' X_0^{(2)} = \xi^{(u)}_\beta, \quad \mathfrak{x}_0 = x^{(u)} - u X_0^{(2)}\,^{12}).$$
$$(\varepsilon' = \pm 1)$$

$X_0^{(2)}$ ist jetzt die Richtung der Tangente an $(x^{(u)})$. Auf dem Paraboloid des (auf die eine oder andre Weise) mittels (55), (56) erhaltenen Systems $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$, $(S; \mathfrak{x})$ werde von den beiden ausgezeichneten Erzeugenden v [s. die zweite Formel (52)] die durch

12) Den Formeln (55), (56) gegenüber erscheinen hier die oberen Zeiger 1 und 2 vertauscht, da auf der Bildkugel (X_0) wieder die Kurven β bzw. $\alpha = \text{const}$ die Tangentenrichtungen $X_0^{(1)}$ und $X_0^{(2)}$ haben sollen.

Digitized by Google

$$v\sqrt{g}+n = \varepsilon' \tag{64}$$

definierte betrachtet. Die symmetrische Lage der Paraboloide mit den Scheiteln S und S_0 zur Ebene der Geraden u und v drücken dann die folgenden Beziehungen aus:

$$\left\{\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{H}[(u^2+v^2-1)X+2uvX^{(1)}+2uX^{(2)}],\\ X_0^{(1)} &= \frac{1}{H}[2uX-2uvX^{(1)}+(1+v^2-u^2)X^{(2)}],\\ X_0^{(2)} &= \frac{1}{H}[2vX+(1+u^2-v^2)X^{(1)}-2uvX^{(2)}],\quad H=u^2+v^2+1,\\ \mathfrak{x}_0 &= \mathfrak{x}+\frac{2uv}{H}(-X+vX^{(1)}+uX^{(2)}). \end{aligned}\right. \tag{65}$$

Von der Richtigkeit derselben überzeugt man sich, indem man in die Gleichungen (63) für X_0, $X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $\mathfrak{x}_0$ die Ausdrücke (65) einträgt und gleichzeitig $\xi^{(u)}$, $\xi_\beta^{(u)}$, $\mathfrak{x}$ den Formeln (55), (60), (56) entnimmt. Man erhält dann mit Benutzung von (61) und (64) Identitäten. Festzustellen ist noch, daß, ebenso wie die durch S und S_0 gehenden Scheitelerzeugenden mit den Richtungen $X^{(1)}$ und $X_0^{(1)}$ im Punkte $x^{(u)}$ die Fläche $(x^{(u)})$ berühren, die beiden anderen mit den Richtungen $X^{(2)}$ und $X_0^{(1)}$ sich im Punkte

$$x^{(v)} = \mathfrak{x}+vX^{(2)} = \mathfrak{x}_0+vX_0^{(1)}$$

treffen und daß dort nicht nur die Richtung $X^{(2)}$, sondern auch $X_0^{(1)}$ Tangente der Fläche $(x^{(v)})$ ist. In der Tat wird: $\sum \xi^{(v)} X_0^{(1)} = 0$. Die vierfache Möglichkeit, $\varepsilon = \pm 1$ und $\varepsilon' = \pm 1$ zu kombinieren, läßt erkennen, daß sich rings um die Gerade u, Normale von $(x^{(v)})$, vier Spiegelungen zum Zyklus vereinigen. Der Beweis ist damit beendet.

Als Ergänzung sei folgendes angemerkt: *Liegt ein Paraboloidsystem der betrachteten Art vor, so kann es auf Grund unseres Ergebnisses durch inhärente, d. h. keinerlei Integration erfordernde Transformationen unbegrenzt vervielfältigt werden. Der einzelne Schritt besteht in der Spiegelung des Paraboloids an einer der vier, von den ausgezeichneten Erzeugenden bestimmten Ebenen. Bei fortgesetzter Anwendung schließen sich die Operationen infolge der Zyklen nach dem Schema eines unendlich ausgedehnten Netzes viereckiger Maschen zusammen.* Sieht man dabei die W-Kreuze als ebene Vierecke mit rechtwinkligen Diagonalen an, so bieten sie, für irgend ein Wertepaar der Variablen α, β ins Auge gefaßt, in ihrer Gesamtheit

Digitized by Google

elber das Bild eines solchen Netzes; die vier von einem Knotenunkt ausgehenden Diagonalen fallen immer in eine Ebene, und ie vier auf ihnen gelegenen Diagonalenschnittpunkte haben von iesem Knotenpunkt gleichen Abstand.

Die von der Riccatischen Gleichung (28) abhängige *Transormation* mit der charakteristischen Konstanten $\frac{b}{a}$, *Verallgemeineung der Bianchi-Transformation B_k für den Fall des gleichseitigen yperbolischen Paraboloids*, führt, so wie sie sich zunächst darstellt, on einem gegebenen Paraboloidsystem zu ∞^1 Flächen vom Typus 4, den durch (8) bestimmten Flächen $(P; x)$, mit deren Normalen ich dann je vier im Zyklus zusammengeschlossene Paraboloidysteme verbinden[13]). Unter Verzicht auf weitere hierher gehörige Entwicklungen erwähne ich, daß diese neue Transformation B_k ein Seitenstück zu derjenigen bedeutet, die ich unlängst für Systeme einschaliger Hyperboloide mit vier, Normalenkongruenzen durchaufenden Erzeugenden aufgestellt habe[14]). Sie erscheint übrigens geometrisch interessanter als jener allgemeine Fall durch das Auftreten der *W-Kreuze* und durch die Tatsache, daß *sich dabei* — man beachte den Zusammenhang der Flächen $(P; x)$ und $(P'; x')$ — *die Operationen B_k und B_{-k} zu asymptotischen Transformationen der Flächen vom Typus A zusammensetzen lassen.* Parallel dazu und analytisch äquivalent kann eine *Transformationstheorie der Krümmungsliniennetze* (22) entwickelt werden, bei der die entsprechende

13) Eine wichtige Eigenschaft der ursprünglichen Bianchi-Transformation B_k bleibt erhalten. Die als gemeinsame Erzeugende den vier transformierten Paraboloidsystemen angehörende Normale von $(P; x)$ ist zu gleicher Zeit Erzeugende des durch k bestimmten Paraboloids der konfokalen Schar, das von dem Paraboloid des gegebenen Systems in starrer Koppelung mitgeführt wird. Die Gerade g (für $b \mid -b$ die Gerade g') ist eine seiner Scheitelerzeugenden. Schreibt man statt $xy = z$, indem man die Winkelhalbierenden der Scheitelerzeugenden als x- und y-Achse einführt: $x^2 - y^2 = 2z$, so lautet die Gleichung der konfokalen Schar (Bianchi, Lezioni 3, § 12):

$$\frac{x^2}{1-k} - \frac{y^2}{1+k} = 2z - k.$$

Für den Scheitel des zu k gehörigen Paraboloids ist also: $z = \frac{1}{2}k$; man schließt dann aus (8): $k = -2ab$. Vertauschung von a und b läßt k unverändert. Es entspricht dies der Unterscheidung *zweier Klassen* von Transformationen B_k bei Bianchi.

14) Jonas, Ausdehnung der Bianchi-Transformation B_k auf gewisse zweifach-unendliche Systeme kongruenter einschaliger Hyperboloide und damit verbundene Normalenkongruenzen. Stzgsber. Akad. Berlin 1934, S. 264.

Digitized by Google

Zusammensetzung die von Bianchi betrachteten Ribaucourschen Transformationen mit quadratischer Relation ergibt.

5. *Fall B)* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. — Es existieren dann nur *zwei*, durch

$$(66)\quad u = -\frac{m}{\sqrt{e}},\quad v = -\frac{n}{\sqrt{g}},\quad \xi^{(u)} = uX + X^{(2)},\quad \xi^{(v)} = vX + X^{(1)}$$

definierte ausgezeichnete Erzeugende des Paraboloids $z = xy$ mit dem Scheitel S. Die beiden Scheitelerzeugenden (Richtungen $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$) berühren die Flächen:

$$(67)\qquad x^{(u)} = \mathfrak{x} + uX^{(1)},\qquad x^{(v)} = \mathfrak{x} + vX^{(2)}$$

als Tangenten je einer Schar $\beta = \text{const}$ bzw. $\alpha = \text{const}$ ihrer Asymptotenlinien[15]). Die Fläche $(x^{(u)})$ — das Gleiche gilt von $(x^{(v)})$ sowie von den Scharen der transformierten Flächen $(P; x)$ und $(P'; x')$ — ist charakterisiert als *Fläche vom Typus B* durch das Bestehen der Moutardschen Gleichung mit vier, den Relationen

$$(68)\quad \sum(\xi^{(u)})^2 = u^2 + 1,\qquad \sum(\xi_\alpha^{(u)})^2 = (u_\alpha)^2,\qquad \sum(\xi_\beta^{(u)})^2 = (u_\beta)^2$$

genügenden Lösungen bei Zugrundelegung der Lelieuvreschen Formeln. Der Schnittpunkt

$$(69)\qquad x^* = \mathfrak{x} + uX^{(1)} + vX^{(2)} + uv\,X$$

der Geraden u und v, Normalen von $(x^{(u)})$ und $(x^{(v)})$, beschreibt, da sich

$$(70)\qquad x_\alpha^* = \xi^{(v)}u_\alpha + \xi^{(u)}v_\alpha,\qquad x_\beta^* = \xi^{(v)}u_\beta + \xi^{(u)}v_\beta,$$

$$(71)\qquad \sum(dx^*)^2 = (v^2+1)\,du^2 + 2\,uv\,du\,dv + (u^2+1)\,dv^2$$

ergibt, eine *Biegungsfläche* (x^*) *des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids* $x = u$, $y = v$, $z = uv$, deren Kurven (α, β) wieder, wie man leicht feststellt, die Asymptotenlinien sind[16]). Das Paraboloid

15) In Übereinstimmung mit dem bekannten Satze über Kongruenzen mit zusammenfallenden Brennmänteln.

16) Betrachtet man, um den Anschluß an eine bekannte Behandlung des Biegungsproblems herzustellen, die Funktionen u und v als Bestimmungselemente, so findet man:

$$2u_\beta = \sqrt{g}\,H,\qquad 2v_\alpha = \sqrt{e}\,H,\qquad H = u^2 + v^2 + 1;$$

$$u_{\alpha\beta} = \frac{2u}{H}u_\alpha u_\beta,\qquad v_{\alpha\beta} = \frac{2v}{H}v_\alpha v_\beta.$$

Aus dem letzten Gleichungspaar folgen durch Integration die Biegungsgleichungen:

Digitized by Google

ollt auf der Biegungsfläche. Die Spiegelung an der Ebene der Geraden u und v, gemeinsamer Tangentialebene von Paraboloid und Biegungsfläche, führt, hier als lediglich involutorischer Prozeß, auf das zweite rollende Paraboloid. Die Flächen $(x^{(u)})$ und $(x^{(v)})$ sind die *Hauptevolventenflächen*[17]), entstanden durch Abwickelung je eines, vor der Verbiegung durch die Scheitelerzeugende abgeschnittenen Systems von Fäden von der einen und der anderen Schar der verbogenen Erzeugenden. Umgekehrt gehört nun auch jede Fläche vom Typus B als eine der Hauptevolventenflächen zu einer Biegungsfläche des Paraboloids $z = xy$, wie man einsieht, wenn man aus $(x^{(u)})$ wie in Art. 4 (55), (56) das Dreikant $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ und die Fläche $(S; \mathfrak{x})$ des Scheitels durch die Formeln:

$$72) \quad uX + X^{(2)} = \xi^{(u)}, \qquad u_\alpha X = \xi_\alpha^{(u)}, \qquad \mathfrak{x} = x^{(u)} - uX^{(1)}$$

herleitet. Aus (70) gewinnt man überdies die Beziehung:

$$73) \quad x_\alpha^* u_\beta - x_\beta^* u_\alpha = (v_\alpha u_\beta - v_\beta u_\alpha)\xi^{(u)},$$

aus der hervorgeht, daß die Biegungsfläche (x^*) derjenige Evolutenmantel von $(x^{(u)})$ ist, auf dem die Rückkehrkanten der abwickelbaren Normalenflächen $u = \text{const}$ liegen.

Für einen Wert $\frac{b}{a}$ liefert die Riccatische Gleichung (28), der wir auch die Form:

$$(74) \quad t_u = \frac{\sqrt{e}}{2b}(t^2 - 2aut + u^2 + b^2), \; t_\beta = \frac{\sqrt{g}}{2a}(t^2 - 2bvt + v^2 + a^2)$$

geben können, ∞^1 durch (8) dargestellte Flächen $(P; x)$ vom Typus B. Wir wollen zeigen, daß *die als Evolutenmantel zu* $(P; x)$ *gehörige neue Biegungsfläche des Paraboloids* $z = xy$ *mit der gegebenen* (x^*) *durch eine Bianchi-Transformation* B_k $[k = -2ab$, s. Fußnote [12])] *zusammenhängt.* Behauptet wird also, daß *die beiden Flächen Brennmäntel einer W-Kongruenz sind.* Um mit wenig Rechnung zum Ziel zu gelangen, bestimmen wir auf der Normalen von $(P; x)$

$$2u_\alpha v_\alpha = \varepsilon H, \qquad 2u_\beta v_\beta = \varepsilon' H. \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1).$$

Für $\sqrt{e}$ und $\sqrt{g}$ ergibt sich dann die Darstellung:

$$\sqrt{e} = \frac{\varepsilon}{u_\alpha}, \quad \sqrt{g} = \frac{\varepsilon'}{v_\beta}.$$

17) Jonas, Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloide iperbolico equilatero. Annali di Mat. (4) 2 (1924-25), S. 261.

Digitized by Google

ihren Schnittpunkt x' mit der Tangentialebene von (x^*), der Ebene der Geraden u und v. Wir setzen mit Berücksichtigung von (8) und (9):

$$(75)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x' = x + T\xi & [x = \mathfrak{x} - ab\,X + t(a\,X^{(1)} + b\,X^{(2)}),\\ & \xi = tX + bX^{(1)} + aX^{(2)}]\end{array}\right.$$

und erhalten die aus der Bianchischen Theorie bekannte *quadrilineare Relation*:

$$(76)\qquad Tt + uv - a(Tu + tv) - b(Tv + tu) - ab = 0,$$

die den Wert von T liefert, differentiieren dann (75) und finden zunächst:

$$(77)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'_\alpha = t_\alpha(TX + aX^{(1)} + bX^{(2)})\\ \qquad\qquad + T_\alpha\xi + \sqrt{e}\,(u - at - bT)(X - vX^{(1)} - uX^{(2)}),\\ x'_\beta = t_\beta(TX + aX^{(1)} + bX^{(2)})\\ \qquad\qquad + T_\beta\xi + \sqrt{g}\,(v - bt - aT)(X - vX^{(1)} - uX^{(2)}).\end{array}\right.$$

Aus (74), (76) folgt nun aber:

$$(78)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{e}\,(u - at - vT) = \varrho\,t_\alpha, & \sqrt{g}\,(v - bt - aT) = \varrho\,t_\beta,\\ & \varrho = -\dfrac{2ab}{t - au + bv},\end{array}\right.$$

so daß sich (77) in

$$(79)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x'_\alpha = \Xi t_\alpha + \xi T_\alpha, & x'_\beta = \Xi t_\beta + \xi T_\beta,\\ \Xi = (T + \varrho)X + (a - \varrho v)X^{(1)} + (b - \varrho u)X^{(2)} & \end{array}\right.$$

verwandelt. Da hiernach die zu (73) analoge Gleichung

$$x'_\alpha t_\beta - x'_\beta t_\alpha = (T_\alpha t_\beta - T_\beta t_\alpha)\xi$$

gilt, ist (x') tatsächlich der als Biegungsfläche ausgezeichnete Evolutenmantel von $(P; x)$. Man bestätigt auch leicht durch direkte Rechnung im Anschluß an (79), daß

$$\sum (dx')^2 = (T^2 + 1)\,dt^2 + 2\,t\,T\,dt\,dT + (t^2 + 1)\,dT^2$$

wird. Schließlich erkennen wir, indem wir aus (69) und (75) die Formel

$$x' - x^* = (t - au - bv)\,\Xi + (T - av - bu)\,\xi$$

herleiten und auf (79) Bezug nehmen, daß die Verbindungslinie der Punkte x^* und x' auch die transformierte Biegungsfläche (x')

Digitized by Google

erührt. Die für die W-Kongruenz kennzeichnende Korrespondenz er Asymptotenlinien steht bereits fest. Unsere Behauptung ist amit bewiesen. Das Kompositum von der Form $B_k B_{-k}$ — Beiehung zwischen den Flächen $(P; x)$ und $(P'; x')$ — stellt sich als ine zwischen den Hauptevolventenflächen vermittelnde asymptoische Transformation dar[18]).

18) In der unter 17) zitierten früheren Untersuchung wurde die simultane symptotische Transformation der Hauptevolventenflächen an den Anfang gestellt; urch deren Zerlegung ergab sich die Transformation B_k.

Digitized by Google

Über die n-te Ableitung einer impliziten Funktion[1]).

Herrn Professor Dr. Ernst Hellinger zum 50. Geburtstag.

Von Ott-Heinrich Keller in Berlin.

Es sei uns eine Funktion $f(x, y)$ gegeben. Wir setzen von ihr nur voraus, daß sie beliebig oft nach beiden Veränderlichen differenzierbar sei.

Durch Nullsetzen von f ist etwa y als Funktion von x definiert. Es ergibt sich die Aufgabe, die n-te Ableitung $\frac{d^n y}{dx^n}$ durch die partiellen Ableitungen von f nach x und y auszudrücken.

Einen geschlossenen Ausdruck hierfür können wir nicht angeben; wohl aber soll im folgenden ein Verfahren angegeben werden, mit Hilfe dessen wir von jedem Produkt partieller Ableitungen von f feststellen können, ob und mit welchem Koeffizienten es als Glied der Summe auftritt, die $y^{(n)}$ darstellt. Das Verfahren scheint mir dann am brauchbarsten zu sein, wenn man über ein bestimmtes Glied der Summe Aussagen machen will[2]).

I. Die Bäume und ihre charakteristischen Zahlen.

Wir werden im folgenden den Begriff eines n-faserigen Baumes mit seinen Knotenpunkten, Fasern, Scheiten und Ästen nötig haben.

Ein *Baum* ist zunächst ein topologischer Streckenkomplex, der keinen geschlossenen Teilkomplex enthält. Wir werden später diesen Begriff noch in etwas anderer Fassung einführen.

Die bemerkenswerten Punkte eines Baumes mögen *Knotenpunkte* heißen.

Jeder endliche Baum hat freie Endpunkte, von denen nur je eine Strecke ausgeht. Einen von diesen greifen wir heraus und zählen ihn nicht unter die Knotenpunkte. (Er entspricht der *Wurzel* des Baumes.) Die einzige Strecke, die von ihm ausgeht, heiße der *Stamm* des Baumes. Damit ist eine Rangordnung unter den Knotenpunkten eingeführt: wir wollen sagen, ein Knotenpunkt K_1 gehe einem anderen Knotenpunkt K_2 voran, K_2 folge auf K_1,

1) Vorgetragen in der 307. Sitzung am 23. Januar 1935.

2) Ähnliche Methoden entwickelte Viggo Brun, Norsk mat. for. skr. II (1933), S. 31; Skand. Mat. Kongr. (1934), S. 80.

Digitized by Google

wenn wir auf dem Wege vom Stamm nach K_2 durch K_1 hindurch laufen müssen.

Die Strecken des Komplexes, die die einzelnen Knotenpunkte miteinander verbinden, wollen wir *Scheite* nennen. Die gegebene Bezeichnung Strecke ist für unsere Zwecke nicht geeignet; wir brauchen die Möglichkeit, in Stamm und Scheiten eine ganze Anzahl von Strecken zusammenzufassen. Diese Strecken sind Stücke der *Fasern*, deren Begriff wir jetzt erklären wollen.

Eine *Faser* sei ein Streckenzug, der notwendigerweise im Stamm anfängt, durch eine Reihe aufeinanderfolgender Knotenpunkte und die sie verbindenden Scheite hindurchläuft, um schließlich in einem Knotenpunkt abzubrechen. Eine Faser soll sich also nicht verzweigen können.

Den gesamten Endverlauf aller in einem Scheit zusammengefaßten Fasern wollen wir gelegentlich als *Ast* bezeichnen.

In einem n-faserigen Baum seien im Stamm genau n Fasern zusammengefaßt. In einem Knotenpunkt können sich nun die Wege von verschiedenen Fasern trennen. Aber, da ja der Baum keinen geschlossenen Teilkomplex enthält, können sich einmal getrennte Fasern nie wieder zu einem Scheit vereinigen.

Wir setzen weiter fest: wir wollen keine überflüssigen Knotenpunkte in unserem Baum haben; es soll also in jedem Knotenpunkt entweder mindestens eine Faser abbrechen, oder der einmündende Ast sich in mindestens zwei Äste verzweigen. Die Anzahl der Fasern, die mit einer gegebenen Faser zu einem Scheit zusammengefaßt sind, wird also von Knotenpunkt zu Knotenpunkt geringer. Ein Ast, der aus nur einer Faser besteht, muß notwendig im nächsten Knotenpunkt abbrechen. Da im Stamm n Fasern zusammengefaßt sind, kann die einzelne Faser höchstens n Knotenpunkte durchlaufen, und es gibt im ganzen höchstens n^2 Knotenpunkte. Ihre Anzahl sei N.

Diese Abschätzung läßt sich noch verfeinern: Ein n-faseriger Baum hat im ganzen höchstens $2n-1$ Knotenpunkte. Wir wollen dies durch vollständige Induktion beweisen. Für $n = 1$ ist der Ansatz sicher richtig, denn es gibt nur einen 1-faserigen Baum. Er besteht aus dem Stamm und bricht im ersten (einzigen) Knotenpunkt ab.

Wir nehmen nun an, wir hätten die Richtigkeit unseres Ansatzes schon für alle Zahlen nachgewiesen, die kleiner sind als n. Geht nun vom ersten Knotenpunkt eines n-faserigen Baumes nur ein Scheit weiter, so kann er nach unserer Verabredung höchstens $n-1$ Fasern in sich aufnehmen und der mit ihm beginnende Ast

Digitized by Google

hat höchstens $2n-3$ Knotenpunkte. Mit dem hier nicht mitgezählten ersten Knotenpunkt hat also unser n-faseriger Baum höchstens $2n-2$ Knotenpunkte.

Es mögen nun vom ersten Knotenpunkt mehrere, etwa r Scheite ausgehen, in denen jeweils $k_1, k_2, \ldots k_r$ Fasern zusammengefaßt sind. Die zugehörigen Äste können wir wieder als Bäume auffassen; sie enthalten jeweils $2k_\varrho - 1$ Knotenpunkte. Hierbei ist wieder der erste Knotenpunkt nicht mitgezählt. Unser n-faseriger Baum enthält also höchstens $1 + \sum_1^r{}_\varrho (2k_\varrho - 1)$ Knotenpunkte. $\sum_1^r{}_\varrho k_\varrho$ ist nun höchstens n und daher unser für die Gesamtzahl berechneter Ausdruck höchstens $2n - r + 1 \leq 2n - 1$, da $r \geq 2$.

Diese Höchstzahl wird nach dem Gange des Beweises nur dann erreicht, wenn von jedem Knotenpunkt entweder genau zwei Scheite weitergehen und keine Faser in ihm abbricht oder in ihm ein einfaseriger Ast endet.

Wir wollen uns nun darüber einigen, wann wir zwei Bäume als gleich ansehen wollen. Zunächst müssen sich die Knotenpunkte und Scheite der beiden Bäume eineindeutig einander zuordnen lassen; und zwar müssen von entsprechenden Knotenpunkten entsprechende Scheite ausgehen, und umgekehrt müssen entsprechende Scheite in entsprechenden Knotenpunkten anfangen und enden. Insbesondere gehen von entsprechenden Knotenpunkten gleichviele Scheite aus. Weiter müssen wir fordern, daß in entsprechenden Scheiten dieselbe Anzahl von Fasern zusammengefaßt ist und demzufolge in entsprechenden Knotenpunkten die gleiche Anzahl von Fasern abbricht.

Aber das reicht noch nicht aus. Wir müssen unter den von einem Knotenpunkt ausgehenden Scheiten eine Reihenfolge einführen und dürfen zwei Bäume nur dann als gleich bezeichnen, wenn auch die Reihenfolge entsprechender Scheite übereinstimmt. Wir legen also unseren Streckenkomplex in eine Ebene, oder wir fassen den Baum als Spalierbaum auf.

Die Anordnung der Fasern innerhalb der Scheite sei hingegen gleichgültig; es sei auch gleichgültig, in welcher Weise sich die in einem Knotenpunkt abbrechenden Fasern zwischen die von ihm ausgehenden Scheite einordnen.

Wir numerieren nun die Knotenpunkte eines Baumes irgendwie und ordnen dem ν-ten Knotenpunkt zwei Zahlen a_ν und b_ν, die *charakteristischen Zahlen* zu. a_ν sei dabei die Anzahl der Fasern, die in dem Knotenpunkt abbrechen, b_ν die Anzahl der Scheite, die von ihm ausgehen, in die sich also der einmündende Ast gabelt.

Digitized by Google

Die Forderung, daß in unserem Baum keine überflüssigen Knotenpunkte auftreten, besagt, daß für jedes Paar (a_ν, b_ν) entweder $a_\nu \geq 1$ oder $b_\nu \geq 2$ sein muß. Denn $a_\nu = 0$ $b_\nu = 0$ würde bedeuten, daß in dem in Rede stehenden Knotenpunkt keine Faser abbricht und keine weitergeht, was sich widerspricht, wenn man voraussetzt, daß durch jeden Scheit mindestens eine Faser läuft. $a_\nu = 0$ $b_\nu = 1$ würde bedeuten, daß keine Faser abbricht und *ein* Scheit weitergeht, daß also der Scheit ohne Unterbrechung durch den Knotenpunkt hindurchläuft.

n Fasern haben im Stamm angefangen; jede muß in irgendeinem Knotenpunkt abbrechen. Die Summe der Anzahlen der in den einzelnen Knotenpunkten abbrechenden Fasern ist also:

$$\sum_1^N \nu a_\nu = n. \tag{1}$$

II. Berechnung der Glieder von $y^{(n)}$.

Wir wollen im folgenden für $\frac{\partial^{a+b} f}{\partial x^a \partial y^b}$ der Einfachheit halber f^{ab} schreiben.

Um $y^{(n)}$ zu finden, zeichne ich mir zunächst alle möglichen verschiedenen n-faserigen Bäume hin. Jedem Knotenpunkt mit den charakteristischen Zahlen a_ν, b_ν lasse ich den Faktor $\frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\, a_\nu!\, b_\nu!}$ entsprechen. Jedem Baum ordne ich das $n!$-fache Produkt aller Faktoren zu, die seinen Knotenpunkten entsprechen: $n! \prod \frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\, a_\nu!\, b_\nu!}$. Ich behaupte nun: $y^{(n)}$ ist die Summe aller dieser Ausdrücke, die ich aus den verschiedenen n-faserigen Bäumen gewinnen kann:

$$y^{(n)} = n! \sum \prod \frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\, a_\nu!\, b_\nu!}.$$

Es kann dabei sehr wohl sein, daß mehrere Glieder der Summe einander gleich werden. Aber das schadet nichts; der betreffende Ausdruck wird sooft in die Summe aufgenommen, als es verschiedene Bäume gibt, aus denen er sich ableiten läßt. Lassen sich also zu einem System von Zahlenpaaren (a_ν, b_ν) r voneinander verschiedene Bäume finden, so ist der Faktor des Gliedes $\prod \frac{f^{a_\nu b_\nu}}{-f_y}$ gleich $\frac{r \cdot n!}{\prod a_\nu! \prod b_\nu!}$. Wir sehen daran: durch Symmetrieen in einem Baum wird der Koeffizient des entsprechenden Gliedes heruntergedrückt. Denn eine Symmetrie bewirkt, daß eine Änderung der Anordnung keinen anderen Baum ergibt.

Digitized by Google

Die obige Behauptung wollen wir in zwei Behauptungen zerlegen, die wir einzeln beweisen.

1. Jedem Glied der Summe für $y^{(n)}$ entspricht mindestens ein Baum; dies Entsprechen braucht, wie gesagt, nicht eindeutig zu sein.

Es kommt also insbesondere im Zähler weder f noch f_y vor; der Nenner ist abgesehen von den Koeffizienten eine Potenz von f_y, und der Exponent ist gleich der Anzahl der Faktoren des Zählers. Das System der Zahlenpaare (a_ν, b_ν) der Zählerfaktoren muß sich als System von charakteristischen Zahlen der Knotenpunkte eines n-faserigen Baumes auffassen lassen.

2. Jedem n-faserigen Baum entspricht ein Glied der Summe, durch die $y^{(n)}$ dargestellt wird. Das formal hingeschriebene Glied $\prod \frac{f^{a_\nu b_\nu}}{-f_y}$, das ich aus den charakteristischen Zahlen der Knotenpunkte des Baumes bilden kann, kommt in der Summe für $y^{(n)}$ mit dem Koeffizienten $\frac{n!}{\prod a_\nu! \prod b_\nu!}$ vor.

Diese beiden Behauptungen sind für $n = 1$ sicher richtig; es gibt nur einen einfaserigen Baum, ——, der schon im ersten Knotenpunkt abbricht. Ihm entspricht nach unserer Verabredung das Glied $\frac{f_x}{-f_y}$, das in der Tat gleich y' ist.

Den Beweis für beliebiges n führen wir durch Induktion; wir nehmen an, unsere Behauptungen seien richtig für alle kleineren Zahlen als n. Wir wollen zunächst die erste Behauptung beweisen.

Wir gewinnen alle n-faserigen Bäume, wenn wir in alle $n-1$-faserigen Bäume eine neue Faser auf alle mögliche Weise einfädeln. Denn durch Ausziehen einer beliebigen Faser aus einem n-faserigen Baum erhalten wir einen $n-1$-faserigen. Auf der anderen Seite gewinnen wir alle Glieder der Summe für $y^{(n)}$, wenn wir jedes Glied der Summe für $y^{(n-1)}$ total nach x differenzieren.

Die neu eingefädelte Faser kann entweder ganz in dem alten Baum verlaufen, oder sie kann irgendwo den alten Baum verlassen und einen neuen einfaserigen Ast bilden, der im nächsten Knotenpunkt abbrechen muß. In beiden Fällen kann der Weg, den die neue Faser im alten Baum verläuft, bis zu einem Knotenpunkt führen oder mitten in einem Scheit zwischen zwei Knotenpunkten aufhören. Den Endpunkt haben wir dann im neuen Baum mit unter die Knotenpunkte zu rechnen. Wir können also eine neue Faser auf vierfache Weise einfädeln.

Entsprechend gibt es vier Möglichkeiten des Differenzierens. Wir können einen Zählerfaktor oder einen Nennerfaktor differenzieren.

Digitized by Google

Wir können in beiden Fällen partiell nach x oder unter gleichzeitiger Multiplikation mit $y' = \frac{f_x}{-f_y}$ partiell nach y differenzieren.

Diese Möglichkeiten wollen wir jetzt einmal einander gegenüberstellen. Wenn wir zeigen können, daß jeder Art zu differenzieren eine Art entspricht, eine neue Faser einzufädeln, so sind wir fertig; dann entspricht tatsächlich jedem Glied der Summe für $y^{(n)}$ ein n-faseriger Baum.

1. Die neue Faser bricht in einem Knotenpunkt des alten Baumes ab. Wir erhöhen durch Einfädeln dieser Faser die charakteristische Zahl a_ν des Knotenpunktes um 1. An der Anzahl der Knotenpunkte des Baumes hat sich dabei nichts geändert.

Wir differenzieren den Zähler eines Faktors partiell nach x. Wir erhöhen dadurch die Anzahl a_ν der Male, die f partiell nach x differenziert wurde, um 1. An der Anzahl der Faktoren hat sich dabei nichts geändert.

Das sind offenbar entsprechende Vorgänge.

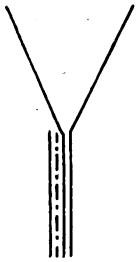


Fig. 1

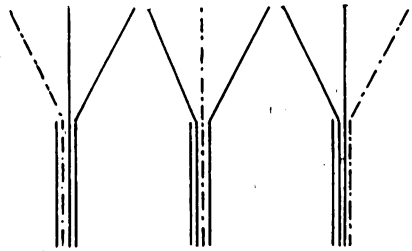


Fig. 2

2. Die neue Faser verläuft in dem alten Baum bis zu einem Knotenpunkt und verläßt ihn dort als einfaseriger Ast. Dadurch erhöht sich die charakteristische Zahl b_ν des Knotenpunktes um 1. Der Punkt, in dem der einfaserige Ast abbricht, tritt im neuen Baum zu den Knotenpunkten mit den charakteristischen Zahlen $a = 1$ $b = 0$ hinzu.

Wir differenzieren den Zähler eines Faktors partiell nach y und fügen den Faktor $y' = \frac{f_x}{-f_y}$ hinzu. Wir erhöhen dadurch die Anzahl b_ν der Male, die f nach y differenziert wurde, um 1.

Dies sind wieder entsprechende Vorgänge. Nur eins ist hier noch zu bemerken: Das Einfädeln einer Faser ist hier nicht eindeutig.

Digitized by Google

Der einfaserige Ast kann sich auf $b+1$ verschiedene Weisen neben oder zwischen die b alten Scheite legen, die von dem Knotenpunkt ausgingen. Wir erhalten dann im allgemeinen $b+1$ verschiedene Bäume. Um dementsprechend auch $b+1$ Glieder der Summe für $y^{(n)}$ zu bekommen, spalten wir das eine Glied, das wir durch Differentiation bekommen haben, in $b+1$ gleiche Teile und ordnen jedem Teil einen Baum zu. Wir wollen also verabreden: Beim partiellen Differenzieren eines Zählerfaktors $f^{a_\nu b_\nu}$ nach y wollen wir den Koeffizienten $\frac{1}{b_\nu+1}$ hinzufügen und das entsprechende Glied $b_\nu+1$-mal in die Summe für $y^{(n)}$ aufnehmen.

Es kann vorkommen, daß wir bei diesen $b+1$ Arten des Dazwischenlegens r-mal zu demselben Baum kommen. In diesem Falle ordnen wir diesem Baum den $\frac{r}{b+1}$-fachen Differentialquotienten zu; dann bleibt alles richtig.

3. Die neue Faser bricht mitten in einem Scheit ab. Dieser Scheit führe etwa zum μ-ten Knotenpunkt unserer Zählung. Es entsteht ein neuer Knotenpunkt mit den charakteristischen Zahlen $a=1$ $b=1$. Die charakteristischen Zahlen der übrigen Knotenpunkte bleiben unverändert.

Wir differenzieren den Nenner des Faktors, der dem μ-ten Knotenpunkt entspricht, partiell nach x. Aus $\frac{f^{a_\mu b_\mu}}{-f_y}$ wird $\frac{f^{a_\mu b_\mu} f_x}{f_y^2}$ $= \frac{f^{a_\mu b_\mu}}{-f_y} \cdot \frac{f_{xy}}{-f_y}$. Die alten Faktoren bleiben ungeändert; es tritt nur der Faktor $\frac{f_{xy}}{-f_y}$ hinzu.

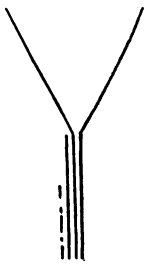


Fig.3

Hier ist das Entsprechen wieder offensichtlich. Die Eineindeutigkeit ist dadurch gesichert, daß jeder Scheit in genau einen Knotenpunkt einmündet und in jeden Knotenpunkt genau ein Scheit einmündet. Ich kann also aus dem Verlauf der Faser ablesen, der Nenner welches Faktors zu differenzieren ist und aus der Differentiation, in welchem Scheit die Faser abbricht.

4. Die neue Faser verläßt den Baum mitten in einem Scheit, um als einfaseriger Ast weiterzulaufen und im nächsten Knoten-

Den Nenner des Faktors, der dem μ-ten Knotenpunkt entspricht, differenzieren wir partiell nach y und multiplizieren

Digitized by Google

punkt abzubrechen. Der Scheit führe wieder zum μ-ten Knotenpunkt. Die charakteristischen Zahlen der alten Knotenpunkte bleiben bei dieser Art des Einfädelns ungeändert; es treten zwei neue Knotenpunkte mit den charakteristischen Zahlen $a = 0$ $b = 2$ und $a = 1$ $b = 0$ hinzu.

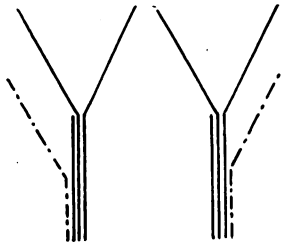


Fig. 4

mit $y' = \frac{f_x}{-f_y}$. Aus $\frac{f^{a_\mu b_\mu}}{-f_y}$ wird $\frac{f^{a_\mu b_\mu} \cdot f_{yy}}{f_y^2} \cdot \frac{f_x}{-f_y} = \frac{f^{a_\mu b_\mu}}{-f_y} \cdot \frac{f_{yy}}{-f_y} \cdot \frac{f_x}{-f_y}$. Die alten Faktoren bleiben also ungeändert; es treten die beiden Faktoren $\frac{f_{yy}}{-f_y}$ und $\frac{f_x}{-f_y}$ hinzu.

Das Entsprechen ist wieder einleuchtend. Wie im 2. Fall ist hier wieder zu beachten, daß die neu eingefädelte Faser noch zwei Möglichkeiten des Weiterverlaufes hat: rechts oder links von dem alten Scheit. Um jedem entstehenden Baum ein Glied zuordnen zu können, teilen wir das durch Differentiation entstandene Glied durch 2 und ordnen jedem Baum die Hälfte zu.

Eine Ausnahme bildet allerdings der Fall, daß der Scheit, in dessen Mitte die Faser den Baum verließ, selbst einfaserig war. Dann kommen wir zu demselben Baum, ob wir die neue Faser nach rechts oder nach links legen; wir brauchen das durch Differentiation entstandene Glied dann eben nicht zu teilen.

Mit dem vorhergehenden ist also bewiesen, daß jedem Glied der Summe für $y^{(n)}$ ein Baum entspricht. Wir kommen zu allen Gliedern, wenn wir zu allen möglichen verschiedenen Bäumen das entsprechende Glied bilden. Diese Glieder brauchen dabei allerdings nicht alle verschieden zu sein. Nun wollen wir unsere zweite Behauptung beweisen, der Koeffizient des Gliedes $\prod \frac{f^{a_\nu b_\nu}}{-f_y}$ sei $\frac{n!}{\prod a_\nu! \prod b_\nu!}$. Zum Beweise gehen wir den Weg des letzten Abschnittes in der anderen Richtung: Uns ist ein n-faseriger Baum gegeben, und wir haben uns zu überlegen, aus welchen $n-1$-faserigen Bäumen kann er durch Einfädeln einer Faser entstanden sein. Dann haben wir die entsprechenden Glieder der Summe für $y^{(n-1)}$ in der richtigen Weise zu differenzieren und zu unserem gesuchten Glied zusammenzufassen.

Digitized by Google

Diese $n-1$-faserigen Bäume erhalten wir dadurch, daß wir auf alle möglichen Arten eine Faser aus unserem n-faserigen Baum herausziehen. Und wir können auf so viele verschiedene Arten eine Faser herausziehen, als es Knotenpunkte gibt, in denen Fasern enden, für die also $a_\mu \geq 1$. Durch Herausziehen von verschiedenen Fasern, die in demselben Knotenpunkt enden und somit ihren ganzen Verlauf gemein haben, kommen wir nicht zu verschiedenen Bäumen.

Wir wollen zur bequemeren Schreibweise annehmen, die Faser, die wir herausziehen wollen, breche im μ-ten Knotenpunkt ab, nachdem sie unmittelbar vorher durch den ϱ-ten Knotenpunkt hindurchgegangen ist.

Zur Berechnung des Koeffizienten haben wir wieder 4 Fälle zu unterscheiden.

1. Der μ-te Knotenpunkt bleibe auch Knotenpunkt des $n-1$-faserigen Baumes, der durch Ausziehen der in Rede stehenden Faser entsteht. Es ist $a_\mu > 1$ oder $b_\mu > 1$. Dies ist die Umkehrung des ersten Falles des vorigen Abschnittes, und wir müssen uns das zugehörige Glied durch Differentiation eines Zählerfaktors nach x entstanden denken. Das Glied hieß vor der Differentiation:

$$(n-1)!\,\frac{f^{a_\mu - 1\, b_\mu}}{(-f_y)\,(a_\mu - 1)!\,b_\mu!}\,\Pi'\,\frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\,a_\nu!\,b_\nu!}$$

und zwar deutet der Strich am Produktzeichen an, daß das Glied $\nu = \mu$ fehlt. Durch Differenzieren erhalten wir, wenn wir noch Zähler und Nenner mit a_μ multiplizieren:

$$(2) \qquad (n-1)!\,a_\mu\,\Pi\,\frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\,a_\nu!\,b_\nu!}.$$

2. Der μ-te Knotenpunkt verliert durch Herausziehen der Faser die Eigenschaft, Knotenpunkt zu sein, aber ein Scheit des entstandenen $n-1$-faserigen Baumes geht durch ihn hindurch. Die herausgezogene Faser brach mitten in einem Scheit des $n-1$-faserigen Baumes ab. Es ist $a_\mu = 1$ $b_\mu = 1$. Wir haben hier die Umkehrung des dritten Falles des vorigen Abschnittes vor uns und haben uns das Glied durch Differentiation eines Nenner-Faktors nach x entstanden zu denken. Das Glied hieß vor der Differentiation:

$$(n-1)!\,\Pi'\,\frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\,a_\nu!\,b_\nu!}.$$

Digitized by Google

Im Produkt fehlt wieder der Faktor mit dem Index μ. Durch die Differentiation tritt hier einfach der Faktor $\frac{f_{xy}}{-f_y}$ hinzu. Wir dürfen, ohne etwas zu ändern, mit dem Faktor $a_\mu = 1$ multiplizieren und erhalten:

$$3) \qquad (n-1)!\, a_\mu \prod \frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\, a_\nu!\, b_\nu!}.$$

3. Der μ-te Knotenpunkt verschwinde durch Herausziehen der Faser völlig aus dem Baum, aber der ϱ-te Knotenpunkt bleibe auch Knotenpunkt des $n-1$-faserigen Baumes. Die Faser erreichte den μ-ten Knotenpunkt als einfaseriger Ast, der den $n-1$-faserigen Baum im ϱ-ten Knotenpunkt verließ. Wir haben eine Umkehrung des zweiten Falles des vorigen Abschnittes vor uns. Es ist $a_\mu = 1$ $b_\mu = 0$ und $a_\varrho > 0$ oder $b_\varrho > 2$. Das Glied hieß vor der Differentiation:

$$(n-1)!\, \frac{f^{a_\varrho b_\varrho - 1}}{(-f_y)\, a_\varrho!\, (b_\varrho - 1)!} \prod{}' \frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\, a_\nu!\, b_\nu!}.$$

In dem Produkt fehlen wieder die Faktoren mit den Indizes μ und ϱ. Wir haben den Zählerfaktor $f^{a_\varrho b_\varrho - 1}$ partiell nach y zu differenzieren, mit $y' = \frac{f_x}{-f_y}$ zu multiplizieren und unserer Verabredung gemäß durch $(b_\varrho - 1) + 1 = b_\varrho$ zu dividieren. Wir fügen wieder den unschädlichen Faktor $a_\mu = 1$ hinzu und erhalten:

$$4) \qquad (n-1)!\, a_\mu \prod \frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\, a_\nu!\, b_\nu!}.$$

Gehen vom ϱ-ten Knotenpunkt mehrere, etwa r, einfaserige Äste aus, die unmittelbar nebeneinander liegen, so kommen wir jedesmal zu demselben $n-1$-faserigen Baum, ganz gleich, welche von diesen r Fasern wir auch ausziehen. Aber wir kommen von diesem $n-1$-faserigen Baum ebenso jedesmal zu demselben — unserem — n-faserigen Baum, wenn wir auf die 2-te Weise des vorigen Abschnittes eine Faser einziehen und sie sich irgendwie neben oder zwischen die $r-1$ jetzt noch vom ϱ-ten Knotenpunkt ausgehenden Äste einordnen lassen. Wir haben unserer Verabredung gemäß mit r zu multiplizieren und statt r-mal das einfache Glied einmal das r-fache in unsere Summe aufzunehmen. Dieser Ausnahmefall stört also nicht weiter.

4. Ziehe ich die Faser heraus, so verschwindet der μ-te Knotenpunkt völlig aus dem $n-1$-faserigen Baum, und der ϱ-te Knoten-

Digitized by Google

punkt hört auf, Knotenpunkt zu sein. Es ist $a_\mu = 1$ $b_\mu = 0$ $a_\varrho = 0$ $b_\varrho = 2$. Die herausgezogene Faser verließ den Baum mitten in einem Scheit. Wir haben die Umkehrung des vierten Falles des vorigen Abschnittes vor uns; die Faser entstand durch Differentiation einers Nennerfaktors nach y. Das Glied hieß vorher:

$$(n-1)!\,\Pi'\frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\,a_\nu!\,b_\nu!}.$$

In dem Produkt fehlen wieder die Glieder mit den Indizes μ und ϱ. Durch die Differentiation treten die Glieder $\frac{f_x}{-f_y}$ und $\frac{f_{yy}}{-f_y}$ hinzu. Außerdem müssen wir verabredungsgemäß durch 2 dividieren. Fügen wir wieder den belanglosen Faktor $a_\mu = 1$ hinzu, so erhalten wir:

$$(5)\qquad (n-1)!\,a_{\mu}\,\Pi\frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\,a_\nu!\,b_\nu!}.$$

Auch hier haben wir wieder den Fall zu beachten, daß beide Äste, die vom ϱ-ten Knotenpunkte ausgingen, einfaserig waren, so daß wir durch Ausziehen irgendeiner der beiden Fasern jedesmal zu demselben $n-1$-faserigen Baum kommen. Aber wir kommen auch umgekehrt von diesem $n-1$-faserigen Baum durch Einfädeln einer Faser zu demselben — unserem — n-faserigen Baum, gleichgültig, ob wir sie rechts oder links von dem anderen einfaserigen Ast abzweigen lassen. Wir erhalten also statt zweier Glieder mit dem Faktor $^1/_2$ ein einziges mit dem Faktor 1, was in der Summe nichts ausmacht.

Mit diesen vier Fällen haben wir alle Möglichkeiten, eine Faser auszuziehen, erschöpft. Entweder ist $a_\mu > 1$ oder $b_\mu > 1$ oder $a_\mu = b_\mu = 1$ oder $a_\mu = 1$ $b_\mu = 0$. Im letzteren Fall ist entweder $a_\varrho > 0$ oder $b_\varrho > 2$ oder $a_\varrho = 0$ $b_\varrho = 2$ ($a_\mu = 0$ hat keinen Sinn, da ja die Faser im μ-ten Knotenpunkt abbrechen soll).

Die Ausdrücke (2), (3), (4), (5) haben alle dieselbe Gestalt. Um das unserem Baum entsprechende Glied zu gewinnen, müssen wir diese Ausdrücke für alle Knotenpunkte des Baumes bilden und addieren. Tun wir dies und beachten, daß nach (1) $\sum a_\nu = n$, so erhalten wir:

$$n!\,\Pi\frac{f^{a_\nu b_\nu}}{(-f_y)\,a_\nu!\,b_\nu!},$$

was zu beweisen war.

Digitized by Google

III. Die charakteristischen Zahlen.

Wir wollen uns jetzt einmal überlegen, welche Freiheit wir in der Wahl der Zahlenpaare a_ν, b_ν haben, wenn es möglich sein soll, daß sie die charakteristischen Zahlen der Knotenpunkte eines Baumes seien. Wir werden 4 Beziehungen zwischen ihnen finden, die allerdings nicht unabhängig von einander sind. Dann werden wir beweisen, daß es die einzigen Bedingungen sind, die jene Zahlenpaare erfüllen müssen und zeigen, daß sich zu jedem Zahlensystem, das diesen Bedingungen genügt, mindestens ein Baum aufrichten läßt, dessen Knotenpunkte diese Zahlen zu charakteristischen Zahlen haben.

Diese Überlegungen sollen uns die Mittel an die Hand geben, sämtliche n-faserigen Bäume zusammenzustellen. Wir haben zu diesem Zweck zuerst alle möglichen Zahlensysteme hinzuschreiben, die den 4 Bedingungen genügen und dann zu jedem Zahlensystem alle möglichen Bäume aufzustellen. Der Vorteil dieser Anordnung ist der, daß in unserer Aufstellung alle Bäume nebeneinander stehen, die zu demselben Glied der Summe für $y^{(n)}$ gehören.

Also zunächst jene 4 Beziehungen:

1. (1) $\sum_1^N a_\nu = n$. Dies haben wir schon im ersten Abschnitt bewiesen.
2. Die Zahlenpaare $a = 0\ b = 0$ und $a = 0\ b = 1$ kommen nicht vor.
3. Wir wollen etwas über die Summe der b_ν aussagen.

Die Anzahl N der Knotenpunkte ist um 1 größer als die Anzahl der Scheite, denn zu jedem Knotenpunkt führt genau ein Scheit hin, bis auf den ersten, zu dem der Stamm hinführt. Andererseits ist die Anzahl der Scheite gleich der Summe der Anzahlen der Scheite, die von den einzelnen Knotenpunkten ausgehen, also $\sum_1^N \nu b_\nu$. Die Anzahl der Knotenpunkte ist also

$$N = \sum_1^N \nu b_\nu + 1. \tag{6}$$

4. Die Anzahl r der Nullen unter den Zahlen a ist kleiner als die Anzahl s der positiven Zahlen a. Denn wenn $a = 0$ ist, ist $b \geq 2$. Also

$$N = r + s = \sum_1^N \nu b_\nu + 1 \geq 2r + 1,$$

also $s \geq r + 1$, was zu beweisen war.

Digitized by Google

Um nun zu allen Zahlensystemen zu gelangen, haben wir n auf alle mögliche Weisen in eine Summe von ganzen positiven Zahlen a_ν zu zerlegen. Ist bei einer Zerlegung die Anzahl der Summanden gleich s, so dürfen wir noch $r \leq s-1$ Nullen hinzufügen. Es sei $r+s = N$.

Dann haben wir $N-1$ auf alle möglichen Weisen in Summen von N verschwindenden oder positiven ganzen Zahlen zu zerlegen, von denen nur r größer sein müssen als 1. Weil 4. erfüllt ist, ist dies immer möglich. Schließlich müssen wir die N Zahlen a_ν und die N Zahlen b_ν auf alle möglichen und mit Bedingung 2. verträglichen Weisen zu Paaren zusammenfassen.

Ich behaupte nun: Zu jedem solchen Zahlensystem $\sum$ gehört mindestens ein Baum, dessen Knotenpunkte die Zahlen von $\sum$ zu charakteristischen Zahlen haben. Zum Beweis richten wir einen solchen Baum auf, zunächst ohne uns um seine Fasern zu kümmern.

Ich stelle zunächst den Stamm hin; seinem Endpunkt ordne ich ein beliebiges Zahlenpaar a_1, b_1 aus $\sum$ zu. Gibt es in $\sum$ überhaupt ein positives b, so muß b_1 positiv sein, da ich sonst den Baum nicht weiterführen könnte.

An diesen Knotenpunkt setze ich nun b_1 Scheite an. Ihren Endpunkten ordne ich wieder beliebige, von (a_1, b_1) verschiedene Zahlenpaare aus $\sum$ zu, jedoch, wenn möglich, wieder so, daß mindestens eine der Zahlen b_ν von Null verschieden ist. Auf den ν-ten neu entstandenen Knotenpunkt setze ich dann wieder b_ν Scheite auf.

Und so fahre ich fort. Nach ϱ Schritten finde ich eine Anzahl c_ϱ von Scheiten mit freien Endpunkten vor. Diesen ordne ich c_ϱ noch nicht verbrauchte, im übrigen beliebige Zahlenpaare aus $\sum$ zu; nur muß unter diesen mindestens eines sein, in dem das b nicht verschwindet, wenn in $\sum$ überhaupt noch ein solches Paar vorhanden ist. Wieder stecke ich dann auf den ν-ten neu hinzugekommenen Knotenpunkt b_ν-Scheite auf. Dieses Verfahren bricht ab, wenn alle Zahlenpaare aus $\sum$ mit positivem b verbraucht und die hingehörenden Scheite aufgesetzt sind.

Es ist nun noch zu beweisen, daß dann auch keine Zahlenpaare mit verschwindendem b in $\sum$ mehr übrig bleiben, daß ich aber andererseits für jeden freien Endpunkt eines neu angesetzten Scheites auch wirklich ein Zahlenpaar aus $\sum$ zur Verfügung habe.

Da nach Voraussetzung alle Zahlenpaare aus $\sum$ mit positivem b verbraucht sind, habe ich im ganzen (den Stamm eingerechnet) $\sum_1^N \nu b_\nu + 1 = N$ Scheite in meinen Baum eingebaut. N Zahlen-

Digitized by Google

paare hatte ich in $\sum$ zur Verfügung, und ich habe dem Endpunkt keines Scheites mehr als ein Zahlenpaar zugeordnet; es kann also weder Überfluß noch Mangel herrschen.

Jetzt muß ich nur noch die Fasern einziehen: Wie ich das zu machen habe, ist mir dadurch eindeutig vorgeschrieben, daß im ν-ten Knotenpunkt a_ν Fasern abbrechen müssen. Ich habe sie von diesem Knotenpunkt nur bis zum Stamm zurück zu führen.

Damit ist der Baum aufgerichtet. Seine Knotenpunkte haben die charakteristischen Zahlen a_ν, b_ν des Systems $\sum$. Das Verfahren zeigt gleichzeitig, daß es im allgemeinen sehr viele Bäume geben kann, die alle zu demselben Zahlensystem gehören. Um sie alle hinzustellen, muß ich alle Möglichkeiten nacheinander ausnutzen, die das Verfahren noch frei läßt.

IV. Die Anzahl der verschiedenen n-faserigen Bäume.

Bezeichnen wir sie mit $F(n)$; K. Boehle stellte dafür folgende Rekursionsformel auf:

$$F(n) = 1 + 2 \sum_{1}^{n-1 \,|\, k} F(k) \cdot F(n-k).$$

Zum Beweise betrachten wir den Scheit, der vom ersten Knotenpunkt ausgeht und in der auf S. 74 eingeführten Reihenfolge zuerst kommt. Er habe k Fasern und infolgedessen $F(k)$ Möglichkeiten, sich in einen Ast fortzusetzen. Ziehen wir seine k Fasern aus dem Baum heraus, so bleibt ein $n-k$-faseriger Restbaum übrig, der $F(n-k)$ Möglichkeiten zu seiner Gestaltung hat. Diese beiden Gruppen von Möglichkeiten können wir nun in beliebiger Weise kombinieren; wir haben sogar jedes Paar von Gestalten doppelt zu zählen, denn der erste Knotenpunkt des n-faserigen Baumes kann Knotenpunkt des Restbaumes sein, braucht es aber nicht zu sein. Ich habe also zwei Möglichkeiten, einen gegebenen k-faserigen Baum und einen gegebenen $(n-k)$-faserigen Restbaum nach unserer Vorschrift zu einem n-faserigen Baum zu vereinigen: Entweder ich lasse den k-faserigen Baum bis zum ersten Knotenpunkt des Restbaumes laufen oder ich lasse ihn mitten in dessen Stamm abzweigen.

Unter diesen Bäumen ist ein Baum noch nicht mit aufgezählt: der, von dessen erstem Knotenpunkt gar kein Scheit ausgeht, dessen Knotenpunkt die charakteristischen Zahlen $a = n$ $b = 0$ hat. Wir erhalten also als Gesamtzahl der Bäume

$$F(n) = 1 + 2 \sum_{1}^{n-1 \,|\, k} F(k) \cdot F(n-k),$$

wie behauptet.

Digitized by Google

C. L. Siegel gewann hieraus einen geschlossenen Ausdruck für $F(n)$. Er setzte

$$y = \sum_1^\infty {}^n F(n) x^n.$$

Erheben wir dies zum Quadrat und benutzen die Rekursionsformel, so wird

$$2y^2 = \sum_1^\infty {}^n (F(n) - 1) x^n,$$

also:

$$2y^2 - y + \frac{x}{1-x} = 0$$

und

$$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{8x}{1-x}}. \tag{7}$$

Dies kann man in der Umgebung des Nullpunktes in eine Potenzreihe nach Potenzen von x entwickeln, und der Koeffizient von x^n ist dann $F(n)$. Zunächst aber einiges über die Konvergenz der Reihe. Die dem Nullpunkt zunächst gelegene singuläre Stelle der Funktion (7) ist $x = \frac{1}{9}$, dort verschwindet die Wurzel. Der Konvergenzradius der Reihe ist also $r = \frac{1}{9}$. Daraus folgt, daß die Koeffizienten $F(n)$ wachsen wie 9^n, in dem Sinne, daß

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{F(n)} = 9.$$

Die Potenzreihenentwicklung liefert durch eine leichte Rechnung

$$y = \sum_1^\infty {}^n x^n \left\{ \frac{1}{n} \sum_1^n {}^k \binom{2k-2}{k-1} \binom{n}{k} 2^{k-1} \right\},$$

also

$$F(n) = \frac{1}{n} \sum_1^n {}^k \binom{2k-2}{k-1} \binom{n}{k} 2^{k-1}.$$

Digitized by Google

V. Beispiel $n = 3$.

Charakter. $a =$	3	21	21	210	111	111	1110	1110	11100
Zahlen $b =$	0	10	01	002	200	110	1002	0003	00022
Bäume									

$$\frac{y'''}{3!} = \frac{f_{xxx}}{(-f_y)3!} + \frac{f_{xxy}f_x}{(-f_y)^2 2!} + \frac{f_{xx}f_{xy}}{(-f_y)^2 2!} + 2\cdot\frac{f_{yy}f_x f_{xx}}{(-f_y)^3 2!\,2!} + \frac{f_{xyy}f_x^2}{(-f_y)^3 2!} + \frac{f_{xy}^2 f_x}{(-f_y)^3} + 3\cdot\frac{f_{yy}f_{xy}f_x^2}{(-f_y)^4 2!} + \frac{f_{yyy}f_x^3}{(-f_y)^4 3!} + 2\cdot\frac{f_{yy}^2 f_x^2}{(-f_y)^5 2!\,2!}.$$

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXXV. JAHRGANG

INHALT:

	Seite
Dreidimensionale Geometrien mit einer einzigen unendlich fernen Ebene. Von **H. Beck**	3—16
Ein Satz über trilineare Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks als Verallgemeinerung des Newton-Gaußschen Satzes vom vollständigen Vierseit. Von **M. Zacharias**	17—24
Zur Möbiusschen und Laguerreschen Kreisgeometrie in der Minimalebene. Von **U. Graf**	25—34
Verallgemeinerung der Schiebungsflächen. Von **G. Scheffers**	35—43
Berichte über die Sitzungen	1—2

1936

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

Mitteilungen.

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Oberinspektor M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschweg 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 156 a).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

FÜNFUNDDREISSIGSTER JAHRGANG

1936

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
Beck, H.,	Dreidimensionale Geometrien mit einer einzigen unendlich fernen Ebene	3—16
Graf, U.,	Zur Möbiusschen und Laguerreschen Kreisgeometrie in der Minimalebene	25—34
Scheffers, G.,	Verallgemeinerung der Schiebungsflächen	35—43
Zacharias, M.,	Ein Satz über trilineare Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks als Verallgemeinerung des Newton-Gaußschen Satzes vom vollständigen Vierseit	17—24
313.	Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 30. Oktober 1935	1
314.	„ „ außerordentl. „ am 27. November 1935	1
315.	„ am 18. Dezember 1935	1
316.	„ „ 29. Januar 1936 (Lagrange-Feier)	2
317.	„ „ 26. Februar „	2
318.	„ „ 25. März „	2
319.	„ „ 29. April „	2
320.	„ „ 20. Mai „	2
321.	„ „ 17. Juni „	2

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

313. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 30. Oktober 1935.

Vorsitzender: Herr Salkowski. Anwesend: 22 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Geschäftlicher Teil:

Die Berichte des Kassenwarts und der Kassenprüfer werden entgegengenommen; dem Kassenwart wird daraufhin die Entlastung erteilt.

In geheimer Wahl wird zum ersten Vorsitzenden mit 21 von 22 abgegebenen gültigen Stimmen Herr H. Jonas gewählt. Alle übrigen Wahlen werden durch Zuruf vorgenommen. Zweiter Vorsitzender und Schriftführer bleibt Herr G. Grüß, Kassenwart bleibt Herr P. B. Fischer. Als erster Kassenprüfer wird Herr Zacharias wiedergewählt, zweiter Kassenprüfer wird Herr O. H. Keller. In die Redaktionskommission treten die Herren Hammerstein, Neiß und Graf ein. Die Redaktionskommission besteht also jetzt aus dem Vorstand, den drei eben genannten Herren und Herrn Reinhardt.

2. Wissenschaftlicher Teil:

Herr Haack: Über Minimalkomplexe.

314. Sitzung und ausserordentliche Mitgliederversammlung am 27. November 1935.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 13 Mitglieder.

1. Geschäftlicher Teil:

An Stelle des nach Freiberg/S. berufenen Herrn Grüß wird Herr Graf zum Schriftführer gewählt; in die Redaktionskommission tritt Herr Salkowski ein.

2. Wissenschaftlicher Teil:

Herr Zacharias: Ein Satz über trilineare Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks als Verallgemeinerung des Newton-Gaußschen Satzes vom vollständigen Vierseit.

315. Sitzung am 18. Dezember 1935.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 18 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Beck: Über Cremonasche Geometrien.

Digitized by Google

316. Sitzung am 29. Januar 1936.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 74 Mitglieder und Gäste.

Feier der 200. Wiederkehr des Geburtstages von Joseph-Louis Lagrange (25. 1. 1736).

Herr Lorey: Lagranges Leben und seine zahlentheoretischen und funktionentheoretischen Arbeiten*).

Herr Hamel: Die „Mécanique analytique“**).

Herr Witt: Lagranges Beiträge zur Himmelsmechanik.

317. Sitzung am 26. Februar 1936.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 19 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Graf: Zur Kreisgeometrie in der Minimalebene.

Herr Witt: Potenzreihe und korrespondierender Kettenbruch.

318. Sitzung am 25. März 1936.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 15 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Jonas: W-Strahlensysteme und Paare schmiegungsverwandter Kurvennetze.

319. Sitzung am 29. April 1936.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Salkowski: Über die Darstellung der Minimalflächen.

320. Sitzung der Berliner Mathematischen Gesellschaft in Gemeinschaft mit dem Berliner Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichts und dem Mathematischen Verein zu Berlin am 20. Mai 1936.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 118 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Salkowski: Neue Wege und Ziele im Geometrie-Unterricht.

321. Sitzung am 17. Juni 1936.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 31 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Scheffers: Verallgemeinerung der Schiebungsflächen.

*) Erschienen, ergänzt durch Ausführungen über analytische Mechanik und Astronomie bei Lagrange, in Crelles Journ. Bd. 175, 1936.

**) Erschienen in den „Naturwissenschaften“, 1936, 24. Jhrg., Heft 4, S. 51.

Digitized by Google

Dreidimensionale Geometrien mit einer einzigen unendlich fernen Ebene[1]).

Von H. Beck in Bonn.

In Crelles Journal[2]) hat der Verfasser eine Cremonasche Geometrie des dreidimensionalen Raumes entwickelt, in der es zwei getrennte nicht-eigentliche Ebenen gibt. Dadurch wird die Frage nahe gelegt, ob durch die Forderung einer einzigen uneigentlichen Ebene die projektive Geometrie charakterisiert ist. Die Antwort fällt verneinend aus; es gibt eine abzählbare Menge nicht-projektiver Geometrien des R_3, in denen das Gebiet der eigentlichen Punkte durch eine einzige nicht-eigentliche Ebene zu ergänzen ist. Die einfachste dieser Disziplinen soll hier etwas eingehender behandelt werden.

§ 1. Man kann sich vornehmen, in der Geometrie des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes den horizontalen geraden Linien und Ebenen eine Sonderstellung zuzuweisen. Das kommt dann darauf hinaus, daß man nicht in der Gruppe G_{12} aller Affinitäten arbeitet, sondern in der zehnparametrigen Untergruppe

$$\begin{aligned} x' &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{30} \quad * \quad * \quad + a_{33}z \\ & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33} \neq 0. \end{aligned}$$

Die Sonderrolle, die hier der z-Ordinate des affinen Koordinatensystems zugewiesen ist, ist natürlich nebensächlich, ebenso der Gebrauch des Wortes horizontal; wesentlich ist lediglich, daß hier ein Parallelebenenbüschel bevorzugt behandelt wird.

Wieweit durch diese scheinbar ganz geringfügige Festsetzung die Tatsachen der Affingeometrie umgruppiert werden, zeigt bereits die Betrachtung der Flächen zweiter Ordnung. Unter diesen gibt es solche, deren Erzeugende ganz aus horizontalen Geraden bestehen. Die irreduziblen unter ihnen sind sämtlich Zylinder. Sie verteilen sich auf drei Familien:

1) Vorgetragen in der 315. Sitzung am 18. XII. 1935.

2) Eine Cremonasche Raumgeometrie, Bd. 175, Heft 3, 1936, S. 129.

Digitized by Google

1) Jede Horizontalebene trifft die Fläche in zwei Erzeugenden, die auch zusammenfallen können. Diese sechsparametrige Schar

$$(s_1 x + s_2 y)^2 + 2(p + qz)(s_1 x + s_2 y) + a_{00} + 2a_{03} z + a_{33} z^2 = 0$$
$$(a_{00} - p^2)(a_{33} - q^2) - (a_{03} - pq)^2 \neq 0$$

(s_1 und s_2 verschwinden nicht gleichzeitig) enthält sowohl axiale als auch parabolische Zylinder.

2) Zylinder mit einer horizontalen Asymptotenebene

$$2(p + qz)(s_1 x + s_2 y) + a_{00} + 2a_{03} z + a_{33} z^2 = 0,$$
$$q \neq 0, \quad a_{00} q^2 - 2a_{03} qp + a_{33} p^2 \neq 0.$$

3) *Jede* Horizontalebene trifft die Fläche längs einer einzigen Erzeugenden. ∞^4 parabolische Zylinder

$$2(s_1 x + s_2 y) + a_{00} + 2a_{03} z + a_{33} z^2 = 0, \quad a_{33} \neq 0.$$

Mit diesen letzteren Gebilden werden wir uns näher beschäftigen.

§ 2. Wir schreiben, etwas abgeändert,

$$2\mathfrak{A}_1 x + 2\mathfrak{A}_2 y + \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4 + 2\mathfrak{A}_3 z + (\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4) z^2 = 0, \tag{1}$$

und nennen jedes solche Gebilde, vorausgesetzt zunächst, daß $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht gleichzeitig verschwinden, einen *Zylinder*. Nur in dem Sinne soll im Folgenden das Wort Zylinder verstanden werden.

Diese Festsetzung ist folgenschwer. Damit gehören zu den Zylindern jetzt auch alle nicht-horizontalen Ebenen. Vom Standpunkt der Affingeometrie ist unser Vorgehen also schlechthin unzulässig. *Zulässig kann es nur sein in der Geometrie einer Obergruppe von G_{10}, die nicht mehr ausschließlich aus Affinitäten besteht.* Von den Transformationen einer solchen Obergruppe ist also zu verlangen, daß sie horizotale gerade Linien [Ebenen] wieder in horizontale gerade Linien [Ebenen] überführt. Ausführlicher, es muß möglich sein, eine Fläche (1) der Eigenschaft $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 = 0$ in eine ebensolche der Eigenschaft $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 \neq 0$ überzuführen.

Ein Weg, zu einer solchen Obergruppe zu gelangen, ergibt sich aus der Überlegung, daß in G_{10} die z sich linear und ganz substituieren. Fordert man statt dessen eine linear gebrochene Abhängigkeit

$$z' = \frac{a_{30} + a_{33} z}{a_{00} + a_{03} z}, \quad a_{00} a_{33} - a_{03} a_{30} \neq 0,$$

so geht in der Tat eine horizontale Ebene *im allgemeinen* wieder in eine horizontale Ebene über. Zwangläufig folgt dann die Not-

Digitized by Google

wendigkeit, aus der Menge der Horizontalebenen ein binäres Gebiet zu machen, und das geschieht durch die Einführung einer einzigen nicht eigentlichen Horizontalebene. Wir nennen sie die *akzessorische Ebene.* Dadurch gilt dann der soeben angegebene Satz ausnahmslos. Es folgt ferner die Notwendigkeit, statt z zwei homogene Koordinaten einzuführen

$$z = \sigma_2 : \sigma_1$$

sodaß die akzessorische Ebene durch $\sigma_1 = 0$ geliefert wird.

Jetzt läßt sich aussprechen, daß die Gleichung (1) für $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = 0$ stets ein Paar getrennter oder zusammenfallender Horizontalebenen liefert. Für $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 \neq 0$ sind beide Ebenen des Paares eigentlich, für $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 = 0$, $\mathfrak{A}_3 \neq 0$ ist die eine der beiden Ebenen eigentlich, während die andere die akzessorische ist. Endlich liegt für $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_3 = 0$, $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4 \neq 0$ die doppelt zählende akzessorische Ebene vor.

§ 3. Läßt man jetzt die beiden ersten Formeln von G_{10} ungeändert, so erhält man eine elfparametrige Schar von Transformationen, die die Gruppeneigenschaft *nicht* besitzt. In welcher Weise diese beiden Formeln abzuändern sind, ergibt sich aus der Forderung, daß Zylinder immer wieder in Zylinder übergehen sollen. Da $x' = 0\,[y' = 0]$ aus einem Zylinder hervorgegangen sein sollen, ist

$$\begin{aligned} C_1 . x' &= b_{11}x + b_{12}y + b_{10} + b_{14} + 2b_{13}z + (b_{10} - b_{14})z^2 \\ C_2 . y' &= b_{21}x + b_{22}y + b_{20} + b_{24} + 2b_{23}z + (b_{20} - b_{24})z^2. \end{aligned}$$

Da dasselbe von den Zylindern $x' + (z')^2 = 0$, und $y' + (z')^2 = 0$ gilt, haben die Faktoren C_1 und C_2 die Gestalt

$$C_1 = \gamma_1 (a_{00} + a_{03}z)^2, \quad C_2 = \gamma_2 (a_{00} + a_{03}z)^2,$$

wo $\gamma_1 \neq 0$ und $\gamma_2 \neq 0$ konstant sind. Ferner darf man $\gamma_1 = \gamma_2$ nehmen, was lediglich eine proportionale Abänderung der Koeffizienten b bedeutet, und sogar noch $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Setzt man jetzt an

$$\begin{aligned} &(a_{00} + a_{03}z)^2 . x' = b_{11}x + b_{12}y + (b_{10} + b_{14}) + 2b_{13}z + (b_{10} - b_{14})z^2 \\ (2)\quad &(a_{00} + a_{03}z)^2 . y' = b_{21}x + b_{22}y + (b_{20} + b_{24}) + 2b_{23}z + (b_{20} - b_{24})z^2 \\ &(a_{00} + a_{03}z) . z' = \quad * \quad * \quad a_{30} \quad + a_{33}z \quad * \end{aligned}$$

$$(a_{00}a_{33} - a_{03}a_{30})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \neq 0,$$

so stellen diese Formeln tatsächlich eine (*dreizehnparametrige*) Gruppe dar, die wir als G_{13} bezeichnen, und bei den Transformationen

Digitized by Google

dieser Gruppe geht ein Zylinder stets wieder in einen Zylinder über. Die Koeffizientensysteme

$$(a, b) \text{ und } (\varrho a, \varrho^2 b), \quad \varrho \neq 0$$

stellen dabei dieselbe Transformation dar.

Die erste Formel (2) zeigt dabei, daß jeder Zylinder auf $x' = 0$ gebracht werden kann, d. i., *daß alle Zylinder unserer Definition gegenüber den Transformationen von G_{13} äquivalent sind*, also eine einzige Klasse bilden.

Ein Analogon dazu bildet die Tatsache, daß in der konformen Geometrie des Raumes der Begriff der Ebene garnicht existiert, d. i., daß jede gewöhnlich als Ebene bezeichnete Figur sich konform auf eine Kugel abbilden läßt.

In unserem Falle gibt es dagegen Ebenen, nämlich die horizontalen. Jede andere Ebene im Sinne der Affingeometrie ist jetzt als Zylinder anzusprechen. Daraus ergibt sich, daß die Beibehaltung des Attributes horizontal jetzt unnötig ist. Eine Ebene der Geometrie von G_{13} ist bereits horizontal.

§ 4. Bei der Transformation (2) geht der Nullpunkt über in den Punkt

$$\left(\frac{b_{10}+b_{14}}{a_{00}^2}, \frac{b_{20}+b_{24}}{a_{00}^2}, \frac{a_{30}}{a_{00}}\right).$$

vorausgesetzt, daß $a_{00} \neq 0$ ist. Das legt den Ansatz nahe (vgl. § 2)

$$(4) \qquad x = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_1^2}, \quad y = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_1^2}, \quad z = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Dadurch gelingt es zunächst, die Gestalt der Formeln (2) in soweit zu vereinfachen, als die Nenner wegfallen:

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_1' &= a_{00}\sigma_1 + a_{03}\sigma_2 \qquad \sigma_2' = a_{30}\sigma_1 + a_{33}\sigma_2 \\ \sigma_{11}' &= (b_{10}+b_{14})\sigma_1^2 + 2b_{13}\sigma_1\sigma_2 + (b_{10}-b_{14})\sigma_2^2 + b_{11}\sigma_{11} + b_{12}\sigma_{22} \\ \sigma_{22}' &= (b_{20}+b_{24})\sigma_1^2 + 2b_{23}\sigma_1\sigma_2 + (b_{20}-b_{24})\sigma_2^2 + b_{21}\sigma_{11} + b_{22}\sigma_{22} \\ & (a_{00}a_{33} - a_{03}a_{30})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \neq 0. \end{aligned}$$

Die vier Größen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}$ in (4) sollen die *Parameter* des Punktes (x, y, z) heißen. Dann stellen die beiden Systeme von Parametern

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}) \text{ und } (\varrho\sigma_1, \varrho\sigma_2, \varrho^2\sigma_{11}, \varrho^2\sigma_{22})$$

für alle $\varrho \neq 0$ denselben Punkt dar, immer vorausgesetzt, daß $\sigma_1 \neq 0$ ist.

Digitized by Google

Aus (5) folgt aber, daß infolge von $\sigma_1 \neq 0$ werden kann $\sigma_1' = 0$. Damit haben wir ein Mittel, die akzessorischen Punkte zu erfassen. Aus § 2 wissen wir ja bereits, daß die akzessorische Ebene durch $\sigma_1 = 0$ geliefert wird; daher setzen wir fest, daß das System der Parameter $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{11}, \sigma_{22})$ für $\sigma_1 = 0$ einen akzessorischen *Punkt* darstellen soll. Durch die Koordinaten x, y, z ist dieser nicht erfaßbar.

Erst infolge dieser Festsetzung führt die Transformation (5) *jeden Punkt wieder in einen Punkt über.*

Die vier Parameter $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{11}, \sigma_{22})$ eines Punktes sind nicht homogen im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Dazu würde man *fünf* Parameter brauchen: für einen eigentlichen Punkt wäre

$$\sigma_1^2 : \sigma_1 \sigma_2 : \sigma_2^2 : \sigma_{11} : \sigma_{22} = 1 : z : z^2 : x : y, \tag{6}$$

und in der akzessorischen Ebene hat man dann in

$$0 : 0 : \sigma_2^2 : \sigma_{11} : \sigma_{22} \tag{7}$$

homogene Bestimmungsstücke eines akzessorischen Punktes, die die akzessorische Ebene als ternäres Punktgebiet (und demnach auch als ternäres Geradengebiet) in Evidenz setzen.

Ein akzessorischer Punkt kann durch geeignete Transformationen (5) in einen eigentlichen Punkt übergeführt werden. Nur dann ist das nicht der Fall, wenn $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ist, denn daraus folgt $\sigma_1' = \sigma_2' = 0$. Die akzessorischen Punkte $(0, 0, \sigma_{11}, \sigma_{22})$ spielen also eine Sonderrolle. Sie sollen *singuläre* Punkte genannt werden. Die Menge aller singulären akzessorischen Punkte ist, wie aus (7) hervorgeht, als gerade Linie zu bezeichnen. („Singuläre Gerade").

Jetzt zeigt man leicht:
Äquivalent gegenüber Transformationen von G_{13} sind alle eigentlichen und nicht-singulären akzessorischen Punkte. Ebenso sind zu einander äquivalent alle ∞^1 singulär-akzessorischen Punkte.

Es wird aber nützlich sein, den nicht-singulären akzessorischen Punkt von den Parametern $(0, 1; 0, 0)$ mit einem besonderen Namen zu belegen; er soll *Stützpunkt* heißen. Dann lassen sich die Nichtvertikalebenen charakterisieren als die Zylinder durch den Stützpunkt.

Die Gruppe G_{10}, von der wir in § 1 ausgegangen sind, ist dann die größte Untergruppe von G_{13}, bei welcher der Stützpunkt stehen bleibt ($a_{03} = 0$, $b_{10} - b_{14} = b_{20} - b_{24} = 0$).

Die akzessorischen Punkte des Zylinders (1), der sich jetzt nach (6) so schreiben läßt

$$\mathfrak{A}_0(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 2\mathfrak{A}_1\sigma_{11} + 2\mathfrak{A}_2\sigma_{22} + 2\mathfrak{A}_3\sigma_1\sigma_2 + \mathfrak{A}_4(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = 0 \tag{8}$$

Digitized by Google

bilden die Mannigfaltigkeit

$$(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4)\,\sigma_2^2 + 2\,\mathfrak{A}_1\,\sigma_{11} + 2\,\mathfrak{A}_2\,\sigma_{22} = 0,$$

die nach (7) als gerade Linie zu bezeichnen ist. Auf ihr liegt ein einziger singulärer Punkt von den Parametern

$$(0, 0;\ \mathfrak{A}_2, -\mathfrak{A}_1).$$

Da durch einen singulären Punkt alle Ebenen laufen, so darf dieser Punkt als *Scheitel* des Zylinders bezeichnet werden. Die beiden Zylinder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben denselben Scheitel, wenn $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 = 0$ ist.

§ 5. Haben die beiden Zylinder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ getrennte Scheitel, so lassen sie sich sofort gleichzeitig auf $x' = 0$, $y' = 0$ transformieren. Der „Zylinderschnitt" $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist also äquivalent zur Punktmenge $(\sigma_1, \sigma_2, 0, 0)$, also nach affiner Anschauung zu einer nicht-horizontalen Geraden. Jede solche Figur verträgt eine siebengliedrige Gruppe von G_{13} (in unserm kanonischen Falle $b_{10} = b_{13} = b_{14} = b_{20} = b_{23} = b_{24} = 0$).

Im Gegensatz zu den Figuren, die den Schnitt zweier Zylinder vom selben Scheitel bilden, sind die hier betrachteten Zylinderschnitte irreduzibel.

Die ∞^6 irreduziblen Zylinderschnitte sind sämtlich zueinander äquivalent, bilden eine einzige Klasse gegenüber G_{13}.

Der allgemeinste irreduzible Zylinderschnitt läßt sich also durch Transformation des kanonischen Vertreters so darstellen

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (b_{10} + b_{14})\,\sigma_1^2 + 2\,b_{13}\,\sigma_1\,\sigma_2 + (b_{10} - b_{14})\,\sigma_2^2 \\ \sigma_{22} &= (b_{20} + b_{24})\,\sigma_1^2 + 2\,b_{23}\,\sigma_1\,\sigma_2 + (b_{20} - b_{24})\,\sigma_2^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Jeder irreduzible Zylinderschnitt wird von jeder Ebene in einem einzigen Punkte geschnitten. Insbesondere hat der irreduzible Zylinderschnitt (9) einen einzigen akzessorischen Punkt von den Parametern

$$(0, 1, b_{10} - b_{14}, b_{20} - b_{24}).$$

Dieser Punkt ist stets *nicht-singulär*. Fällt er mit dem Stützpunkt zusammen, so erscheint der Zylinderschnitt nach affiner Anschauung als nicht-horizontale Gerade. Andernfalls liegt eine *Parabel* vor.

Von den ∞^7 Parabeln der Affingeometrie sind aber Zylinderschnitte nur diejenigen, die, ohne in einer Horizontalebene zu liegen, horizontale Durchmesserrichtungen haben.

Die reduziblen Zylinderschnitte sind Paare paralleler Geraden in getrennten Ebenen, und doppelt zählende gerade Linien.

Digitized by Google

§ 6. Damit sind jetzt die einfachsten Gebilde unserer Geometrie aufgestellt:

die ∞^3 Punkte, darunter die ∞^1 singulären
die ∞^3 geraden Linien, darunter die singuläre
die ∞^1 Ebenen
die ∞^4 Zylinder
die ∞^6 irreduziblen Zylinderschnitte.

Von den Verknüpfungssätzen führen wir nur die aller einfachsten an:

Zwei getrennte Punkte können höchstens durch eine Gerade verbunden werden.

Drei nicht singuläre Punkte können höchstens durch eine Ebene verbunden werden.

Können von drei nicht singulären Punkten keine zwei durch eine Ebene verbunden werden, so bestimmen sie einen einzigen irreduziblen Zylinderschnitt.

Das Seltsame, was diesen Sätzen zweifellos anhaftet, verschwindet nun sofort, wenn man die Formeln (6) etwas genauer betrachtet.

§ 7. Man kann die fünf Punktparameter

$$\sigma_1^2 : \sigma_1 \sigma_2 : \sigma_2^2 : \sigma_{11} : \sigma_{22}$$

eines Punktes nämlich als homogene Koordinaten eines Punktes im R_4 auffassen. Insbesondere setzen wir

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 : 2\sigma_{11} : 2\sigma_{22} : 2\sigma_1\sigma_2 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2$$

oder also

$$\sigma_1^2 : \sigma_1 \sigma_2 : \sigma_2^2 : \sigma_{11} : \sigma_{22} = X_0 + X_4 : X_3 : X_0 - X_4 : X_1 : X_2.$$

Wenn ein nicht akzessorischer Punkt vorliegt, kann man dafür schreiben

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 1 + z^2 : 2x : 2y : 2z : 1 - z^2;$$

$$x = \frac{X_1}{X_0 + X_4}, \quad y = \frac{X_2}{X_0 + X_4}, \quad z = \frac{X_3}{X_0 + X_4}.$$

Die Bildpunkte X im R_4 erfüllen dann die quadratische Punktmannigfaltigkeit

$$X_0^2 - X_3^2 - X_4^2 = 0,$$

die wir als M_3^2 bezeichnen wollen. Sie hat den Rang drei, besitzt also eine Gerade von singulären Punkten

$$X_0 = X_3 = X_4 = 0.$$

Digitized by Google

Diese singulären Punkte sind dann die Bilder der von uns als singulär-akzessorisch bezeichneten Punkte. Gerade Linien unserer Definition bilden sich allgemeiner ab als gerade Linien des R_4, die ganz auf M_3^2 liegen. Ebenso entsprechen den Ebenen unserer Definition die Ebenen des R_4, die ganz auf M_3^2 liegen.

Damit ist unsere Terminologie motiviert.

Der Raum

$$\mathfrak{A}_0 X_0 + \mathfrak{A}_1 X_1 + \mathfrak{A}_2 X_2 + \mathfrak{A}_3 X_3 + \mathfrak{A}_4 X_4 = 0$$

des R_4 schneidet M_3^2 in einer Punktmannigfaltigkeit, die wir sofort als Bild von (8) oder (1) erkennen; wenn der Raum nicht durch die singuläre Gerade von M_3^2 hindurchläuft, so liegt ein Zylinder vor, andernfalls ein Ebenenpaar; die Paare (horizontaler) Ebenen dürfen daher als reduzible Zylinder bezeichnet werden.

Die Zylinderschnitte erweisen sich jetzt als Bilder von Ebenen des R_4, d. i. der Schnittfiguren von M_3^2 mit solchen Ebenen, die nicht ganz auf ihr liegen.

Schließlich geht die dreizehngliedrige Gruppe (2) *über in die Gruppe der automorphen Kollineationen der* R_4. Man sieht daraus, daß eine andere Erweiterung unserer an den Anfang gestellten zehngliedrigen affinen Gruppe nicht möglich ist.

§ 8. Zugleich sieht man jetzt, daß unsere Geometrie Platz nicht nur für die Punkte der M_3^2 hat, sondern auch für die übrigen Punkte des R_4. Ein Punkt Y des R_4, der nicht auf M_3^2 liegt, bestimmt nämlich eine involutorische automorphe Kollineation von M_3^2 vermöge seines Polarraumes. Von den Räumen des R_4 sind Polarräume nur die, welche die singuläre Gerade von M_3^2 enthalten. Ihnen aber entsprechen in unserer Abbildung (10) Paare *getrennter* Ebenen.

Dem Punkte Y des R_4, der nicht auf M_3^2 liegt, läßt sich also eine *involutorische* Transformation von G_{13} zuordnen, bei der zwei getrennte Ebenen *punktweise* stehen bleiben.

Diese Transformation läßt sich so schreiben:

$$\begin{aligned}
\{Y_3-(Y_0+Y_4)z\}^2 . x' &= Y_1\{(Y_0-Y_4)-2Y_3z+(Y_0+Y_4)z^2\} \\
&\quad -\{Y_0^2-Y_3^2-Y_4^2\} . x \\
\{Y_3-(Y_0+Y_4)z\}^2 . y' &= Y_2\{(Y_0-Y_4)-2Y_3z+(Y_0+Y_4)z^2\} \\
&\quad -\{Y_0^2-Y_3^2-Y_4^2\} . y \\
\{Y_3-(Y_0+Y_4)z\} . z' &= (Y_0-Y_4)-Y_3z,
\end{aligned} \tag{10}$$

und die ∞^3 vermöge dieser Transformation eindeutig bestimmten Punktepaare $P \to P'$ entsprechen den ∞^3 geraden Linien des R_4, die durch den Punkt Y laufen.

Digitized by Google

Für $Y_0 + Y_4 = 0$ liegt eine Affinspiegelung an einer (horizontalen) Ebene vor. Andernfalls läßt sich eine ebenfalls noch verhältnismäßig einfache Figur als Bild des Punktes Y des R_4 angeben. Setzt man dann

$$\frac{Y_0 - Y_4}{Y_0 + Y_4} = c_1 c_2, \quad \frac{Y_3}{Y_0 + Y_4} = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) = z_0, \quad \frac{Y_1}{Y_0 + Y_4} = x_0,$$

$$\frac{Y_2}{Y_0 + Y_4} = y_0,$$

so wird durch die Transformation der Punkt (x_0, y_0, z_0) mit dem Stützpunkt vertauscht. Er liegt in der (horizontalen) Mittelebene zwischen den beiden Ebenen $z - c_1 = 0$ und $z - c_2 = 0$.

Diese Beschreibung ist natürlich nicht invariant; eine Figur, die wirklich als Bild des Punktes Y angesehen werden darf, ist vielmehr das Zylindergebüsch

$$2\tau_1(x - x_0) + 2\tau_2(y - y_0) + 2\tau_3(z - z_0) + \tau_0\langle z^2 - z_0^2 + \tfrac{1}{4}(c_1 - c_2)^2\rangle = 0,$$

von dem jeder Zylinder bei der involutorischen Transformation (10) *als Ganzes in Ruhe bleibt.* (Gebüsch „erster" Art).

Gerät jetzt der Punkt Y auf M_3^2, so artet die Transformation (10) aus. Das Zylindergebüsch geht über $(Y_0 + Y_4 \neq 0)$ in

$$2\tau_1(x - x_0) + 2\tau_2(y - y_0) + 2\tau_3(z - z_0) + \tau_0(z^2 - z_0^2) = 0,$$

d. i. in die *Gesamtheit aller Zylinder durch den eigentlichen Punkt*

$$x_0 = \frac{Y_1}{Y_0 + Y_4}, \; y_0 = \frac{Y_2}{Y_0 + X_4}, \; z_0 = \frac{Y_3}{Y_0 + Y_4}.$$

(Gebüsch „zweiter" Art). Die Figur der ∞^3 Punktepaare $P - P'$ bleibt, aber jetzt ist der eine Punkt aller dieser Paare der eigentliche Punkt (x_0, y_0, z_0), während der andere ganz beliebig bleibt.

§ 9. Damit kommen wir zu der Aufgabe, *die akzessorischen Punkte sichtbar zu machen*, d. i. eine Figur des eigentlichen Gebietes anzugeben, die den akzessorischen Punkt in derselben Weise vertreten kann, wie etwa das Parallelenbündel einen uneigentlichen Punkt.

Dazu ersetzt man wieder, ebenso wie bereits in § 8, den Punkt durch das Gebüsch aller Zylinder durch ihn. Ist der Punkt, der „gedeutet" werden soll, singulär akzessorisch, so besteht das zugehörige Gebüsch aus allen Zylindern ein und desselben Scheitels. (Gebüsch „dritter" Art).

Weniger einfach liegt der Fall, wenn der akzessorische Punkt

Digitized by Google

$$(0,\ p_2,\ p_{11},\ p_{22})$$

nicht singulär ist ($p_2 \neq 0$). Das Gebüsch („vierter Art") heißt dann

$$\tau_1\left(x - \frac{p_{11}}{p_2^2}z^2\right) + \tau_2\left(y - \frac{p_{22}}{p_2^2}z^2\right) + \tau_3 z + \tau_0 = 0. \tag{11}$$

Unsere Aufgabe ist dann gelöst, wenn man dieses Zylindergebüsch *in der Sprache der Affingeometrie* befriedigend geometrisch charakterisieren kann. Das gelingt nun, im Gegensatz zu den Gebüschen der ersten drei Arten nicht, und kann auch garnicht gelingen, denn das hier vorliegende Problem ist nicht invarianter Natur. Nur indirekt kann man diese Gebüsche vierter Art kennzeichnen. und sagen: *Jedes Zylindergebüsch, welches zu keiner der drei ersten Arten gehört, ist einem nicht singulären akzessorischen Punkte zugeordnet.*

Nur im Falle $p_{11} = 0$, $p_{22} = 0$, wo also der Stützpunkt vorliegt, läßt sich das Gebüsch noch affin beschreiben als Mannigfaltigkeit aller Ebenen des Affinraumes. Auf diese Figur kann man die involutorische Transformation von G_{13} ausüben

$$x' = -x + \frac{p_{11}}{p_2^2}z^2,\quad y' = -y + \frac{p_{22}}{p_2^2}z^2,\quad z' = z,$$

die den Stützpunkt mit dem Punkte $(0, p_2, p_{11}, p_{22})$ vertauscht, um das Gebüsch (11) zu erhalten.

Diese Transformation ist die Spiegelung am Zylinderschnitt

$$2x - \frac{p_{11}}{p_2^2}z^2 = 0,\quad 2y - \frac{p_{22}}{p_2^2}z^2 = 0.$$

Der Bildpunkt von (x, y, z) gibt mit dem Urbildpunkt zusammen eine (horizontale) Verbindungsgerade, die durch den Zylinderschnitt halbiert wird. Diese Konstruktion ist also noch übersehbar.

Als Analogon zum Satze: eine eigentliche Gerade des Affinraumes hat einen einzigen uneigentlichen Punkt, hat man hier:

Ein irreduzibler Zylinderschnitt besitzt einen einzigen nichtsingulären akzessorischen Punkt. Läuft der Zylinderschnitt durch die drei Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), (ξ_3, η_3, ζ_3), so ist für seinen akzessorischen Punkt $(\zeta_1 \neq \zeta_2 \neq \zeta_3)$

$$\frac{p_{11}}{p_2^2} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}}{(\zeta_2-\zeta_3)(\zeta_3-\zeta_1)(\zeta_1-\zeta_2)},\quad \frac{p_{22}}{p_2^2} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}}{(\zeta_2-\zeta_3)(\zeta_3-\zeta_1)(\zeta_1-\zeta_2)}.$$

Digitized by Google

Diese beiden Ausdrücke sind absolute Invarianten gegenüber den Affinitäten der sechsgliedrigen Untergruppe von G_{13} (und G_{10})

$$\begin{aligned} x' &= a^2 x + b_1 z + c_1 \\ y' &= a^2 y + b_2 z + c_2 \quad (a \neq 0) \\ z' &= \qquad az + c_3 \end{aligned}$$

Das ist die größte Untergruppe von G_{13}, bei der *jeder* akzessorische Punkt stehen bleibt.

Eine nach allen Richtungen befriedigende Lösung unserer Aufgabe, die akzessorischen Punkte sichtbar zu machen, setzt voraus, daß die Terminologie der zuletzt genannten sechsgliedrigen affinen Gruppe hinreichend weit ausgestaltet wird.

§ 10. Der Affingeometer, der diese sechsgliedrige Gruppe geometrisch charakterisieren soll, wird in einige Verlegenheit versetzt. Überall, wo bei einer Gruppe ähnliches festgestellt wird, ist damit zu rechnen, daß diese den Durchschnitt zweier Obergruppen bildet, von denen man beim gewählten Ausgangspunkt nicht die erfaßt hat, die das Charakteristische liefert.

Von den sonstigen überaus zahlreichen Untergruppen von G_{13} — es gibt solche von jeder beliebigen Parameterzahl — erwähnen wir nur eine neungliedrige, weil sie sich vermöge eines Systems komplexer Zahlen in drei Einheiten mit kommutativer Multiplikation

e_0	e_1	e_2
e_1	0	0
e_2	0	0

linear und gebrochen darstellen läßt als

$$w' = (cw + d)^{-1}(aw + b),$$

wo

$$w = ze_0 + xe_1 + ye_2$$

gesetzt ist, usw.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Gesamtheit der irreduziblen [reduziblen] Zylinderschnitte sich auf die der eigentlichen [uneigentlichen] Punkte eines R_6 lückenlos umkehrbar eindeutig abbilden läßt. Dieses einfache Ergebnis kommt dadurch zustande, daß als Zylinderschnitte nur die Schnittfiguren zweier solcher Zylinder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erklärt sind, die sich nicht auf Ebenenpaare reduzieren.

§ 11. Die Gruppe (2) ist einer Verallgemeinerung fähig:

Digitized by Google

$$(a_{00}+a_{03}z)^n x' = b_{11}x+b_{12}y+P_1(z)$$
$$(a_{00}+a_{03}z)^n y' = b_{21}x+b_{22}y+P_2(z)$$
$$(a_{00}+a_{03}z).z' = a_{30}+a_{33}z,$$
$$(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})(a_{00}a_{33}-a_{03}a_{30}) \neq 0.$$

Darin sei $n>1$ eine natürliche Zahl, und $P_1(z)$ und $P_2(z)$ zwei Polynome in z vom Grad n.

Diese Gruppe tritt bei Lie-Engel, Transformationsgruppen III Seite 154 auf, wo sie als [12] numeriert ist[3]). Sie hängt von $2n+9$ wesentlichen Parametern ab. Für $n=2$ liegt die Gruppe (2) vor, im Falle $n=1$ eine projektive Gruppe.

Aus diesen Formeln kann man die Nenner fortschaffen, ganz wie in § 4; man führt dazu für den eigentlichen Punkt (x, y, z) die *Punktparameter*

$$(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_{11}, \sigma_{22})$$

ein vermöge

$$1:x:y:z:z^2:\ldots:z^n = \sigma_1^n:\sigma_{11}:\sigma_{22}:\sigma_1^{n-1}\sigma_2:\sigma_1^{n-2}\sigma_2^2:\ldots:\sigma_2^n.$$

Dann ergeben für $\varrho \neq 0$ die beiden Systeme

$$(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_{11}, \sigma_{22}) \text{ und } (\varrho\sigma_1, \varrho\sigma_2 : \varrho^n\sigma_{11}, \varrho^n\sigma_{22})$$

denselben eigentlichen Punkt ($\sigma_1 \neq 0$). Akzessorische Punkte werden dann wieder durch $\sigma_1 = 0$ definiert. Ein akzessorischer Punkt kann dann durch drei Bestimmungsstücke

$$\sigma_2^n : \sigma_{11} : \sigma_{22}$$

dargestellt werden, die homogen im üblichen Sinne sind. Daher hat man auch hier von einer akzessorischen Ebene zu reden. Für $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ liegen singuläre akzessorische Punkte vor.

Unsere Gruppe läßt sich jetzt so darstellen

$$\sigma_1' = a_{00}\sigma_1 + a_{03}\sigma_2, \qquad \sigma_2' = a_{30}\sigma_1 + a_{33}\sigma_2$$
$$\sigma_{11}' = b_{11}\sigma_{11} + b_{22}\sigma_{22} + c_{10}\sigma_1^n + c_{11}\sigma_1^{n-1}\sigma_2 + \cdots + c_{1n}\sigma_2^n$$
$$\sigma_{22}' = b_{21}\sigma_{11} + b_{22}\sigma_{22} + c_{20}\sigma_1^n + c_{21}\sigma_1^{n-1}\sigma_2 + \cdots + c_{2n}\sigma_2^n.$$

Die Koeffizientensysteme

$$(a, b, c) \quad \text{und} \quad (\varrho a, \varrho^n b, \varrho^n c)$$

stellen für $\varrho \neq 0$ dieselbe Transformation dar.

Auch hier lassen sich noch eigentliche und akzessorische Punkte

3) Auch bei G. Fano, Rendic. Acc. Linc. Ser. V, Vol. VII, S. 304.

Digitized by Google

gemeinsam darstellen durch Koordinaten, die im gewöhnlichen Sinne homogen sind:

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : \ldots : X_{n+2} = \sigma_1^n : \sigma_{11} : \sigma_{22} : \sigma_1^{n-1}\sigma_2 : \sigma_1^{n-2}\sigma_2^2 : \ldots \sigma_2^n .$$

In diesen Formeln liegt eine Abbildung unseres Cremonaschen Raumes auf die Punkte einer M_3^n, die in einem Raume R_{n+2} verläuft. Als Schnitt quadratischer Mannigfaltigkeiten M_{n+1}^2 läßt sich dies Gebilde dadurch gewinnen, daß man von der Matrix [4])

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_2 & X_4 & \ldots & X_{n+1} \\ X_2 & X_4 & X_5 & \ldots & X_{n+2} \end{matrix} \right\|$$

den Rang eins fordert. Die Ordnung n ergibt sich glatt, wenn man die M_3 mit dem R_{n-1} von den Gleichungen

$$X_1 = X_2 = X_{n+2} - X_0 = 0$$

zum Schnitt bringt. Die M_3^n trägt eine singuläre Gerade, ∞^3 sonstige gerade Linien und ∞^1 Ebenen. Deren Bilder im Cremonaraum sind wieder die Horizontalebenen.

Sind so die geraden Linien und Ebenen dieselben geblieben, wie im Falle $n = 2$, so gilt das nicht mehr für die Figuren im Cremonaraum, die sich auf die Schnittgebilde der M_3^n mit Räumen R_{n+1} abbilden. Sie sollen *Hauptflächen* heißen. Die allgemeinste Hauptfläche heißt dann

$$\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 y + \mathfrak{A}_3 z + \mathfrak{A}_4 z^2 + \cdots \mathfrak{A}_{n+2} z^n = 0 \text{ [4])}.$$

Sie ist für $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = 0$ reduzibel und besteht dann aus n Ebenen, die teilweise oder sämtlich zusammenfallen können, oder auch unsichtbar (akzessorisch) sind. Andernfalls liegt noch immer, wie im Falle $n = 2$ ein Zylinder mit horizontalen Erzeugenden vor, der vom affinen Standpunkt aus als nicht-horizontale Ebene in Erscheinung treten kann. Der Zylinder ist jetzt aber im allgemeinen ein solcher von der Ordnung n.

Die ∞^{2n+2} Zylinderschnitte (*eindimensionale* Schnittfiguren zweier Hauptflächen), soweit sie irreduzibel sind, sind Parabeln von der Ordnung n, wie man sich bisweilen ausdrückt; zu ihnen gehören auch die nicht-horizontalen geraden Linien affiner Anschauung. Von jeder (horizontalen) Ebene wird ein irreduzibler Zylinderschnitt in einem einzigen Punkte geschnitten. Die Gesamtheit der irreduziblen Zylinderschnitte läßt sich lückenlos umkehrbar eindeutig auf die der eigentlichen Punkte eines R_{2n+2} abbilden.

4) Hier weicht die Bezeichnung von der bisherigen für $n = 2$ ab.

Digitized by Google

Die Gruppe, bei der jeder akzessorische Punkt stehen bleibt, hängt von $2n+2$ Parametern ab; affin ist sie nur für $n = 2$.

Der akzessorische Punkt läßt sich sichtbar machen als Schar der ∞^{2n} durch ihn hindurchlaufenden Zylinderschnitte, falls er nicht singulär ist, andernfalls durch die ∞^{n+1} Hauptflächen, die durch ihn hindurchlaufen.

Der Stützpunkt von den Parametern

$$(0, 1; 0, 0)$$

kann auch hier eingeführt werden; die Hauptflächen durch ihn sind aber nicht mehr nur die Nichthorizontalebenen affiner Anschauung, sondern alle ∞^{n-1} Zylinder, deren Ordnung kleiner als n ist.

Digitized by Google

Ein Satz über trilineare Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks als Verallgemeinerung des Newton-Gaußschen Satzes vom vollständigen Vierseit[1]).

Von Max Zacharias in Berlin.

Einleitung. Drei Punkte X_i (i durchläuft hier und im folgenden immer die Werte 1, 2, 3) dreier Punktreihen a_i bilden einen Tripel einer *trilinearen Punktverwandtschaft* auf den Trägern a_i, wenn nach Annahme dreier Punktpaare P_iQ_i auf a_i eine Gleichung

$$\frac{P_1X_1}{X_1Q_1}\cdot\frac{P_2X_2}{X_2Q_2}\cdot\frac{P_3X_3}{X_3Q_3} = n \quad (n \text{ eine reelle Konstante})$$

besteht. Die Punkte P_iQ_i heißen die Grundpunkte der Reihen a_i, n heißt die Konstante der trilinearen Verwandtschaft. Sind die Geraden a_i die Seiten eines Dreiecks A_i und die Grundpunkte die Ecken des Dreiecks, so lautet die Gleichung der trilinearen Verwandtschaft

$$\frac{A_1X_3}{X_3A_2}\cdot\frac{A_2X_1}{X_1A_3}\cdot\frac{A_3X_2}{X_2A_1} = n,$$

wofür zur Abkürzung auch

$$(A, X) = n$$

geschrieben werden soll. $n = +1$ gibt die *Cevaverwandtschaft*, bei der sich die drei Geraden A_iX_i jedes Tripels in einem Punkte schneiden, $n = -1$ die *Menelaosverwandtschaft*, bei der die Punkte X_i jedes Tripels in einer geraden Linie liegen.

Hält man in einer trilinearen Verwandtschaft einen Punkt des Tripels, z. B. X_1, fest, so besteht für die beiden andern eine bilineare Gleichung

$$\frac{A_1X_3}{X_3A_2}\cdot\frac{A_3X_2}{X_2A_1} = \text{const.};$$

die beiden andern Punkte des Tripels sind also entsprechende Punkte zweier projektiven Punktreihen.

Die trilineare Verwandtschaft als Quelle dreiecksgeometrischer Sätze habe ich in zwei Mitteilungen[2]) behandelt. In meinem heu-

1) Vorgetragen in der 314. Sitzung am 27. November 1935.

2) I Zeitschr. f. math. u. naturw. Unt. 65, 1934, 325—328; II, in Verbindung mit O. Nehring, ebenda 67, 1936, 225—230, Forts. im nächsten Hft.

Digitized by Google

tigen Vortrage soll ein Satz über trilineare Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks mitgeteilt werden, der eine Reihe von stufenweise fortschreitenden Spezialisierungen zuläßt, als deren letzte sich *der Newton-Gaußsche Satz vom vollständigen Vierseit* ergibt. Dieser Satz, der sonst gewöhnlich in der Theorie der Kegelschnittschar als Satz vom Mittelpunktsort der Schar hergeleitet wird, erscheint hier in einem ganz andern Zusammenhange.

Werden die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits derart bezeichnet, daß Y_i irgend drei in einer Seite liegende Ecken und X_i die Gegenecken zu Y_i sind, so sind $X_i Y_i$ die drei Diagonalen, deren Schnittpunkte in passender Weise mit A_i bezeichnet werden sollen. Die Punkte $X_i Y_i$ teilen dann bekanntlich die Strecke $A_k A_l$ $(i, k, l = 1, 2, 3;\ i \neq k \neq l)$ harmonisch, und die Geraden $A_i X_i$ schneiden sich in einem Punkte P. Geht man bei der Betrachtung dieser Figur von dem Dreieck A_i aus, so kann man die Punkte X_i und Y_i als Tripel zweier trilinearen Verwandtschaften, und zwar einer Ceva- und einer Menelaosverwandtschaft, auf den Seiten des Dreiecks A_i ansehen. Der Newton-Gaußsche Satz sagt nun bekanntlich aus, daß die Mitten der drei Strecken $X_i Y_i$ in einer geraden Linie liegen. Man kann also den Newton-Gaußschen Satz auch folgendermaßen aussprechen: Sind X_i und Y_i irgend zwei solche Tripel der Ceva- und der Menelaosverwandtschaft auf den Seiten eines Dreiecks A_i, daß X_i und Y_i die Strecke $A_k A_l$ harmonisch teilen, so sind die Mitten der Abstände entsprechender Punkte beider Tripel in einer Menelaosverwandtschaft einander zugeordnet.

Von diesem Satze ausgehend bin ich durch stufenweise fortschreitende Verallgemeinerung zu einem allgemeinen Satze über trilineare Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks gelangt. Den Gang meiner Untersuchungen will ich nun in der umgekehrten Folge vom Allgemeinen zum Besonderen darlegen.

1. Auf den Seiten eines Dreiecks A_i liegen zwei Tripel von Punkten X_i und Y_i zweier trilinearen Verwandtschaften mit den Konstanten n_1 und n_2; es ist also

$$(1) \qquad (A, X) = n_1, \quad (A, Y) = n_2.$$

Gesucht ist irgend ein Tripel Z_i einer dritten Verwandtschaft mit der Konstante $n_1 . n_2$ (der *„Produktverwandtschaft"*). Es soll also sein

$$(2) \qquad (A, Z) = (A, X) \cdot (A, Y).$$

Wir beweisen zunächst einen

Digitized by Google

Hilfssatz: Gegeben ein Dreieck A_i und zwei Tripel U_i, V_i zweier verschiedenen trilinearen Punktverwandtschaften auf den Seiten des Dreiecks. Wird ein dritter Tripel W_i durch die beiden andern derart bestimmt, daß $U_1 V_2 W_3$, $U_2 V_3 W_1$, $U_3 V_1 W_2$ je in einer geraden Linie liegen, so ist $(A, U)\cdot(A, V)\cdot(A, W) = -1$.

Beweis: Nach der Konstruktion bestehen die Gleichungen

$$\frac{A_1 W_3}{W_3 A_2}\cdot\frac{A_2 U_1}{U_1 A_3}\cdot\frac{A_3 V_2}{V_2 A_1} = -1$$

$$\frac{A_1 V_3}{V_3 A_2}\cdot\frac{A_2 W_1}{W_1 A_3}\cdot\frac{A_3 U_2}{U_2 A_1} = -1$$

$$\frac{A_1 U_3}{U_3 A_2}\cdot\frac{A_2 V_1}{V_1 A_3}\cdot\frac{A_3 W_2}{W_2 A_1} = -1.$$

Die Multiplikation dieser Gleichungen ergibt die Behauptung. Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir den

Satz 1, den allgemeinen Satz über Produktverwandtschaften (Figur 1): X_i und Y_i seien irgend zwei Tripel zweier trilinearen Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks A_i, B_i sei irgend ein Tripel der Cevaverwandtschaft, C_i irgend ein Tripel der Menelaosverwandtschaft. Man bestimme den Tripel O_i derart, daß $B_1 X_2 O_3$, $B_2 X_3 O_1$, $B_3 X_1 O_2$ je in einer geraden Linie liegen. Man bestimme ferner den Tripel P_i derart, daß $Y_1 C_2 P_3$, $Y_2 C_3 P_1$, $Y_3 C_1 P_2$ je in einer geraden Linie liegen. Bestimmt man endlich den Tripel Z_i derart, das $O_1 P_2 Z_3$, $O_2 P_3 Z_1$, $O_3 P_1 Z_2$ je in einer geraden Linie liegen, so ist Z ein Tripel der Produktverwandtschaft, d. h.

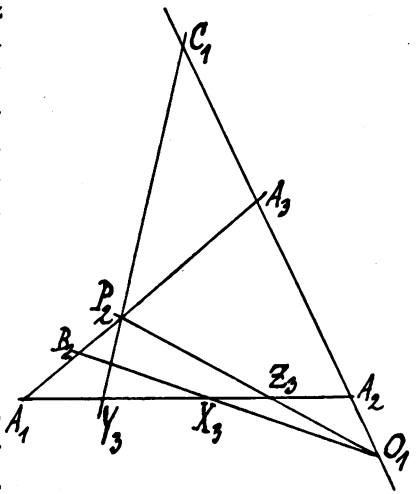


Fig. 1.

$$(A, Z) = (A, X)\cdot(A, Y).$$

Beweis: Nach dem Hilfssatze ist

$$(A, B)\cdot(A, X)\cdot(A, O) = -1.$$

Da nach der Voraussetzung $(A, B) = +1$ ist, so folgt hieraus

$$\text{(a)} \qquad (A, X)\cdot A, O) = -1.$$

Nach dem Hilfsatze ist

$$(A, Y)\cdot(A, C)\cdot A, P) = -1.$$

Digitized by Google

Da nach der Voraussetzung $(A, C) = -1$ ist, so folgt

$$(b) \qquad (A, Y) \cdot (A, P) = +1.$$

Multipliziert man die beiden Ergebnisse (a) und (b), so erhält man

$$(A, X) \cdot (A, Y) \cdot (A, O) \cdot (A, P) = -1.$$

Nach dem Hilfssatze ist aber auch

$$(A, O) \cdot (A, P) \cdot (A, Z) = -1.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$(A, Z) = (A, X) \cdot (A, Y).$$

Umkehrung: X_i und Y_i seien irgend zwei Tripel zweier trilinearen Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks A_i, B_i sei irgend ein Tripel der Cevaverwandtschaft und Z_i irgend ein Tripel der Produktverwandtschaft. Man bestimme den Tripel O_i derart, daß $B_1 X_2 O_3$, $B_2 X_3 O_1$, $B_3 X_1 O_2$ je in einer geraden Linie liegen. Man bestimme ferner den Tripel P_i derart, daß $Z_1 O_2 P_3$, $Z_2 O_3 P_1$, $Z_3 O_1 P_2$ je in einer geraden Linie liegen. Bestimmt man endlich den Tripel C_i derart, daß $P_1 Y_2 C_3$, $P_2 Y_3 C_1$, $P_3 Y_1 C_2$ je in einer geraden Linie liegen, so ist $(AC) = -1$, d. h. die Punkte C_i liegen in einer geraden Linie.

Beweis: Nach dem Hilfssatze und wegen $(A, B) = +1$ ist

$$(A, X) \cdot (A, O) = -1.$$

Nach dem Hilfssatze ist ferner

$$(A, Z) \cdot (A, O) \cdot (A, P) = -1.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$(A, Z) = (A, X) \cdot (A, Y),$$

also

$$(A, X) \cdot (A, Y) \cdot (A, O) \cdot (A, P) = -1,$$

folglich

$$(A, Y) \cdot (A, P) = +1.$$

Nach dem Hilfssatze ist endlich

$$(A, P) \cdot (A, Y) \cdot (A, C) = -1,$$

folglich

$$(A, C) = -1.$$

Die in dem Satze I angegebene Konstruktion liefert also, wenn man die Gerade der Punkte C_i das ganze Geradenfeld durchlaufen läßt, die sämtlichen Tripel der Produktverwandtschaft.

2. *Erste Spezialisierung:* X_i und Y_i teilen die Strecke $A_k A_l$ harmonisch (Fig. 2)

$$(3) \qquad (A_k A_l X_i Y_i) = -1.$$

Digitized by Google

Die Punkte Z_i werden auf die im Satze I angegebene Weise konstruiert. Die Punkte C_i werden jetzt dadurch bestimmt, daß C_i der Schnittpunkt von $B_k B_l$ und $A_k A_l$ ist. Da B_i ein Cevatripel ist, so liegen die Dreiecke A_i und B_i perspektiv bezüglich des Schnittpunktes von $A_i B_i$. Die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten, d. h. die Punkte C_i, liegen demnach, wie es sein muß, in einer geraden Linie. Die Punktpaare $B_i C_i$ sind also die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonaldreieck A_i ist. Nach der bekannten Eigenschaft des vollständigen Vierseits liegen also B_i und C_i harmonisch bezüglich $A_k A_l$. Daher ist

$$(A_1 A_2 X_3 Y_3) = (A_1 A_3 B_2 C_2) = -1,$$

d. h. $A_1 A_2 X_3 Y_3$ und $A_1 A_3 B_2 C_2$ sind entsprechende Würfe zweier projektiven Reihen. Da sich der Punkt A_1 in beiden Reihen selbst entspricht, liegen die Reihen perspektiv, d. h. $C_2 Y_3$ geht durch den Schnittpunkt O_1 von $A_2 A_3$ und $X_3 B_3$. $O_1 C_3$ schneide $A_1 A_3$ in D_2,

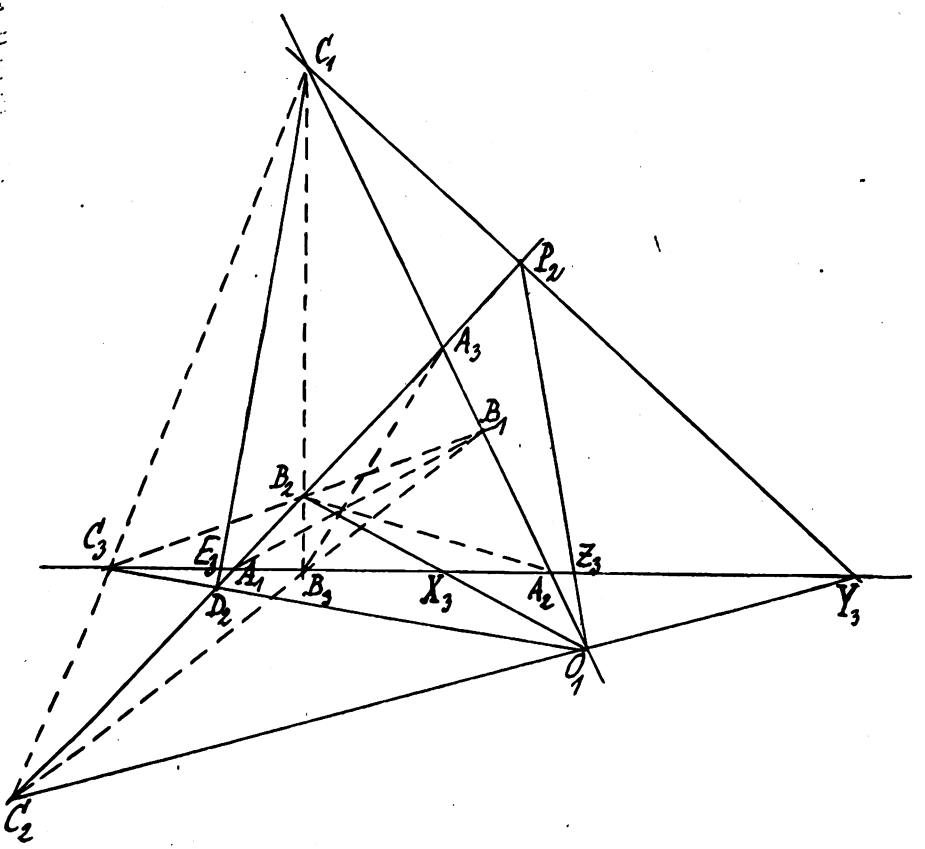


Fig. 2.

Digitized by Google

$D_2 C_1$ schneide $A_1 A_3$ in E_3. Das vollständige Viereck $D_2 C_1 C_2 O_1$ hat die drei Gegenseitenpaare $D_2 C_1$, $C_2 O_1$; $D_2 C_2$, $C_1 O_1$; $D_2 O_1$, $C_1 C_2$. Diese werden von der Geraden $A_1 A_2$ nach dem Desarguesschen Involutionssatze in drei Punktpaaren einer Involution geschnitten. Das sind die Punkte $E_3 Y_3$, $A_1 A_2$, $C_3 C_3$. C_3 ist also ein Doppelpunkt der Involution. Der zweite Doppelpunkt muß zu C_3 harmonisch liegen bezüglich jedes Paares der Involution. Also insbesondere bezüglich $A_1 A_2$. Der zweite Doppelpunkt ist also B_3, und $B_3 C_3$ liegen harmonisch bezüglich $E_3 Y_3$. Projiziert man diesen harmonischen Wurf aus C_1 auf $A_1 A_3$ und den erhaltenen Wurf aus O_1 wieder auf $A_1 A_3$ zurück, so ergibt sich

$$(B_3 C_3 Y_3 E_3) = (B_2 C_2 P_2 D_2) = (X_3 Y_3 Z_3 C_3) = -1,$$

d. h. Z_3 liegt harmonisch zu C_3 bezüglich X_3 und Y_3.

Da die Punkte Z_i auf die in Satz I angegebene Weise konstruiert worden sind, so bilden sie einen Tripel der Produktverwandtschaft, d. h. es ist

$$(A, Z) = (A, X) \cdot (A, Y).$$

Nach der Voraussetzung liegen X_i und Y_i harmonisch bezüglich $A_k A_l$, es ist also

$$\frac{A_k X_i}{X_i A_l} = -\frac{A_k Y_i}{Y_i A_l},$$

daher $(A, X) = -(A, Y)$ und

$$(4) \qquad (A, Z) = -(A, X)^2 = -(A, Y)^2.$$

Satz II: Auf den Seiten eines Dreiecks A_i sind irgend zwei Tripel X_i und Y_i zweier trilinearen Punktverwandtschaften von der Beschaffenheit gegeben, daß X_i und Y_i bezüglich $A_k A_l$ harmonisch liegen. Eine beliebige Gerade c schneidet die Seiten des Dreiecks in den Punkten C_i. Bestimmt man zu jedem Punkte C_i den bezüglich $X_i Y_i$ harmonisch liegenden Punkt Z_i, so bilden die Punkte Z_i einen Tripel einer dritten trilinearen Verwandtschaft, deren Konstante gleich dem negativen Quadrat der Konstante jeder der beiden gegebenen Verwandtschaften ist.

Läßt man die Gerade c das ganze ebene Geradenfeld durchlaufen, so erhält man alle Tripel Z_i der dritten Verwandtschaft. Ist insbesondere c die uneigentliche Gerade der Ebene, so werden die Punkte C_i die uneigentlichen Punkte der Dreiecksseiten und die Punkte Z_i die Mitten der Strecken $X_i Y_i$.

Digitized by Google

3. *Zweite Spezialisierung:* X_i bilde einen Tripel der Cevabeziehung, also $(A, X) = +1$ und daher $(A, Y) = -1$. Dann folgt aus (4)

5) $$(A, Z) = -1,$$

d. h. die Punkte Z_i liegen in einer Geraden:

Satz III: Ist X_i ein Tripel der Cevaverwandtschaft auf den Seiten eines Dreiecks A_i, teilen X_i und Y_i die Seite $A_k A_l$ harmonisch, schneidet ferner eine beliebige Gerade c die Seiten des Dreiecks in den Punkten C_i, und liegt Z_i zu C_i harmonisch bezüglich $X_i Y_i$, so liegen die Punkte Z_i in einer geraden Linie.

Ist c die uneigentliche Gerade der Ebene, so sind die Punkte C_i die uneigentlichen Punkte der Dreiecksseiten und die Punkte Z_i die Mitten der Strecken $X_i Y_i$:

Satz IV: Ist X_i ein Tripel der Cevaverwandtschaft auf den Seiten eines Dreiecks A_i, und teilen die Punkte X_i und Y_i die Seite $A_k A_l$ harmonisch, so liegen die Mitten der Strecken $X_i Y_i$ in einer geraden Linie.

Das ist aber nur eine andere Form des Satzes von Newton und Hauß vom vollständigen Vierseit; denn die Punkte Y_i liegen wegen $(A, Y) = -1$ ebenfalls in einer geraden Linie, und $X_i Y_i$ sind die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits mit dem Diagonaldreieck A_i.

4. Als Ergänzung zu den in meiner zweiten Mitteilung (S. 17, Anm. 2) angeführten Konstruktionen von Tripeln einer trilinearen Punktverwandtschaft mit gegebener Konstante n sei hier noch eine einfache Konstruktion angegeben, durch die man aus einem gegebenen Tripel einer solchen Verwandtschaft beliebig viele andere Tripel derselben Verwandtschaft herleiten kann. Es sei X_i irgend ein Tripel der trilinearen Verwandtschaft mit der Konstante n auf den Seiten des Dreiecks A_i, also

$$(A, X) \equiv \frac{A_1 X_3}{X_3 A_2} \cdot \frac{A_2 X_1}{X_1 A_3} \cdot \frac{A_3 X_2}{X_2 A_1} = n.$$

Y_3 sei der Schnittpunkt von $X_1 X_2$ und $A_1 A_2$, also

$$\frac{A_1 Y_3}{Y_3 A_2} \cdot \frac{A_2 X_1}{X_1 A_3} \cdot \frac{A_3 X_2}{X_2 A_1} = -1.$$

Daraus folgt

6) $$\frac{A_1 X_3}{X_3 A_2} : \frac{A_1 Y_3}{Y_3 A_2} = -n.$$

Digitized by Google

Hierzu kommen zwei durch zyklische Vertauschung der Ziffern gewonnene entsprechende Gleichungen. Die Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt

$$(A, X):(A, Y) = -n^3,$$

also

$$(A, Y) = -\frac{1}{n^2}.$$

Ist insbesondere $n = +1$, so liegt Y_i harmonisch zu X_i bezüglich $A_k A_l$, und die Punkte Y_i liegen in einer geraden Linie, der Polare des Schnittpunktes der Eckenlinien $A_i X_i$ bezüglich des Dreiecks. Man könnte daher im allgemeinen Falle etwa Y_i einen Tripel der verallgemeinerten Polarverwandtschaft zu X_i nennen.

Hier kommt von diesem Tripel nur die Eigenschaft (6) in Frage, daß die Lage von Y_3 nicht von X_1 und X_2, sondern nur von X_3 und n abhängt. Y_3 bleibt also für alle Paare $X_1 X_2$, die mit dem festen Punkte X_3 Tripel derselben Verwandtschaft bilden, unverändert. Dreht man die Gerade $Y_3 X_1$ um Y_3, so erhält man also die sämtlichen Tripel X_i der gegebenen Verwandtschaft mit dem festen Punkt X_3.

An der Hand dieser Konstruktion kann man die Aufgabe lösen: Gegeben das Dreieck A_i, ein Tripel X_i einer trilinearen Verwandtschaft und zwei Punkte X_1' und X_2'; den dritten Punkt X_3' des Tripels X_i' derselben Verwandtschaft zu konstruieren. Lösung: $Y_3 X_1'$ ergibt einen Punkt X_2'', $X_2'' X_3$ liefert einen Punkt Y_1, und $Y_1 X_2'$ ergibt den gesuchten Punkt X_3'.

Digitized by Google

Zur Möbiusschen und Laguerreschen Kreisgeometrie in der Minimalebene[1]).

Von Ulrich Graf in Berlin.

1. Metrische Begriffe. Einer Minimalebene[2]) des euklidischen Raumes ist eine Metrik aufgeprägt, der als Fundamentalgebilde der (doppelt zählende) Berührungspunkt mit dem uneigentlichen Kugelkreis zugrunde liegt. Wird in der Repräsentantenebene[3]) der Minimalebene als dieser Fundamentalpunkt der uneigentliche Punkt der η-Achse eines rechtwinkligen $\xi-\eta$-Systems gewählt, so ist bei dieser Koordinatenwahl die *Entfernung* d zweier Punkte ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 durch

$$d = \xi_1 - \xi_2,$$

die *Sperrung* φ zweier Geraden μ_1, ν_1 und μ_2, ν_2 (mit den Gleichungen $\eta = \mu_i \xi + \nu_i$; $i = 1, 2$) durch

$$\varphi = \mu_1 - \mu_2$$

gegeben. Die „Kreise" der Minimalebene erscheinen (euklidisch gesehen) als Parabeln durch den metrisch ausgezeichneten uneigentlichen Fundamentaldoppelpunkt.

2. Stereographische und zyklographische Projektion. Ähnlich, wie in einer euklidischen Ebene die *Möbius*sche Kreisgeometrie mit Hilfe der *stereographischen*, die *Laguerre*sche Kreisgeometrie mit Hilfe der *zyklographischen* Projektion entwickelt werden kann, lassen sich diese beiden kreisgeometrischen Gruppen auch in der Minimal-

1) Vorgetragen in der 317. Sitzung am 26. Februar 1936.

2) Die Geometrie in der Minimalebene ist von E. Study (Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven, Transact. Amer. Math. Soc. 10, 1909, S. 1—50) und H. Beck (Zur Geometrie in der Minimalebene, Sitzungsber. d. Berliner Math. Gesellsch. XII, 1913, S. 14—30) untersucht. Vgl. ferner L. Berwald, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie in einer Minimalebene, Monatshefte f. Math. und Phys. 26, 1915, S. 211—228 und K. Strubecker, Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes, Monatshefte f. Math. u. Phys. 42, 1935, S. 309—376.

3) Durch eine imaginäre Affinität läßt sich diese in die Minimalebene überführen.

Digitized by Google

ebene anschaulich auf Grund dieser beiden (abgeänderten [4]) Abbildungen untersuchen, wobei die vollständige Dualität der Punkt- und Geradengeometrie in der dual-parabolischen Metrik einer Minimalebene ihren Ausdruck in der vollständigen dualen Analogie von stereographischer und zyklographischer Projektion findet.

In homogenen Punktkoordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ sei eine einfach-singuläre Fläche zweiter Ordnung durch die Gleichung

$$F^2 : x_0^2 - x_1^2 - x_3^2 = 0$$

festgelegt. Die Punktreihe durch den festen Punkt

$$S(1:0:0:1)$$

auf F^2 und einen Punkt x_λ von F^2 trifft die feste Bildebene $x_3 = 0$ in dem Punkt

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 = (x_0 - x_3) : x_1 : x_2 : 0.$$

In homogenen Ebenenkoordinaten $\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3$ sei eine einfach-singuläre Fläche zweiter Klasse durch die Gleichung

$$\Pi^2 : \mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_3^2 = 0$$

festgelegt. Der Ebenenbüschel durch die feste Ebene

$$\sigma(1:0:0:1)$$

von Π^2 und eine Ebene $\mathfrak{x}_\lambda$ von Π^2 trifft den festen Bild-Ebenenbündel $\mathfrak{x}_3 = 0$ in der Ebene

$$\mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3 = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_3) : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : 0.$$

Beim Übergang zu den inhomogenen Punktkoordinaten

$$1 : x : y : z = x_0 : x_1 : x_2 : x_3$$

ist jedem Punkt x, y, z des Zylinders

$$F^2 : x^2 + z^2 = 1$$

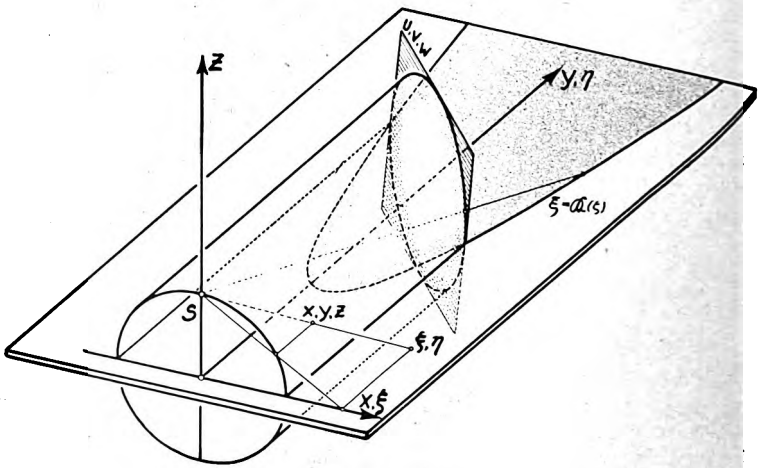


Bild 1.

4) Vgl. eine solche zyklographische Projektion bei E. Müller-Krames, Die Zyklographie, Leipzig/Wien 1929, S. 460.

Digitized by Google

der Punkt

$$\xi = \frac{X_1}{X_0} = \frac{x}{1-z}, \quad \eta = \frac{X_2}{X_0} = \frac{y}{1-z}$$

der Bildebene $z = 0$ zugeordnet (Bild 1).

Beim Übergang zu den inhomogenen Ebenenkoordinaten

$$1 : u : v : w = \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_3) : \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_3)$$

ist jeder Ebene u, v, w des Klassenkegelschnitts

$$u^2 - 2vw = 0,$$

der von der uneigentlichen Ebene getragen wird, die Ebene

$$U = u, \quad V = W = v$$

des Ebenenbündels $v = w$ zugeordnet. Diese Ebene schneidet die Grundebene $1 : u : v : w = 0 : 0 : 0 : 1$ in der Geraden

$$u.\xi + v.\eta + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \eta = \mu.\xi - \nu,$$

wobei $\mu : \nu : 1 = -u : 1 : v$ ist (Bild 2).

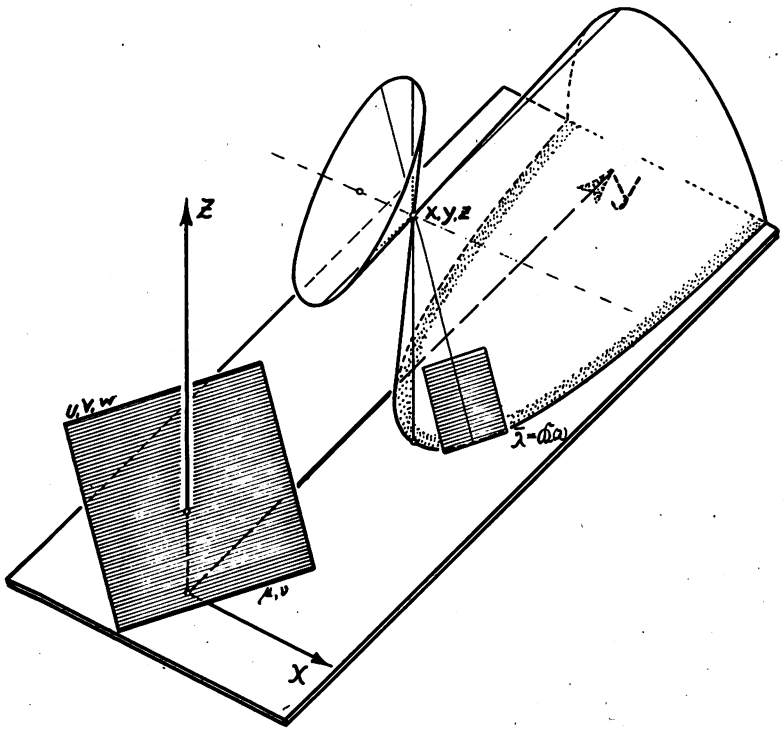


Bild 2.

Digitized by Google

Die Grundebene dieser stereographischen (Bild 1) bzw. zyklographischen (Bild 2) Projektion ist der reelle Repräsentant einer Minimalebene, deren dual-parabolischer Metrik der uneigentliche Punkt der η-Achse als (doppelt zählender) Fundamentalpunkt zugrunde liegt[5]).

Jeder Punkt ξ, η wird durch eine duale Zahl $\zeta = \xi + \varepsilon\eta$ $(\varepsilon^2 = 0)$ festgelegt. Eine duale Zahl $\omega = \sigma + \varepsilon\tau$ bestimmt demnach sowohl einen Punkt als auch eine Gerade der Minimalebene; diese beiden Elemente sind durch die Polarverwandtschaft am (parabolischen) Einheitskreise $\xi^2 - 2\eta = 0$ miteinander verknüpft.

Jede Gerade μ, ν wird durch eine duale Zahl $\lambda = \mu + \varepsilon\nu$ $(\varepsilon^2 = 0)$

Der analytische Ausdruck der *stereographischen* Projektion lautet in den dualen Zahlen

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\varepsilon(\zeta\bar{\zeta} + 1)},$$

$$z = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1}; \quad \zeta = \frac{x + \varepsilon y}{1 - z}.$$

Der analytische Ausdruck der *zyklographischen* Projektion lautet in den dualen Zahlen

$$u = \frac{\varepsilon(\bar{\lambda} + \lambda)}{\bar{\lambda} - \lambda}, \quad v = \frac{2\varepsilon}{\lambda - \bar{\lambda}},$$

$$w = \frac{\varepsilon\lambda\bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\lambda}}; \quad \lambda = \frac{-u + \varepsilon}{v}.$$

Einer Ebene u, v, w mit der Gleichung

$$u.x + v.y + w.z + 1 = 0$$

entspricht der (parabolische) Ordnungskreis

$$\varepsilon p.\zeta\bar{\zeta} + \alpha\zeta - \bar{\alpha}\bar{\zeta} + \varepsilon q = 0,$$

wobei

$\alpha = v + \varepsilon u$, $p = 1 + w$, $q = 1 - w$ ist.

Einem Punkt x, y, z mit der Gleichung

$$x.u + y.v + z.w + 1 = 0$$

entspricht der (parabolische) Klassenkreis

$$\varepsilon r.\lambda\bar{\lambda} + \beta\lambda - \bar{\beta}\bar{\lambda} + \varepsilon s = 0,$$

wobei

$\beta = 1 - \varepsilon x$, $r = z$, $s = 2y$ ist.

Die Gleichung

$$\varepsilon l.\omega\bar{\omega} + \gamma\omega - \bar{\gamma}\bar{\omega} + \varepsilon m = 0$$

oder

$$\bar{\omega} = \frac{\gamma\omega + \varepsilon m}{-\varepsilon l\omega + \bar{\gamma}}$$

stellt demnach, je nachdem ω als Punktkoordinate $(\omega = \zeta = \xi + \varepsilon\eta)$ oder als Geradenkoordinate $(\omega = \lambda = \mu + \varepsilon\nu)$ gedeutet wird, einen Ordnungskreis oder einen Klassenkreis der Minimalebene dar. Seine

5) Vgl. die stereographische Projektion eines Zylinders bei J. Grünwald, Über duale Zahlen und ihre Anwendungen in der Geometrie, Monatshefte f. Math. u. Phys. 17, 1906, S. 81.

Digitized by Google

Gleichung ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon m \\ -\varepsilon l & \bar{\gamma} \end{pmatrix}, \quad m, l \text{ reell}$$

sowie durch jede sich von dieser nur durch konstante Zahlfaktoren mit nicht verschwindendem Realteil unterscheidende Matrix festgelegt. Die Gesamtheit dieser Matrizen wird als Kreiselement[6]) $\mathfrak{K}$ bezeichnet; es ist

$$\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{E},$$

wenn $\overline{\mathfrak{K}}$ das konjugierte Kreiselement und $\mathfrak{E}$ das Einheitselement bedeutet. Die Gleichung des Kreises läßt sich in der Form $\overline{\omega} = \mathfrak{K}(\omega)$ schreiben. Er ist reduzibel für $|\mathfrak{K}| = 0$ und irreduzibel für $|\mathfrak{K}| \neq 0$. Ein reduzibler Ordnungskreis besteht aus einem Paar isotroper Geraden ($\zeta + \bar{\zeta} = \text{const.}$), ein reduzibler Klassenkreis aus einem Paar Parallelenbüschel ($\lambda + \bar{\lambda} = \text{const.}$).

3. Kreisverwandtschaften. Durch linear gebrochene Substitutionen

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \mathfrak{S}(\omega), \quad \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad |\mathfrak{S}| . |\overline{\mathfrak{S}}| \neq 0$$

in dualen Zahlen ist die Gruppe der eigentlichen Kreisverwandtschaften in der Minimalebene dargestellt, und zwar, je nachdem ω als Punktkoordinate ($\omega = \zeta = \xi + \varepsilon\eta$) oder als Geradenkoordinate ($\omega = \lambda = \mu + \varepsilon\nu$) gewählt wird, die *Möbius*sche oder die *Laguerre*sche Gruppe. In dieser gemeinsamen Darstellung findet die vollständige Dualität zwischen Punkt- und Geradengeometrie in der Minimalebene ihren Ausdruck. Invariant bleibt bei diesen Transformationen die Sperrung zweier Ordnungskreise ($\omega = \zeta$) bzw. die Distanz zweier Klassenkreise ($\omega = \lambda$). Die Gruppe der uneigentlichen Kreisverwandtschaften, bei denen Sperrung bzw. Distanz ihr Vorzeichen ändern, ist durch

$$\overline{\omega}' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \mathfrak{S}(\omega), \quad \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad |\mathfrak{S}| . |\overline{\mathfrak{S}}| \neq 0$$

gegeben[7]).

Die stereographische Projektion auf den Zylinder F^2 bzw. die zyklographische Projektion auf den Kegelschnitt Π^2 vermittelt die

6) E. Jacobsthal, Zur Theorie der linearen Abbildungen, Sitzungsber. der Berliner Math. Gesellsch. XXXIII, 1934, S. 15.

7) Die erweiterten Gruppen, bei deren Transformationen die Verhältnisse der Sperrungen bzw. Distanzen invariant bleiben, werden hier nicht betrachtet.

Digitized by Google

Isomorphie der Kreisverwandtschaften in der Minimalebene zur Gruppe der automorphen Kollineationen dieser Bezugsflächen. Werden F^2 bzw. Π^2 als absolute Gebilde einer räumlichen Metrik aufgefaßt, so ist die Isomorphie der eigentlichen bzw. uneigentlichen Kreisverwandtschaften zu den Bewegungen bzw. Umlegungen dieser Maßbestimmungen gegeben, wobei die Invarianz von Strecke bzw. Winkel bei den räumlichen starren Transformationen mit der Invarianz von Distanz bzw. Sperrung Hand in Hand geht.

4. Involutorische Kreisverwandtschaften. Den involutorischen starren Transformationen der Bezugsräume $\{F^2\}$ bzw. $\{\Pi^2\}$, d. h. den Spiegelungen an Punkt, Gerade und Ebene, entsprechen die involutorischen Kreisverwandtschaften der Minimalebene, d. h. die *Möbius*schen (*Laguerre*schen) Spiegelungen am Kreise, am Kreisbüschel (an der Kreisschar) und am Kreisbündel (Kreisheer).

a) Spiegelung am Kreis. Die *Möbius*sche ($\omega = \zeta$) oder *Laguerre*sche ($\omega = \lambda$) Spiegelung am Kreise $\bar{\omega} = \mathfrak{K}(\omega)$ ist durch

$$\bar{\omega}' = \mathfrak{K}(\omega)$$

gegeben[8]). Da $\omega' + \bar{\omega}' = \omega + \bar{\omega}$ wird, bleibt jeder Punkt auf seiner Minimalgeraden bzw. jede Gerade in ihrem Parallelenbüschel; der die Spiegelung vermittelnde Kreis $\bar{\omega} = \mathfrak{K}(\omega)$ bleibt fest. Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen an irreduziblen Kreisen ergeben (im Gegensatz zu den *Möbius*schen und in Übereinstimmung mit den *Laguerre*schen Verwandschaften in der *euklidischen* Ebene) niemals wieder eine involutorische Kreisverwandtschaft. Die an den beiden Kreisen $\bar{\omega} = \mathfrak{K}_1(\omega)$ und $\bar{\omega} = \mathfrak{K}_2(\omega)$ nacheinander ausgeführten Spiegelungen führen nämlich auf $\omega' = \bar{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2(\omega)$, eine eigentliche Kreisverwandtschaft, die dann und nur dann involutorisch ist, wenn $\omega'' = \bar{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 \bar{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2(\omega) = \omega$, also $\bar{\mathfrak{K}}_1 \mathfrak{K}_2 = \bar{\mathfrak{K}}_2 \mathfrak{K}_1$ ist. Aus dieser Bedingung[9]) aber folgt, da $\varepsilon^2 = 0$ ist, $|\mathfrak{K}_1| \cdot |\mathfrak{K}_2| = 0$, d. h. nicht beide Kreise können irreduzibel sein.

b) Spiegelung am Kreisbüschel (an der Kreisschar). Die *Möbius*sche ($\omega = \zeta$) Spiegelung am Kreisbüschel bzw. *Laguerre*sche ($\omega = \lambda$) Spiegelung an der Kreisschar ergibt sich aus der Spiegelung an einer Geraden im F^2- bzw. Π^2-Raum als eine eigentliche Kreisverwandtschaft der Form

8) Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen $\bar{\omega}'' = \mathfrak{K}(\omega') = \mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}(\bar{\omega})$ ergeben, da $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{E}$ ist, die Identität.

9) Diese Bedingung ist die Orthogonalitätsbedingung für die Kreise der euklidischen Ebene (E. Jacobsthal, Anm. 6).

Digitized by Google

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega-\alpha} = \mathfrak{B}(\omega); \quad |\mathfrak{B}|.|\overline{\mathfrak{B}}| \neq 0.$$

Für die Büschelelemente $\mathfrak{B}$ gilt

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}.$$

Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen $\omega' = \mathfrak{B}_1(\omega)$ und $\omega'' = \mathfrak{B}_2(\omega')$ können (in Übereinstimmung mit der *Möbius*schen und der *Laguerre*schen Spiegelung in der *euklidischen* Ebene) wieder eine involutorische Kreisverwandtschaft ergeben, und zwar muß dann $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{E}$, d. h. $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1$ sein. Zwei solche Kreisbüschel (Kreisscharen) heißen zueinander orthogonal; die Spiegelungen an ihnen sind vertauschbar.

c) Spiegelung am Kreisbündel (Kreisheer). Die *Möbius*sche ($\omega = \xi$) Spiegelung am Kreisbündel bzw. die *Laguerre*sche ($\omega = \lambda$) Spiegelung am Kreisheer ergibt sich aus der Spiegelung an einem Punkt im F^3-Raum bzw. der Spiegelung an einer Ebene im Π^3-Raum als eine uneigentliche Kreisverwandtschaft der Form

$$\overline{\omega}' = \frac{\gamma\omega+m}{l\omega-\overline{\gamma}} = \mathfrak{H}(\omega); \quad |\mathfrak{H}| \neq 0, \quad m, l \text{ reell}.$$

Für die Bündelelemente $\mathfrak{H}$ gilt

$$\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{E}.$$

Bei der Spiegelung $\overline{\omega}' = \mathfrak{H}(\omega)$ bleibt der *reduzible* Kreis

$$\varepsilon l.\omega\overline{\omega} - \frac{\varepsilon}{2}(\gamma+\overline{\gamma})(\omega+\overline{\omega}) - \varepsilon m = 0$$

fest. Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen $\overline{\omega}' = \mathfrak{H}_1(\omega)$ und $\overline{\omega}' = \mathfrak{H}_2(\omega)$ können (in Übereinstimmung mit der *Möbius*schen und *Laguerre*schen Spiegelung in der *euklidischen* Ebene) wieder eine involutorische Kreisverwandtschaft $\omega' = \mathfrak{B}(\omega) = \overline{\mathfrak{H}}_1\mathfrak{H}_2(\omega)$ ergeben, und zwar muß dann $\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{H}}_1\mathfrak{H}_2\overline{\mathfrak{H}}_1\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{E}$, also $\overline{\mathfrak{H}}_1\mathfrak{H}_2 = \overline{\mathfrak{H}}_2\mathfrak{H}_1$ sein. Zwei solche Kreisbündel (Kreisheere) heißen zueinander orthogonal; die Spiegelungen an ihnen sind miteinander vertauschbar.

Der wesentliche Unterschied der involutorischen Kreisverwandtschaften in der Minimalebene gegenüber denen der euklidischen Ebene ist in dem Fehlen einer Orthogonalität in der dual-paraboischen Metrik der Minimalebene begründet. Der in der euklidischen Ebene einem Kreise zugeordnete Orthogonalbündel besteht hier stets aus dem Bündel der reduziblen Kreise, während einem eigentlichen Kreisbündel an Stelle eines Orthogonalkreises ein reduzibler Kreis (nicht mehr eineindeutig) zugeordnet ist. Die Gruppe der

Digitized by Google

Kreisverwandtschaften in der Minimalebene läßt sich nicht mehr aus Spiegelungen an Kreisen, wohl aber aus Spiegelungen an Kreisbündeln aufbauen. Dieser Strukturunterschied zwischen den Kreisverwandtschaften einer euklidischen Ebene und einer Minimalebene findet seinen analytischen Ausdruck darin, daß in den dualen Zahlen $\omega = \sigma + \varepsilon\tau$, $\varepsilon^2 = 0$ die Bedingung $\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{E}$ für ein Kreiselement $\mathfrak{S}$ auf zwei Formen

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon m \\ -\varepsilon l & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \gamma & m \\ l & -\bar{\gamma} \end{pmatrix}$$

führt [10]), während sich in den normal-komplexen Zahlen $\sigma + i\tau$, $i^2 = -1$ nur eine Form

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \alpha & ip \\ iq & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad p, q \text{ reell}$$

ergibt.

Die Gruppe der Kreisverwandtschaften in der Minimalebene ist holomorph zur Gruppe der automorphen Kollineationen einer parabolischen Kongruenz; den involutorischen Kreisverwandtschaften $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ entsprechen die primären und sekundären Involutionen der Kongruenz [11]).

5. Die Gruppe der Zylinderschiebungen und Zylinderdrehungen. In gleicher Weise, wie sich bei der üblichen stereographischen Projektion die Drehungen der Bezugskugel durch Kreisverwandtschaften ausdrücken lassen, lassen sich hier die Schiebungen und Drehungen des Bezugszylinders darstellen.

a) Die Schiebungen. Eine Zylinderschiebung $\mathfrak{T}$ wird aus zwei Spiegelungen an Kreisen der Form

$$\overline{\omega} = \mathfrak{K}(\omega), \quad \mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon h \\ \varepsilon h & 1 \end{pmatrix}, \quad h \text{ reell}$$

erzeugt; die Zusammensetzung zweier solcher Spiegelungen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ergibt

$$\omega' = \overline{\mathfrak{K}}_2 \mathfrak{K}_1(\omega) = \mathfrak{T}(\omega); \quad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon(h_2 - h_1) \\ -\varepsilon(h_2 - h_1) & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $t = 2.(h_2 - h_1)$ die Verschiebungsstrecke ist. Für solche Translationselemente $\mathfrak{T}$ gilt $\mathfrak{T}\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}\mathfrak{T}' = \mathfrak{E}$, wenn $\mathfrak{T}'$ die transponierte Matrix ist. $\mathfrak{T}$ ist ein Kreiselement.

10) Die Division durch ε ist verboten!

11) Vgl. St. Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. 27, 1928, S. 427.

Digitized by Google

b) Die Drehungen. Eine Zylinderdrehung $\mathfrak{R}$ wird aus zwei Spiegelungen an Kreisbündeln der Form

$$\bar{\omega} = \mathfrak{H}(\omega), \quad \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ l & -1 \end{pmatrix}, \quad l \text{ reell}$$

erzeugt; die Zusammensetzung zweier solcher Spiegelungen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ ergibt

$$\omega' = \bar{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{H}_1(\omega) = \mathfrak{R}(\omega), \quad \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & \vartheta \\ -\vartheta & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\varphi = 2 \,.\, \text{arc tg}\, \vartheta = 2 \,.\, \text{arc tg}\, \frac{l_1 - l_2}{1 + l_1 l_2}$$

der Drehwinkel ist. Für solche Rotationselemente $\mathfrak{R}$ gilt $\mathfrak{R} = \bar{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = \mathfrak{E}$, d. h. $\mathfrak{R}$ ist orthogonal.

Die Zusammensetzung von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{R}$ führt auf eine kinematische Transformation

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{R}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon\vartheta t & \vartheta + \varepsilon t \\ -(\vartheta + \varepsilon t) & 1 - \varepsilon\vartheta t \end{pmatrix},$$

wobei $\mathfrak{V}\mathfrak{V}' = \mathfrak{E}$ ist.

6. Die linearen Transformationen. Unter den Kreisverwandtschaften $\omega' = \mathfrak{S}(\omega)$ sind für $c = 0$ die linearen Verwandtschaften

$$\omega' = a\omega + b, \quad a\bar{a} \neq 0$$

enthalten. Die sich so in der *Möbius*schen Kreisgeometrie ergebende Untergruppe

$$\zeta' = a\zeta + b$$

hat nicht nur die *Sperrung*, sondern, da

$$(\zeta_1' + \bar{\zeta}_1') - (\zeta_2' + \bar{\zeta}_2') = \frac{a + \bar{a}}{2} \cdot [(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1) - (\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)]$$

ist, auch die *Entfernungsverhältnisse* zu Invarianten. Es handelt sich um die viergliedrige *Grenzgruppe der automorphen Ähnlichkeiten* der Minimalebene [12]).

*Laguerre*schen Kreisgeometrie ergebende Untergruppe

$$\lambda' = a\lambda + b$$

hat nicht nur die *Entfernung*, sondern da

$$(\lambda_1' + \bar{\lambda}_1') - (\lambda_2' + \bar{\lambda}_2') = \frac{a + \bar{a}}{2} \cdot [(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1) - (\lambda_2 + \bar{\lambda}_2)]$$

ist, auch die *Sperrungsverhältnisse* zu Invarianten. Es handelt sich um die viergliedrige *Gruppe der automorphen Bewegungen* in der Minimalebene [12]).

12) Die Invarianten dieser Gruppen sind von L. Berwald (Anm. 2) genau untersucht.

Digitized by Google

Der gemeinsame dreigliedrige Durchschnitt dieser beiden Gruppen ergibt die *Bewegungen der Grenzgruppe* in der Form

$$\omega' = e^{\varepsilon\varphi} . \omega + b,$$

die der Darstellung der Bewegungen in einer euklidischen Ebene mit Hilfe der normal-komplexen Zahlen $x + iy$ genau entsprechend gebaut ist.

Die *Umlegungen der Grenzgruppe*, bei denen die Sperrung invariant ist, die Entfernungen dagegen ihr Vorzeichen ändern, sind durch

$$\zeta' = -e^{\varepsilon\varphi_1} . \xi + b_1$$

bzw.

$$\lambda' = +e^{\varepsilon\varphi_2} . \bar{\lambda} + b_2,$$

ihr duales Gegenstück, also die Transformationen, die die Entfernungen fest lassen und das Vorzeichen der Sperrungen ändern, durch

$$\zeta' = +e^{\varepsilon\varphi_1} . \bar{\xi} + b_1$$

bzw.

$$\lambda' = -e^{\varepsilon\varphi_2} . \lambda + b_2$$

gegeben.

Die metrischen Transformationen in der Minimalebene sind somit in den Kreisverwandtschaften enthalten.

Digitized by Google

Verallgemeinerung der Schiebungsflächen [1]).

Von Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

Die Schiebungsflächen können durch drei verschiedene Eigenschaften gekennzeichnet werden. Deshalb liegt die Frage nahe, ob man durch natürliche Verallgemeinerung in allen drei Fällen zum selben Ergebnisse kommt. Hauptzweck des Vortrages ist, dies zu zeigen. Da die Flächen, zu denen man auf diesem methodischen Wege gelangt, schon vor längerer Zeit entdeckt worden sind, bietet der Vortrag an geometrischen Tatsachen nicht viel Neues. Hoffentlich genügen die geschichtlichen Nachweise den Ansprüchen, die man billiger Weise machen kann [2]).

Zunächst ist an jene drei kennzeichnenden Eigenschaften der Schiebungsflächen zu erinnern:

1. Erste Definition der Schiebungsflächen. Gaspard Monge [3]) hat wohl zuerst die Fläche betrachtet, die von einer starren Kurve beschrieben wird, die sich stetig verschiebt, indem man etwa einem ihrer Punkte eine bestimmte Bahn anweist. Er bemerkte natürlich sofort, daß die Fläche nicht nur unendlichviele mit der starren Kurve kongruente und gleichgestellte Kurven enthält, sondern auch die Bahnen aller Punkte der starren Kurve miteinander kongruent und gleichgestellt sind. Aber er stellte diese Schiebungsfläche, der er übrigens noch keinen besonderen Namen gab, noch etwas unbeholfen dar. Erst bei dem russischen Mathematiker Karl Peterson [4]) der die Fläche als Verschiebungs-

1) Vorgetragen in der 321. Sitzung am 17. Juni 1936.

2) Herr E. Salkowski hatte die Freundlichkeit, mich auf einige in Betracht kommende Stellen hinzuweisen, wofür ich ihm besten Dank sage.

3) *„Application de l'analyse à la géométrie"*, etwa die am bequemsten zugängliche 5. Aufl. Paris 1850, S. 111—124, die bekanntlich ein wortgetreuer Abdruck der 4. von 1809 ist.

4) *„Über Kurven und Flächen"*, Moskau und Leipzig 1868, S. 68. Über Petersons Leben und Leistungen hat Paul Stäckel in der Bibl. math. 3. Folge, 2. Bd. 1901, S. 122—132 berichtet unter dem Titel *„Karl Peterson (1828—1881)"*. Aus der ganzen Zeit von Monge bis Peterson kann ich nur eine Stelle angeben, wo die Schiebungsflächen vorkommen, nämlich in dem Buche *„Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes"*, Berlin

Digitized by Google

fläche bezeichnete, begegnet man der jetzt gebräuchlichen allgemeinen Darstellung mit Hilfe zweier Parameter u und v:

$$(1) \quad x = U_1(u) + V_1(v), \quad y = U_2(u) + V_2(v), \quad z = U_3(u) + V_3(v),$$

die als analytische Definition der Schiebungsflächen bezeichnet werden kann. Sowohl die Kurven $u =$ konst. als auch die Kurven $v =$ konst. sind miteinander kongruent und gleichgestellt.

2. Zweite Definition der Schiebungsflächen. Wo die Kurven der einen Schar eine Kurve der zweiten Schar durchsetzen, haben sie parallele Tangenten; diese machen einen die Fläche umhüllenden Zylinder aus. Wenn man unter *zylindrischen Flächenkurven* überhaupt solche versteht, längs deren die Fläche von umhüllenden Zylindern berührt wird, sind somit alle Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. zylindrisch. Das ist an sich nichts besonderes und kann auf jeder nichtabwickelbaren Fläche erreicht werden, aber die Mantellinien der Zylinder, die zu den Kurven der einen Schar gehören, sind insbesondere Tangenten der Kurven der andern Schar. Demnach liegen konjugierte Kurven vor. Betrachten wir nun allgemein eine Fläche, auf der die Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. konjugiert und zylindrisch sind. Offenbar müssen da Gleichungen bestehen von der Form:

$$(2) \quad \begin{cases} x_u = \varrho\varphi_1(u), & y_u = \varrho\varphi_2(u), & z_u = \varrho\varphi_3(u), \\ x_v = \sigma\psi_1(v), & y_v = \sigma\psi_2(v), & z_v = \sigma\psi_3(v), \end{cases}$$

worin ϱ und σ Funktionen von u und v bedeuten. Die Integrabilitätsbedingungen $x_{uv} = x_{vu}$ usw. liefern drei in ϱ_v und σ_u lineare homogene Gleichungen

$$\varrho_v\varphi_1 = \sigma_u\psi_1, \quad \varrho_v\varphi_2 = \sigma_u\psi_2, \quad \varrho_v\varphi_3 = \sigma_u\psi_3,$$

und da nicht alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

gleich Null sein dürfen, ist daher sowohl ϱ_v als auch σ_u gleich Null, so daß aus (2) folgt, daß x, y, z die Form (1) haben. Mithin kann man die Schiebungsflächen auch definieren als die *Flächen mit Netzen von konjugierten zylindrischen Kurven.* Dies war Peterson

1837, von Ludw. Immanuel Magnus, wo jedoch auf S. 501—503 nur Einiges von Monge wiedergegeben wird und zwar, wie es in diesem Buch überhaupt Brauch ist, ohne Angabe der Quelle.

Digitized by Google

bekannt[5]). Übrigens ist von abwickelbaren Flächen selbstverständlich abzusehen.

3. Dritte Definition der Schiebungsflächen. Ganz anders sieht eine von Sophus Lie[6]) angegebene Erzeugung der Schiebungsflächen aus: Man nehme zwei Kurven an:

$$x_1 = \Phi_1(u), \quad y_1 = \Phi_2(u), \quad z_1 = \Phi_3(u)$$

und

$$x_2 = \Psi_1(v), \quad y_2 = \Psi_2(v), \quad z_2 = \Psi_3(v)$$

und teile die Sehnen zwischen den Punkten beider Kurven in einem konstanten Verhältnis $a:b$. Der Ort der Teilpunkte

$$x = \frac{b\Phi_1(u) - a\Psi_1(v)}{b-a}, \quad y = \frac{b\Phi_2(u) - a\Psi_2(v)}{b-a},$$

$$z = \frac{b\Phi_3(u) - a\Psi_3(v)}{b-a}$$

ist, wie die Vergleichung mit (1) lehrt, eine Schiebungsfläche. Die Umkehrung liegt auf der Hand, auch leuchtet dies rein geometrisch ein. Somit ist eine Schiebungsfläche auch zu definieren als *Ort derjenigen Punkte, die alle Sehnen zwischen zwei Kurven in einem konstanten Verhältnisse teilen.*

4. Verallgemeinerung der zweiten und ersten Definition der Schiebungsflächen. Zu einer ganz nahe liegenden Verallgemeinerung bietet sich die *zweite* Definition ohne weiteres dar; man ersetze nur die zylindrischen Kurven durch konische. Unter einer *konischen Flächenkurve* soll natürlich die Berührungslinie eines die Fläche umhüllenden Kegels verstanden werden. Wir kommen also zu den *Flächen mit Netzen von konjugierten konischen Kurven.* Wenn die Parameterlinien u = konst. konisch sind, haben die Spitzen der zugehörigen Kegel nur von u abhängige Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; ebenso, wenn die Parameter-

5) A. a. O. S. 27, wo ein umfassenderer Satz ausgestellt wird, auf den wir in Nr. 4 zurückkommen.

6) Bekanntlich hat sich Lie häufig und gründlich mit den Schiebungsflächen beschäftigt, die er Translationsflächen nannte, aber darauf hier näher einzugehen, würde zu weit führen. Die als dritte Definition der Schiebungsflächen bezeichnete Erzeugung findet sich in der Abhandlung *„Beiträge zur Theorie der Minimalflächen“*, Math. Ann. 14. Bd. 1879, S. 331—416, insb. S. 334 (im 2. Bd. 1. Teil der von F. Engel und P. Heegard besorgten *„Gesammelten Abhandlungen“*, Leipzig und Oslo 1935, insb. auf S. 125). Allerdings benutzt Lie dort nur die Mitten der Sehnen, aber daß das Teilverhältnis irgendeinen konstanten Wert haben kann, war ihm wohlbekannt und liegt ja auch auf der Hand.

Digitized by Google

kurven $v =$ konst. konisch sind, haben die Spitzen der zugehörigen Kegel nur von v abhängige Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3. Sollen die Scharen $u =$ konst. und $v =$ konst. überdies konjugiert sein, so sind die Mantellinien der zu einer Schar gehörigen Kegel Tangenten der andern Schar. Mithin tritt hier anstelle von (2) der Ansatz:

$$(3) \quad \begin{cases} x_u = \varrho(x-\varphi_1), & y_u = \varrho(y-\varphi_2), & z_u = \varrho(z-\varphi_3), \\ x_v = \sigma(x-\psi_1), & y_v = \sigma(y-\psi_2). & z_v = \sigma(z-\psi_3). \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingung $x_{uv} = x_{vu}$ führt hier zu der Gleichung:

$$(\varrho_v - \sigma_u)x - (\varrho_v - \varrho\sigma)\varphi_1 + (\sigma_u - \varrho\sigma)\psi_1 = 0,$$

und dazu treten die aus $y_{uv} = y_{vu}$ und $z_{uv} = z_{vu}$ hervorgehenden Gleichungen. Da nun der Flächenpunkt (x, y, z) mit den Kegelspitzen $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ und (ψ_1, ψ_2, ψ_3) nicht in gerader Linie liegt, ist die Determinante der drei Gleichungen nicht gleich Null, also $\varrho_v = \sigma_u = \varrho\sigma$. Hieraus kann man leicht folgern, daß ϱ und σ die Formen haben:

$$\varrho = \frac{-P'(u)}{P(u)+Q(v)}, \quad \sigma = \frac{-Q'(v)}{P(u)+Q(v)}.$$

Dann aber geben die linken Gleichungen (3):

$$\frac{\partial}{\partial u}[(P+Q)x] = P', \quad \frac{\partial}{\partial v}[(P+Q)x] = Q'.$$

Daher ist $(P+Q)x$ ebenso wie $P+Q$ selbst eine Summe aus einer Funktion von u allein und einer Funktion von v allein. Dasselbe geht für $(P+Q)y$ und $(P+Q)z$ hervor. Indem wir nun P und Q anders bezeichnen, bekommen wir also die Flächen mit Gleichungen von der Form:

$$(4) \quad x = \frac{U_1(u)+V_1(v)}{U_4(u)+V_4(v)}, \quad y = \frac{U_2(u)+V_2(v)}{U_4(u)+V_4(v)}, \quad z = \frac{U_3(u)+V_3(v)}{U_4(u)+V_4(v)},$$

wobei zu beachten ist, daß überall derselbe Nenner auftritt.

Man sieht, daß die Gleichungen (4) eine analytisch recht nahe liegende Verallgemeinerung der Gleichungen (1) sind. Daher darf wohl behauptet werden, daß sich die Flächen mit Netzen von konjugierten konischen Kurven nicht nur aus der zweiten, sondern auch aus der *ersten* Definition der Schiebungsflächen durch natürliche Verallgemeinerung ergeben, freilich nur in analytischer Hinsicht, denn zur ursprünglichen geometrischen Erzeugung der Schiebungsflächen gibt es im Falle (4) nichts Entsprechendes.

Wenn man zurückrechnet, findet man, daß die vorhin mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und ψ_1, ψ_2, ψ_3 bezeichneten Koordinaten der Kegelspitzen

Digitized by Google

diese sind:

$$(5)\qquad \left.\begin{array}{l} x = U_1' : U_4', \quad y = U_2' : U_4', \quad z = U_3' : U_4' \\ x = V_1' : V_4', \quad y = V_2' : V_4', \quad z = V_3' : V_4'. \end{array}\right\} \text{ und}$$

Die hierdurch dargestellten Örter der Kegelspitzen mögen die *Leitkurven* heißen. Stillschweigend hatten wir angenommen, daß beide Leitkurven im Endlichen verlaufen. Wenn z. B. die erste unendlichfern ist, tritt an die Stelle der ersten Zeile des Ansatzes (3) die erste Zeile des Ansatzes (2), und man findet, daß dann U_4 konstant wird. Die Ausnahmefälle brauchten natürlich nicht besonders behandelt zu werden, wenn man homogene Koordinaten benutzte.

Die Flächen mit Netzen von konjugierten konischen Kurven treten wohl nicht früher auf als bei dem schon genannten Peterson. Er wußte, daß sie in der Form (4) dargestellt werden [7]). Da diese Entdeckung schon rund siebzig Jahre zurückliegt, ist es wohl nicht zu beanstanden, wenn man den Flächen den Namen *Petersonsche Flächen* gibt [8]).

5. Verallgemeinerung der dritten Definition der Schiebungsflächen. Wir fassen die Kurven ins Auge, die durch

$$(6)\qquad \left.\begin{array}{l} x_1 = U_1 : U_4, \quad y_1 = U_2 : U_4, \quad z_1 = U_3 : U_4 \\ x_2 = V_1 : V_4, \quad y_2 = V_2 : V_4, \quad z_2 = V_3 : V_4 \end{array}\right\} \text{ und}$$

dargestellt werden. Das sind im allgemeinen andere Kurven als die Leitkurven (5), und sie mögen als *Trägerkurven* bezeichnet werden. Sie sollen nämlich Träger zweier Skalen sein: Den zu beliebigen Werten von u bzw. v gehörigen Punkten der Trägerkurven ordnen wir die Skalenwerte zu:

$$(7)\qquad t_1 = 1 : U_4 \text{ bzw. } t_2 = -1 : V_4.$$

Aldann teilen wir die Sehne zwischen den beiden Punkten im Verhältnisse $t_1 : t_2$. Dies liefert den Punkt:

$$x = \frac{t_2 x_1 - t_1 x_2}{t_2 - t_1}, \quad y = \frac{t_2 y_1 - t_1 y_2}{t_2 - t_1}, \quad z = \frac{t_2 z_1 - t_1 z_2}{t_2 - t_1}.$$

7) A. a. O. S. 27.

8) Bei Lie kommen nur gewisse Sonderfälle der Petersonschen Flächen vor, nämlich die aus den Schiebungsflächen durch projektive Transformation entstehenden. Dagegen hat sich Lie mit anderen Verallgemeinerungen der Schiebungsflächen beschäftigt, die uns hier ferner liegen. Nur darauf sei hingewiesen, daß die Petersonschen Flächen eng zusammenhängen mit den zweifach ausgedehnten Schiebungsmannigfaltigkeiten des Raumes von vier Dimensionen.

Digitized by Google

Nun gibt das Einsetzen der Werte (6) und (7) genau die Gleichungen (4). Mithin sind die Petersonschen Flächen auch als eine Verallgemeinerung der Schiebungsflächen nach ihrer *dritten* Definition aufzufassen. Während nämlich insbesondere eine Schiebungsfläche hervorgeht, wenn man die Sehnen zwischen den Punkten zweier Kurven in einem konstanten Verhältnisse teilt, hat man allgemeiner die Sehnen im Verhältnisse der den Endpunkten der Sehnen zukommenden Skalenwerte t_1 und t_2 zu zerlegen[9]).

Alle drei Definitionen der Schiebungsflächen bringen uns demnach durch Verallgemeinerung zu den Petersonschen Flächen. Immerhin hätte man bei der Verallgemeinerung der dritten Definitionen etwas anderes erwartet. Denn während jede Schiebungsfläche vermöge *affiner* Transformation wieder in eine Schiebungsfläche übergeht, wird jede Petersonsche Fläche durch allgemeine *projektive* Transformation wieder in Petersonsche Flächen verwandelt. Bei der Gruppe der affinen Transformationen ist nun das *einfache Teilverhältnis* eine Invariante, dagegen bei der Gruppe der projektiven Transformationen ist es erst das *Doppelverhältnis.* Aber dennoch verbleibt es hier im Falle der Petersonschen Flächen beim einfachen Teilverhältnis; die Verallgemeinerung kommt eben anders zustände, nämlich dadurch, daß das Teilverhältnis gesetzmäßig veränderlich wird.

6. Die zu den Petersonschen Flächen dualen Flächen. Nachdem unsere eigentliche Aufgabe erledigt ist, seien noch ein paar Bemerkungen angeschlossen.

Übt man auf eine Petersonsche Fläche eine Dualität aus, so geht das Netz der konjugierten konischen Kurven zwar wieder in ein Netz von konjugierten Kurven über. Aber eine konische Kurve ist dadurch gekennzeichnet, daß die Tangentialebenen längs ihrer einen Punkt, die Kegelspitze, gemein haben. Daher wird aus ihr vermöge Dualität eine Kurve, deren Punkte eine Ebene gemein haben, d. h. eine ebene Kurve. Vermöge Dualität verwandeln sich also die Petersonschen Flächen in die *Flächen mit Netzen von konjugierten ebenen Kurven.* Diese Flächen sind zuerst von Gaston Darboux bestimmt worden und zwar auf direktem Weg, unabhängig von den Petersonschen Flächen[10]). Umgekehrt nämlich

9) In dem Sonderfall, wo eine der Leitkurven unendlichfern ist, tritt diese Erzeugung auf bei Erich Salkowski, *„Affine Differentialgeometrie“*, Berlin und Leipzig 1934, S. 163.

10) *„Leçons sur la théorie générale des surfaces“*, 1. Bd. Paris 1887, S. 123 bis 126.

Digitized by Google

leitete Darboux die Petersonschen Flächen mittels Dualität aus den von ihm selbst gefundenen Flächen mit Netzen von konjugierten ebenen Kurven ab[11]).

Wird die einfachste Dualität gewählt, nämlich die mit der Grundgleichung

$$xX + yY + zZ + 1 = 0,$$

worin X, Y, Z die rechtwinkligen Koordinaten im dualen Raume bedeuten, so ergeben sich durch Einsetzen der Werte (4) die Tangentialebenen der neuen Flächen:

$$(U_1 + V_1) X + (U_2 + V_2) Y + (U_3 + V_3) Z + U_4 + V_4 = 0.$$

Fügt man die durch Differentiation nach u und v hervorgehenden Gleichungen hinzu:

$$U_1' X + U_2' Y + U_3' Z + U_4' = 0,$$
$$V_1' X + V_2' Y + V_3' Z + V_4' = 0.$$

so hat man die drei Gleichungen zur Bestimmung der Koordinaten X, Y, Z als Funktionen von u und v.

7. Flächen mit Netzen von konjugierten sowohl ebenen als auch konischen Kurven. Die Tangenten aller Kurven u = konst. einer Petersonschen Fläche treffen die eine Leitkurve, die Tangenten aller Kurven v = konst. die andere. Wenn nun diese Kurven auch eben sein sollen, folgt, daß jede der beiden Leitkurven in unendlichvielen Ebenen liegt und also eine Gerade ist. Auch das Umgekehrte gilt. Man bekommt daher alle Flächen, die Netze von konjugierten sowohl ebenen als auch konischen Kurven besitzen, wenn man die *Petersonschen Flächen mit geradlinigen Leitkurven* heraussucht. Man kann sie übrigens auch anders definieren. Bekanntlich gilt nämlich Folgendes: Legt man durch eine Gerade alle Ebenen, so schneiden sie eine Fläche in Kurven, die konjugiert sind zu den Berührungslinien der die Fläche umhüllenden Kegel, deren Spitzen auf der Geraden liegen[12]). Daraus erkennt man leicht, daß die in Rede stehenden Flächen diejenigen *Flächen* sind, *die eine Schar von sowohl ebenen als auch konischen Kurven haben, vorausgesetzt, daß die zugehörigen Kegelspitzen in gerader Linie liegen.*

11) In der 2. Aufl. des soeben genannten Bandes, Paris 1914, S. 179, 180.

12) Dieser Satz findet sich wohl zuerst bei Otto Böklen, *„Analytische Geometrie des Raumes“*, Stuttgart 1861, S. 69. Man sollte ihn daher nicht, wie es oft geschieht, als Satz von Gabriel Koenigs bezeichnen.

Digitized by Google

Vermöge projektiver Transformation kann man die Leitkurven, wenn sie Geraden sind, im allgemeinen, d. h. wenn diese Geraden sich nicht schneiden, in die z-Achse und in die unendlichferne Gerade der xy-Ebene verlegen. Daraus folgert man leicht, daß sich die in Rede stehenden Flächen im allgemeinen Falle projektiv ableiten lassen aus den Flächen mit Gleichungen von der Form:

$$x = u\varphi(v), \quad y = u\psi(v), \quad z = \omega(u).$$

Diese Flächen lassen sich nun einfach kennzeichnen. Wird die xy-Ebene waagerecht angenommen, so sind es die *Flächen, deren Höhenlinien, auf die xy-Ebene projiziert, als lauter ähnliche und ähnlich gelegene Kurven erscheinen* [13]).

8. Insbesondere die Flächen zweiter Ordnung. Auf einer Fläche zweiter Ordnung ist jede ebene Kurve auch konisch und umgekehrt. Die Fläche gehört also sowohl zu den Petersonschen als auch zu den dualen Flächen. Erinnern wir uns nun an die Verallgemeinerung der dritten Definition der Schiebungsflächen, so ergibt sich für die nichtabwickelbaren Flächen zweiter Ordnung eine Punktkonstruktion: Man hat als Trägerkurven zwei Geraden zu wählen und darauf gewisse Skalen anzubringen, und muß dann die Sehnen zwischen den Geraden im Verhältnisse der jeweils zugehörigen Skalenwerte teilen. Es mag genügen, dies im Fall der *Kugel* genauer anzugeben und zwar mit absichtlicher Beschränkung auf das Reelle:

Unter g_1 und g_2 seien windschiefe, aber rechtwinklige Geraden verstanden, deren gemeinsames Lot sie in O_1 und O_2 treffe. Ferner seien a_1 und a_2 irgendzwei Strecken. Nun ordne man den Punkten P_1 und P_2 der Geraden g_1 und g_2 die Skalenwerte zu:

$$t_1 = \sqrt{a_1^2 + O_1P_1^2}, \quad t_2 = \sqrt{a_2^2 - O_2P_2^2}.$$

Teilt man dann alle Sehnen P_1P_2 in dem zugehörigen Verhältnisse $t_1 : t_2$, so ist der Ort der Teilpunkte eine Kugel. Wegen des Auftretens von Quadratwurzeln ist das Vorzeichen von $t_1 : t_2$ unbestimmt, so daß sich auf jeder Sehne P_1P_2 zwei Kugelpunkte ergeben, die mit dem Paar P_1, P_2 harmonisch liegen. Die Geraden g_1 und g_2 sind reziproke Polaren, und man weiß, daß von einem solchen Paar immer nur eine die Kugel schneidet. Wir haben hier insbesondere angenommen, daß dies die zweite Gerade g_2 sei. Um reelle Schnittpunkte der Sehne P_1P_2 mit der Kugel zu bekommen,

13) Diese Flächen kommen bei G. Darboux a. a. O. in der 2. Aufl. S. 182, 183 vor.

Digitized by Google

muß man dann bekanntlich P_2 innerhalb der Kugel annehmen. Dies steht damit im Einklange, daß t_2 nur dann reell ist, wenn $O_2 P_2$ nicht länger als a_2 ist.

Wie es sich im Fall einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung verhält, die kein Kegel oder Zylinder ist, kann man leicht hieraus durch Verallgemeinern entnehmen, wenn wir nur noch darauf aufmerksam machen, daß t_1 und t_2 im Falle der Kugel die Quadratwurzeln aus den absoluten Beträgen der Potenzen der Punkte P_1 und P_2 hinsichtlich der Kugel sind. So bemerkt man schließlich, daß die angedeutete Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus wohlbekannten Eigenschaften dieser Fläche ganz unabhängig vom Vorhergehenden abgeleitet werden kann. Ob man sie schon ausdrücklich ausgesprochen hat, müssen wir dahingestellt sein lassen.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXXVI. JAHRGANG

INHALT:

	Seite
Die Bedeutung des mathematischen und technischen Denkens für den neuzeitlichen soldatischen Führer. Von **R. Ritter**	3—15
Beweis des Induktionsschlusses der natürlichen Zahlen aus der Dedekindschen Definition endlicher Mengen. Von **V. v. Seckendorff** . . .	16—24
Neuere Ergebnisse zum Problem der Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeit. Von **K. Maruhn**	25—32
Ein einfaches Gerät zur Transformation ebener Kurven und seine Anwendung auf die Ermittlung von Momenten. Von **H. Gröttrup** .	33—41
Moderne Methoden der Algebra. Von **Fr. Neiß**	42—43
Beiträge zur Theorie der Strahlenkomplexe, der dreifach-orthogonalen Systeme und der Verbiegung der Flächen zweiten Grades. Von **H. Jonas**	44—45
Ordnung und Gestaltung im griechischen Städtebau. Von **C. A. Doxiadis**	46—49
Berichte über die Sitzungen	1—2

1937

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

6) Bis auf weiteres erhält jeder Autor bei einer Arbeit bis zu 10 Seiten 100 Sonderabdrucke kostenlos, für jede Seite mehr 5 Sonderabdrucke weniger, bis zum Minimum von 50 Sonderabdrucken.

Mitteilungen.

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn Oberinspektor M. Noack, Berlin-Steglitz, Fritschweg 1.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 156 a).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

SECHSUNDDREISSIGSTER JAHRGANG

1937

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Doxiadis, C. A., Ordnung und Gestaltung im griechischen Städtebau . .	46—49
Gröttrup, H., Ein einfaches Gerät zur Transformation ebener Kurven und seine Anwendung auf die Ermittlung von Momenten . . .	33—41
Jonas, H., Beiträge zur Theorie der Strahlenkomplexe, der dreifach-orthogonalen Systeme und der Verbiegung der Flächen zweiten Grades	44—45
Maruhn, K., Neuere Ergebnisse zum Problem der Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeit	25—32
Neiß, Fr., Moderne Methoden der Algebra	42—43
Ritter, R., Die Bedeutung des mathematischen und technischen Denkens für den neuzeitlichen soldatischen Führer	3—15
Seckendorff, V. v., Beweis des Induktionsschlusses der natürlichen Zahlen aus der Dedekindschen Definition endlicher Mengen	16—24
322. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 28. Oktober 1936	1
323. „ am 25. November 1936	1
324. „ „ 8. Dezember 1936	1
325. „ „ 27. Januar 1937	1
326. „ „ 24. Februar „	1
327. „ „ 24. März „	2
328. „ „ 28. April „	2
329. „ „ 26. Mai „	2
330. „ „ 16. Juni „	2

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

322. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 28. Oktober 1936.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 56 Mitglieder und Gäste.

1. Geschäftlicher Teil:

Die Berichte des Kassenwarts und der Kassenprüfer werden entgegengenommen und dem Kassenwart Entlastung erteilt; sodann werden die alten Kassenprüfer durch Zuruf wiedergewählt.

In die Redaktionskommission wird für den ausscheidenden Herrn Reinhardt neu hineingewählt Herr Hamel.

2. Wissenschaftlicher Teil:

Herr Neiß: Die modernen Methoden der Algebra.

323. Sitzung am 25. November 1935.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 11 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Her Jonas: Beiträge zur Theorie der Strahlenkomplexe, der dreifach-orthogonalen Systeme und der Verbiegung der Flächen zweiten Grades.

324. Sitzung am 8. Dezember 1937

in Gemeinschaft mit dem

Berliner Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichts

und dem

Mathematischen Verein zu Berlin.

C. A. Doxiadis: Mathematische Gesetzlichkeiten im griechischen Städtebau.

325. Sitzung am 27. Januar 1937.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 16 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Keller: Geometrische Methoden zur Untersuchung von Kettenbrüchen.

326. Sitzung am 24. Februar 1937.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 25 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Ritter: Die Bedeutung des mathematischen und technischen Denkens für den neuzeitlichen soldatischen Führer.

Zur Mitgliedschaft vorgeschlagen: Freiherr Viktor von Seckendorff, Berlin-Steglitz, Schloßstraße 42a, durch die Herren Jonas und Graf.

Digitized by Google

327. Sitzung am 24. März 1937.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr v. Seckendorff: Beweis des Induktionsschlusses der natürlichen Zahlen aus der Dedekindschen Definition endlicher Mengen.

328. Sitzung am 28. April 1937.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 17 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Witt: Über die Berechnung der Perioden der elliptischen Integrale.

329. Sitzung am 26. Mai 1937.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 15 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Maruhn: Neuere Ergebnisse zum Problem der Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeit.

Zur Mitgliedschaft vorgeschlagen: Herr Dr. Karl Maruhn, Berlin-Adlershof, Altheider Str. 25, durch Herrn Rothe und den Vorsitzenden.

330. Sitzung am 16. Juni 1937.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 18 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Gröttrup: Ein einfaches Gerät zur Transformation ebener Kurven und seine Anwendung auf die Ermittlung von Momenten.

Zur Mitgliedschaft vorgeschlagen: Herr Helmut Gröttrup, Berlin-Charlottenburg 4, Gervinusstr. 14, durch Herrn Graf und den Vorsitzenden.

Digitized by Google

Die Bedeutung des mathematischen und technischen Denkens für den neuzeitlichen soldatischen Führer[1]).

Von Robert Ritter in Berlin.

1. *Einleitung.* Wenn ich hier auf Grund einer Aufforderung des Vorsitzenden unserer Gesellschaft zu diesem wichtigen und im Jahre 1934 stark umstrittenen Thema Stellung nehme, so knüpfe ich inhaltlich an einen Vortrag an, welchen ich im Dezember 1934 auf dem Fortbildungskursus der Wehrmachtspsychologen gehalten habe, und welcher die Überschrift trug: „Der Anteil des mathematischen Denkens am formalen Denken des militärischen Führers". Er wurde veröffentlicht in der vom Psychologischen Laboratorium des Reichskriegsministeriums unter der Leitung von Oberst v. Voß und Oberregierungsrat Simoneit herausgegebenen Schrift: „Soldatentum", einer Zeitschrift für Wehrpsychologie, Wehrerziehung und Führerauslese, welche sowohl zur philosophisch-psychologischen Vertiefung solcher Fragen, als auch zu ihren praktischen Auswertungen beiträgt[2]).

Zur Behandlung unseres Themas müssen wir zuerst auf die psychologischen Merkmale der mathematischen und technischen Denkensweisen sowie ihre abstrakt-logischen und konkret-praktischen Bedeutungen eingehen. Wenn ich auch hierbei den Fachkollegen nicht viel sachlich Neues bringen kann, so ist dennoch eine kurze Selbstbesinnung erforderlich, um den beabsichtigten Vergleich mit dem Denken des soldatischen Führers durchführen zu können.

2. *Psychologische Merkmale und Wesenszüge des mathematischen und technischen Denkens.* Da man in den verschiedensten Kreisen immer wieder auf die Meinung stößt, mathematische Beschäftigung bestünde in einem vorwiegend mechanischen Arbeiten mit Formeln, Tabellen und Regeln, muß demgegenüber festgestellt werden, daß sie nicht nur ein für die Menschheit seit langem unentbehrliches Fachwissen, sondern auch eine *typische, auf das Wesentliche der Probleme eingestellte Denkensart* von größtem kulturellen Einfluß entwickelt hat. Der Mathematiker arbeitet am wenigsten in kon-

1) Vorgetragen in der 326. Sitzung am 24. Februar 1937.

2) R. Ritter, Der Anteil des mathematischen Denkens am formalen Denken des militärischen Führers. „Soldatentum" 2 (1935), S. 162—166, 230—233.

Digitized by Google

kreten, festbestimmten Zahlen, sondern vorwiegend in Variablen, Funktionen und mit diesen zusammenhängenden *Begriffen*, welche die Möglichkeit von Kombinationen und Verallgemeinerungen vielseitigster Art zulassen, und die bekanntlich ein hohes Maß von *Vorstellungskraft* und *Phantasie* aber auch von *Disziplin* und *Verantwortlichkeit* erfordern. Natürlich ist es am befriedigendsten, wenn man den häufig nicht sogleich erkennbaren Weg von der abstrakten Theorie bis zur konkreten Nutzanwendung hin ständig aufweisen kann, weil sich hierbei der *ästhetische Genuß* und die *logische Schulung* mit einem *lebenspraktischen Gewinn* harmonisch vereinigen. Meist ist jedoch leider der einzelne Mensch infolge der bedauerlichen Divergenz der Wissenschaftszweige nicht in der Lage, diese große Kette vollständig zu übersehen, so daß sich die Arbeitsteilung zwischen Mathematiker und Techniker ergeben hat, welche aber stets aufeinander angewiesen sein werden. Der Mathematiker vergibt sich nichts, wenn er daran denkt, daß seine Wissenschaft *ursprünglich* nicht aus rein philosophischen Spekulationen heraus entstand, sondern geschaffen wurde, um mit ihrer Hilfe die Erscheinungen der zunächst als feindlich und dämonisch aufgefaßten Natur zu erkennen und zu beherrschen. Man muß sich vorstellen, was es psychologisch bedeutete, wenn z. B. Thales der Sonnenfinsternis das Unheimlich-Überirdische nahm, indem er ihren Eintritt genau voraussagte. Als ein neuzeitlicheres Beispiel — neben vielen anderen — dafür, daß der Mathematiker seine Anregungen aus der Praxis erfährt, kann die in den Jahren 1816—1841 nach den Befreiungskriegen durchgeführte Vermessung des Königreichs Hannover dienen, welche Gauß zu seinen berühmten flächentheoretischen Untersuchungen veranlaßte. Den Anstoß gaben die Politik, Strategie und Verwaltung. Die entstandenen Ideen haben neben den früheren Monges und den späteren Riemanns der Differentialgeometrie bis heute die wesentliche Richtung gegeben, ähnlich wie bekanntlich die durch die Überschwemmungen der Nilufer notwendigen Landesvermessungen mehrere tausend Jahre früher einen Ausbau der Planimetrie erforderten.

Es ist nun psychologisch verständlich, daß die notwendigen *theoretischen Untersuchungen* infolge ihrer *bestehenden Schönheit, umfassenden Gültigkeit und ehernen Beständigkeit* zu weiterer Vertiefung und Verallgemeinerung — weit über den Charakter eines bloßen Hilfsmittels hinaus — anreizten, so daß man in die Gefahr geriet, über das Ziel hinauszuschießen und sich auf einen sehr entfernten mathematischen, eigentlich rein philosophischen „Kriegsschauplatz" zu begeben. Andererseits muß man immer wieder darauf hinweisen,

Digitized by Google

daß solche fertigen abstrakt-theoretischen Wissensgebäude den Blick sehr weiten, indem sie scheinbar Fremdes unter einem Gesichtspunkt vereinigen oder überraschende Parallelen aufweisen. Auch können sie infolge eines günstigen äußeren Umstandes plötzlich in ihrer praktischen Bedeutung erkannt werden, so daß sie dann recht zahlreiche Bewohner finden. Man muß sich daher vor einer einseitigen *Überbewertung einer Konkretisierung des Denkens* hüten. Gerade die Mathematik ist bei der Vielseitigkeit ihrer Methoden geeignet, dem Lernenden den goldenen Mittelweg zwischen diesen beiden Extremen zu zeigen und ihm die gleichzeitige Existenzberechtigung beider Richtungen — in gesunden Grenzen — deutlich zu beweisen.

Mit diesen Fragen haben sich bereits viele Forscher befaßt. Zum Beispiel schildert E. A. Weiss[3]) in launig klingenden, aber dennoch ernsten Worten die ganze seelisch-soziale Problematik des mathematischen Schaffens, wobei er zwischen Berufs- und Amateurmathematiker unterscheidet. Er wendet sich gegen extreme, egozentrische Auffassungen mancher vereinzelter Mathematiker. Man kann ihm in seiner psychologischen Einstellung beipflichten, wenn er betont, daß man zur Beurteilung einer geistigen Arbeit — ohne das selbstverständliche Prinzip der Priorität aufzugeben — in ebenso starkem Maße das „Wie" als das „Was" heranziehen müsse[4]): „Für den erzieherischen Wert der Mathematik ist es gleichgültig, ob die gefundenen Resultate neu sind oder nicht". Er sieht den Wert der reinen Mathematik in einem „Erziehungsmittel zu einer formalen Charakterbildung, die bewußt für den Dienst am Volksganzen eingesetzt wird". Neben diesem wichtigen Zweck ist jedoch auch die ästhetisch-kulturelle, also eine nicht rein formale Bedeutung der Aufmerksamkeit und Pflege wert, welche ja ebenfalls der Gesamtheit zugute kommt, indem sie Geschmack und Stilempfinden verfeinert.

Der Mathematiker wird bei der Formulierung seiner Gedanken und Denkergebnisse ästhetische Momente mitsprechen lassen, genau so, wie sich bekanntlich der Ingenieur und Baumeister mit Erfolg bemühen, den Nutzen ihrer Werke mit der Gefälligkeit der Formen derselben harmonisch zu verbinden, in unmittelbarer Anlehnung an das große Vorbild der Natur.

Es kommt ferner hinzu, daß — wie bereits angedeutet — die Grenze zwischen „reiner" und „angewandter" Mathematik unbestimmt

3) E. A. Weiss, Wozu Mathematik? Bonn 1933.

4) Das mathematische Arbeitslager Kronenburg. Bonn 1934. S. 5—11, insbes. S. 7, 10.

Digitized by Google

und schwankend bleibt, weil die Entscheidung darüber häufig erst von der Nachwelt getroffen wird.

Diese beiden Punkte heben J. A. Schouten und D. van Dantzig in ihrer Abhandlung: „Was ist Geometrie?“ [5]) hervor, indem sie sagen: „Letzten Endes ist die Geometrie, wie jede mathematische Wissenschaft, eine *Kunst*, und ist die Befriedigung, die der Mathematiker erstrebt, hauptsächlich eine Befriedigung *ästhetischer Art*“ und: „Die Geschichte lehrt, daß das, was gestern Mengenlehre, Analysis oder Gruppentheorie war, morgen der Geometrie einverleibt werden kann. Die Geometrie des Hilbertschen Raumes, heute schon Gemeingut der theoretischen Physiker, bildet hier ein schlagendes Beispiel“. — Wie dem auch sei, jede einzelne Teilbedeutung der Mathematik müßte bereits zu ihrer Berechtigung überhaupt genügen.

Wir kommen jetzt zu einem weiteren psychologischen Begriff, dem *Temperament*, dessen angeblich geringe Entwicklung beim Mathematiker diesem häufig zum Vorwurf gemacht wird. Temperamentvolle und leicht erregliche Menschen haben nicht immer die Ruhe, welche zu mathematischer und technischer Arbeit nun einmal nötig ist, um über die weniger interessanten Anfänge hinaus zu kommen und eine eigene Mitarbeit durchzuführen. Auch erscheint derartigen Personen der erzielte Fortschritt den großen Aufwand an Geduld und Arbeitskraft nicht wert. Gewiß braucht man *Muße* und *Zähigkeit* zugleich zur mathematischen Leistung, — die oft mit großer Entsagung verknüpft ist (z. B. Gauß, Abel, Riemann) —, woraus aber natürlich keineswegs eine Vernachlässigung der Denkgeschwindigkeit zu erschließen ist. Im Gegenteil veranlaßt die greifbare Nähe der Lösung eines lange durchdachten Problems zu *blitzschnellem, zielstrebigen Denken*, so daß der Mathematiker einen Wettbewerb auf diesem Gebiet nicht zu scheuen braucht. Die Begründung der erstaunlichen Produktivität mancher Mathematiker (z. B. Eulers) erfordert neben der Tatsache von Genie und Fleiß auch das Vorhandensein einer erheblichen Schnelligkeit im Denken. Der literarische Niederschlag ergibt kein eindeutiges Bild des eigentlichen Schaffensvorganges, vor allem nicht der zeitlichen Aufeinanderfolge der Ideen. Die immer größer werdenden technischen Forderungen können jedenfalls mit Sicherheit in ihrer vollen Tiefe und mathematischen Verankerung nur durch syste-

5) J. A. Schouten und D. van Dantzig, Was ist Geometrie? Abh. a. d. Sem. f. Vektor- und Tensoranalysis, herausgeg. von B. Kagan, Lief. II—III, Moskau 1935. S. 15—48, insbes. S. 33, 46.

Digitized by Google

matische Forschung und allmählich aufbauende, lückenlose Versuchsarbeit gelöst werden.

Ich sprach eingangs von der erstrebten Beherrschung der Naturvorgänge, um welche sich die Naturforscher auf die verschiedensten Arten bemühen, denen jedoch letzten Endes dasselbe Prinzip zugrundeliegt. Ihre Tätigkeiten, auch die des Mathematikers, gleichen in methodischer Hinsicht der des Entdeckers, indem sie alle um die Auffindung, Erschließung und Durchforschung unbekannter Gebiete kämpfen. Nur ist die mathematisch-abstrakte Welt unbegrenzt und „mehrdimensional", während die zunächst unmittelbar erreichbare, greifbare und konkrete Welt begrenzt und einfach aufgebaut ist, so daß man hierbei vorerst zu einem Abschluß kommen wird. Etwas anderes, der mathematischen Welt schon eher entsprechendes liegt in dem astronomischen Makrokosmos vor, wo man bei der physikalischen Durchforschung die Größe und Struktur des Gebietes sowie die Mannigfaltigkeit seiner Erscheinungen nur mit einer geeigneten Metrik und Dynamik meistern kann. Es ergibt sich somit der Schluß, daß man die dem modernen Menschen so naheliegende und aus einem unbestimmten Drang heraus als erstrebenswert erscheinende „Überwindung" von Raum und Zeit nur auf dem Wege der Mathematik, als des gedanklichen Gegenstückes der Wirklichkeit, begrifflich fundieren und wirklich einsichtig machen kann, wenn man sich über das rein Handwerkmäßige erheben will. Es ist selbstverständlich, daß dieser Kampf um die Naturbeherrschung mit allen geistigen und materiellen Mitteln in der Zukunft weitergeführt werden wird.

Eine eingehende, an die Begriffe der Ganzheitspsychologie anschließende Untersuchung der mannigfachen Gründe und Folgen dieses Strebens sowie des Sinnes der hierzu geschaffenen technischen Hilfsmittel, welche sich als ein „Zwischenreich" zwischen Mensch und Arbeitszweck einschalten, wurde von O. Klemm vorgenommen[6]). Es ergab sich die Notwendigkeit eines weitestgehenden Ausgleichs klassenbildender Spannungen zwischen Unternehmertum und Arbeiterschaft, sowohl in wirtschaftlich-sozialer als auch in seelisch-kultureller Hinsicht, ohne den gesunden Ehrgeiz des Einzelnen zu unterdrücken.

Der Mensch ist natürlich, wie jeder Gegenstand und jedes Lebewesen, abhängig von seiner jeweiligen Umgebung, nur ist der Grad dieses *Abhängigkeitsgefühles*, oder des gewissermaßen „kom-

6) O. Klemm, Die psychologischen Grundfragen der Technik. Ber. üb. d. 13. Kongreß d. deutsch. Ges. f. Psychologie in Leipzig 1933. Jena 1934. S. 63—76. Enthält Literaturnachweis.

Digitized by Google

plementären" *Gefühles der Willensfreiheit* je nach der körperlich-seelischen Konstitution verschieden. Man wird jedoch stets aus Wissensdrang und Verantwortlichkeit heraus das Bestreben haben, alle Faktoren, von denen man abhängig sein könnte, so genau wie nur irgend möglich zu erkennen, um ihnen notfalls — soweit man kann — zu entgehen, oder gegen sie diejenigen Maßnahmen zu ergreifen, welche ihre unvermeidbaren Wirkungen auf ein Mindestmaß herabsetzen. Man muß sich also das Ziel setzen, die gesamte Umwelt streng gesetzlich zu erforschen, um so jederzeit auf alle Fragen eine genaue Antwort geben zu können und den „blinden" Zufall, welcher meist Unglück und Mißerfolg bringt, möglichst selten werden zu lassen, soweit dieses die menschliche Vernunft überhaupt vermag[7]). Ein jeder erwartet ja auch vom Arzt und Ingenieur, genau so wie vom Offizier, das größtmögliche Maß an Pünktlichkeit, Leistungsbereitschaft und Zuverlässigkeit.

Erstrebenswert erscheint letzten Endes die Ausrichtung der gesamten Naturwissenschaft auf ein *einziges, quantitativ erfaßbares und mathematisch formulierbares Grundprinzip und dessen Anwendungen unter den verschiedensten Grenz- und Randbedingungen.* Da aber die Zahl der auftretenden Variablen recht groß und ihr Zusammenhang sehr verwickelt ist, müssen sich die Fragestellungen vorerst eine gehörige, unvermeidbare Schematisierung gefallen lassen. Diese wird sich jedoch durch Entwicklung und Bereitstellung umfassenderer und leistungsfähigerer theoretischer Hilfsmittel wiederum immer mehr lockern und dem komplizierten realen Sachverhalt besser anpassen lassen. Vor der Zahl der Variablen schreckt bekanntlich heute niemand mehr zurück, wenn man diese überhaupt erst genau definiert hat.

Zu jeder Zeit dürfte aber auch noch eine genügende Anzahl von Problemen übrig bleiben, deren Auffindung, Formulierung und Lösung in der Zukunft keine bloßen gedanklichen Kunststücke, sondern notwendiges *kulturelles Schaffen* und *wahren Fortschritt* bedeuten werden, so daß sich die aufgewandte Mühe lohnen wird. Ein Schleier der Ungewißheit wird trotz dieser Forschung auf unabsehbare Zeit hinaus noch über dem Leben und seinen tiefen Rätseln liegen, da man sich doch nur langsam und approximativ dem Ziele nähern kann, ohne den zu fürchtenden, vollständigen Abschluß zu erreichen.

---

7) M. Simoneit, Zufall und Schicksal im soldatischen Handeln, „Soldatentum" 4 (1937), S. 145 ff., auch als Broschüre: „Wehrpsychologische Arbeiten" Nr. 5.

Digitized by Google

3. *Die Beziehungen des mathematischen und technischen Denkens zu dem soldatischen.* Hierbei können wir zwischen abstrakten und konkreten Beziehungen unterscheiden.

a) Die *abstrakten*, mehr das mathematische als das technische Denken betreffenden Verbindungen bestehen vor allem in den vielen analogen und parallelen Momenten in der Disposition und Anlage eines größeren Arbeitsplanes. Ein strategischer Plan größeren Stils und Ausmaßes — wie wir ihm z. B. in seiner vollendetsten Form in dem berühmten Schlieffen-Plan vor uns haben[8]) — wird in seiner ursprünglichen Absicht und Durchdenkung große denkmethodische Ähnlichkeit mit einem mathematischen Plan haben. Die Sammlung der notwendigen Ausgangsdaten sowie die vollständige Erkundung und Orientierung beim ersteren entspricht im Denkvorgang genau dem Sichklarwerden über die Voraussetzungen und Hilfsmittel beim letzteren. Ähnlich verlaufen ferner das Abwägen und Disponieren über den Lösungsweg, auf dem man unter stetem Bewußtwerden der grundlegenden Voraussetzungen dem gedanklichen Ziel zustreben will. Gewiß kommt es im allgemeinen auf den Zeitpunkt der Lösung einer mathematischen Frage für die Öffentlichkeit nicht in demselben Maße an — wohl aber, psychologisch gesehen, für den Betreffenden selbst — wie bei der eines plötzlich auftauchenden Problems in der technischen oder soldatischen Praxis. Auch der mathematische Lösungsgang ist zu Beginn nicht von Anfang bis zu Ende bereits eindeutig vorgegeben, er zeigt auch keine gleichförmige Geschwindigkeit, sondern gerät zuweilen ins Stocken und kann erst unter Zuhilfenahme anderer Mittel zu Ende geführt werden. Das erzielte Ergebnis bietet fast immer eine *Überraschung*, die man *gefühlsmäßig* in sich aufzunehmen und zu verarbeiten sucht, was nicht der Fall wäre, wenn das Ergebnis nichts wesentlich Neues böte, sondern nur eine Art von Umformung der anfänglichen Gegebenheiten darstellte. Mancher Plan muß wieder verworfen werden, wenn er nicht zum Ziele führt. Daher kann eine Hemmung der Entschlußfreudigkeit und Schmälerung des Mutes zum Risiko niemals als eine Folge mathematischer Betätigung aufgefaßt und hingestellt werden. Vielmehr wird umgekehrt eine abwechslungsreiche und die selbständige Mitarbeit erfordernde mathematische Übung dem Offizier nur zum Vorteil gereichen, wie das in den Zeiten des Wiederaufstiegs Preußens Scharnhorst am klarsten erkannt und am bestimmtesten durch-

8) M. Simoneit, Kulturleistungen des deutschen Offizierskorps „Soldatentum" 3 (1936), S. 200—204, 259—267, 313—318, 4 (1937), S. 48—52, auch als Broschüre: „Wehrpsychologische Arbeiten" Nr. 3.

Digitized by Google

geführt hatte. Es ist kein Zufall, daß die Berliner *Friedrich-Wilhelms-Universität* und die *preußische Kriegsakademie* gleichzeitig am 15. 10. 1810 eröffnet wurden, sondern es lag diesen beiden denkwürdigen Taten ein- und dasselbe kulturelle Streben zugrunde[9]). Diese letztere Hochschule sollte den jungen Fähnrichen und Offizieren eine umfassende, *über das Handwerksmäßige des militärischen Berufes hinausgehende Bildung* geben, wobei die Mathematik und math. Erdkunde, welche von Schul- und Universitätslehrern sowie von Offizieren gemeinsam unterrichtet wurden, eine starke Bewertung erfuhren. Scharnhorst, welcher erster Direktor der Kriegsakademie war, hatte sich die feste Meinung gebildet, daß das gründliche Studium der Mathematik die Grundlage aller Geistesbildung und aller Kenntnisse sei, wenn man sich die Zeit nehme, sich in sie wirklich zu vertiefen. Daß das Niveau des mathematisch Gebetenen recht hoch gewesen sein muß, vielleicht bei der ungleichmäßigen Vorbildung der Schüler bisweilen zu hoch gewesen sein kann, leuchtet ein, wenn man hört, daß u. a. Dirichlet, Schellbach, Kummer und Lampe an dieser Bildungsstätte lange Zeiten hindurch gewirkt haben, worauf bereits R. Rothe ausdrücklich hingewiesen hat[10]). Es ist klar, daß man keine eigentlichen Mathematiker ausbilden wollte, aber es zeigte sich doch, daß eine eingehendere Beschäftigung mit der Mathematik mit dem soldatischen Denken gut vereinbar und für dieses recht nützlich war.

b) Die *konkreten* Beziehungen treten uns bei den folgenden sechs, direkt auf Mathematik und Technik beruhenden militärischen Wissensgebieten entgegen:

1. Ballistik und Flugabwehr,

wobei man zu einem tiefer gehenden Verständnis bekanntlich differentialgeometrische und mechanische Begriffe und Tatsachen benötigt, wie z. B. die der Schmiegungsebene, die Frenetschen Formeln des begleitenden Dreikants einer Raumkurve und die Beschleunigungszerlegung[11]).

Hierzu kann auch die Mechanik des Fliegens gerechnet werden.

2. Bau- und Befestigungswesen,

3. Beobachtungs-, Ziel-, Richt- und Meßwesen,

---

9) a) v. Scharfenort, Die Königlich Preußische Kriegsakademie. Berlin 1910.
b) B. Schwertfeger, Die großen Erzieher des deutschen Heeres. Potsdam 1936.

10) R. Rothe, Mathematik und Wehrwissenschaft. Unt.-Bl. f. Math. u. Naturw. 40 (1934) Nr. 6 S. 195—204.

11) R. Rothe, Bemerkungen über die Bestimmung der Flugbahn eines Geschosses. Diese Sitzungsber. 34 (1935) S. 3—9.

Digitized by Google

4. Bild- und Kartenwesen,
5. Ortung und Navigation,
6. Nachrichtenwesen.

Welche Kenntnisse aus der Analysis und Geometrie die Durchführung der Aufgaben aus diesen Gebieten im einzelnen erfordert, ist außer von R. Rothe und W. Lietzmann[12]) militärischerseits vor allem von G. Lechner[13]) im Auftrage von General K. Becker[14]) Vertretern des Bildungswesens gegenüber auseinandergesetzt worden, so daß ich darauf nicht ausführlich einzugehen brauche, zumal volle Übereinstimmung der Ansichten besteht.

Jedenfalls benötigt nicht nur der Offizier einer jeden Truppe, sondern auch der „Spezialist" innerhalb der technischen Truppe stets einen mit Phantasie und Vorstellungsvermögen verbundenen, die drei Dimensionen des gewöhnlichen Raumes gleichmäßig erfassenden Raumsinn, also gewissermaßen ein „*Raumgefühl*". Dieses erscheint durchaus in starkem Maße übbar, indem man wirklich *räumliche* und nicht nur *ebene Geometrie* studiert. Diese Eigenschaft ist natürlich von großem, praktischem Nutzen, da z. B. der Offizier auch in schwierigem und bergigem Gelände an Hand der Karte angeben muß, wie die Landschaft von jedem beliebig vorgegebenen Raumpunkte aussieht.

Diese *Geometrie* der gedachten Linien darf aber natürlich nicht der Selbstzweck des soldatischen Denkens werden, sondern sie soll nur die notwendige Grundlage der sich hierauf aufbauenden *Dynamik* des tatsächlichen Geschehens darstellen[15]). Das Vermögen, sich die Zusammensetzung und das Ineinandergreifen von Kräften und Bewegungen im Raume vorzustellen, bildet wiederum den Ausgangspunkt des technischen Verständnisses, welches im allgemeinen mit dem mathematischen verbunden ist.

Da der Führer in einer größeren militärischen Handlung den richtigen Einsatz *aller* Waffengattungen veranlaßt und leitet, muß er mit jeder einzelnen, insbesondere auch mit den immer zahlreicher und wichtiger werdenden technischen, in hohem Maße vertraut sein. Es ist schwer zu sagen, wo hier die zweckmäßigste Grenze zu

12) R. Rothe, a. a. O. 10.
W. Lietzmann, Die Wehrwissenschaften und der mathematisch-physikalische Unterricht. Zs. f. math. u. naturw. Unterricht 68 (1937), S. 153—160.

13) G. Lechner, Soldaten und Mathematik. Jahresber. D. M. V. 45 (1935) Heft 1—4, S. 15—17 kursiv.

14) K. Becker, Forderungen des Heeres an den mathematischen Schulunterricht. Die deutsche höhere Schule 4 (1937), S. 258—261.

15) a. a. O. 9 b, S. 100—101.

Digitized by Google

ziehen ist, wieweit er nämlich Einzelheiten über Geschwindigkeit, Leistungsfähigkeit und dergl. beherrschen muß, ohne sich aber durch diese Teilangaben in seinem großen Plan belastet oder abgelenkt zu fühlen. Heutzutage müssen ja auch von der Infanterie Waffen artilleristischer Art mitgeführt werden, schon um sich z. B. überraschender Angriffe von Panzerwagen und Tanks erwehren zu können, so daß *jeder* Offizier ein tieferes Verständnis der Technik benötigt. Man erkannte ihre große Bedeutung im deutschen Heer der Vorkriegszeit erst recht spät. Zur Förderung der hochschulmäßigen Ausbildung der sog. technischen Offiziere wurde 1903 die *militär-technische Akademie* gegründet, welche stark um ihre Anerkennung zu kämpfen hatte. Ihre Tradition wird heute durch die *wehrtechnische Fakultät der technischen Hochschule zu Berlin* gepflegt. —

Es ist in der Zukunft mit der Möglichkeit zu rechnen, daß die Erkundung der feindlichen Maßnahmen eingehender erfolgen wird, so daß jenen Absichten mit größerer Sicherheit und „Berechenbarkeit" entgegengetreten werden kann. Und noch ein psychologisches Moment erscheint wichtig: Je größer die Wirkung der modernen Waffen wird, umso mehr wird auch die Verantwortung derjenigen Männer wachsen, die sie bedienen bezw. ihre Verwendung veranlassen und leiten werden. So ist gerade die vollständige Einsicht in die physischen und psychischen Zusammenhänge, wenn sie bei *allen* Beteiligten vorhanden ist, unter der Voraussetzung absoluter Gerechtigkeit geeignet, die Gegner zu einen und sie auf dieser Basis zu friedlichem, kulturellem Wettstreit zu veranlassen[16]). Da aber diese allgemeine Einsicht infolge der menschlichen Unvollkommenheiten und Leidenschaften nicht absolut gesichert erscheint, besteht für ein Volk die Notwendigkeit, sich gegen Übergriffe von Seiten der Anderen mit allen Mitteln zu schützen, um nicht einen „Selbstmord zu Ehren der Menschlichkeit"[17]) zu begehen.

Der Verlauf des Weltkrieges hat nach dem sachlichen Urteil gewissenhafter und verantwortungsbewußter, kriegsgeschichtlicher und technischer Sachverständiger gezeigt[18]), daß die deutsche Vorkriegsbereitschaft in *technischer* und — damit eng zusammenhängend — auch in *psychologischer* Hinsicht im großen und ganzen leider der gegnerischen, insbesondere der französischen unterlegen

16) K. L. v. Oertzen, Grundzüge der Wehrpolitik. Hamburg 1933, S. 265. A. Blau, Geistige Kriegführung. Potsdam 1937, S. 6.

17) H. Ritter, Der Zukunftskrieg und seine Waffen. Leipzig 1924, S. 101.

18) H. Ritter (Pseudonym: Von einem Generalstäbler), Kritik des Weltkrieges. Leipzig 1920.
K. Justrow, Feldherr und Kriegstechnik. Oldenburg i. O. 1933.

Digitized by Google

gewesen ist. Die letztere konnte ja auch an die jahrhundertalte Tradition der berühmten École polytechnique anknüpfen. Durch diese Feststellung, welche nicht unwidersprochen geblieben ist, werden jedoch weder das große Vermächtnis des Grafen Schlieffen noch das übermenschliche, in der Weltgeschichte bisher nicht erreichte und unvergeßliche Heldentum deutscher Soldaten in diesem Völkerringen in keiner Weise angetastet. Auch soll durch die Erwähnung jenes Umstandes nicht wieder ein unseliger Meinungsstreit entfacht werden, welcher der Gemeinsamkeit des Zieles nur schadet [19]). Es erwächst vor allem die ernste Pflicht daraus, eine derartige Möglichkeit von gefahrbringenden Unterlassungen garnicht erst aufkommen zu lassen. General K. Becker hat an Hand von zahlreichen geschichtlichen Beispielen nachgewiesen [20]), daß „die Wehrtechnik stets entscheidenden Einfluß auf den Verlauf der Kampfhandlungen und der Kriege gehabt hat", so daß sich jene sachlichen Forderungen zwangsläufig ergeben. Daß die moderne Technik durch die Vielfältigkeit und Wirksamkeit ihrer Mittel die Kampfsituation, auch seelisch entscheidend beeinflußt, schildert K. Pintschovius in anschaulicher und überzeugender Weise [21]). Auch betont er die nachhaltige Wirkung der Tatsache, daß man in dem Kampf*raum*, zu welchem sich die Kampf*front* erweitert hat, einem nur schwer sichtbaren Gegner gegenübersteht, so daß man das unangenehme, belastende Gefühl nicht unterdrücken kann, es nicht mit bewußt handelnden Persönlichkeiten, sondern mit willkürlich und zufällig wirkenden, seelenlosen Elementen als Gegnern zu tun zu haben. — Gegen die Überzahl der Feinde, die das unter seinem Führer geeinte deutsche Reich trotz aller Verständigungsbemühungen wahrscheinlich noch lange haben wird, und gegen die Fülle ihrer materiellen und menschlichen Reserven kann nur die eigene, sich aus allen seelischen, geistigen und körperlichen Einzelkräften harmonisch zusammensetzende Gesamtqualität das erreichen, was wir unserer Kultur und Tradition schuldig sind.

19) Vgl. die Aufsätze „Mensch und Technik in modernen Heeren" von Simoneit, Schmid und Ritter v. Radlmeier i. d. Beil. „Taktik und Technik" zu „Deutsche Wehr" 1934 sowie „Der Kampf um die Technik im neuzeitigen Heere" von Justrow und „Soldatenerziehung im Licht der Kriegsgeschichte" von Kabisch in „Deutscher Wille" 1934.

20) K. Becker, Wehrtechnik. Zs. d. Ver. deutsch. Ing. 78 (1934) Nr. 8, S. 249—252.

21) K. Pintschovius, Die seelische Widerstandskraft im modernen Kriege. Oldenburg. i. O. 1936. Insbes. S. 81 u. 82. Enthält Literaturnachweis.

Digitized by Google

Auch auf unserem mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet ist eine individuell optimale, gründliche und vertiefte *Vorbereitung durch die höhere Schule notwendiger denn je*, wobei jedoch *„wichtiger als der Stoff der Mensch ist“*, wie L. Baumgartner[22]) nachdrücklich betont, während nach G. Hamel[23]) die *„Erziehung zur Gediegenheit und die Erweckung eines mathematischen Gefühls“* im Vordergrund stehen müssen. Es muß entschieden betont werden, daß nur in diesem aufnahmefähigsten Alter des jungen Menschens ihm die *elastische und logische Denkweise sowie die sicheren Wissensgrundlagen* vermittelt werden können, auf denen später durch das *militärische Bildungswesen* aufgebaut werden muß, und welche das ganze Leben hindurch wirksam werden.

4. *Zusammenfassung.* Wenn einige positive Eigenschaften und Wirkungen mathematischer Betätigung, als für diese charakteristisch, hervorgehoben worden sind, so soll dies keine geschmacklose Selbstverherrlichung oder Unfehlbarkeitserklärung sein. Gerade als Mathematiker kann man leicht die Grenzen seines *individuellen* Könnens feststellen und seine Selbstbesinnung vertiefen. Andererseits kann der Forscher auf diesem Gebiet aber auch durch die erzielten Erfolge die berechtigte und stolze Überzeugung bekommen, daß *seine Wissenschaft* überhaupt jedes numerisch (im weitesten Sinne) formulierbare Problem in endlicher Zeit, allen praktischen Anforderungen entsprechend und jederzeit von jedermann kontrollierbar, lösen können wird. Die meisten Ablehnungen der Mathematik von seiten Außenstehender werden — wie auch in anderen Fällen — auf zu geringer sachlicher Vertrautheit mit ihrem *Denken* beruhen, indem man nur die Nüchternheit ihrer *Werkzeuge* sieht, so daß sie sich durch wesensmäßige Vertiefungen in den eigentlichen Gegenstand, welche allerdings einige Zeit erfordern, beseitigen lassen dürften. Schwieriger wird es sein, die stimmungs- und gefühlsmäßige Abneigung dem sog. *naturmechanischen Weltbild* gegenüber zu beheben, welches in seiner übersteigerten Form „das Leben nur als eine sehr komplizierte Maschine auffaßt“[24]). Seine methodische Siegeskraft liegt jedoch bereits in seiner Universalität und

22) L. Baumgartner, Gedanken über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Die deutsche höhere Schule 4 (1937), S. 197—205.

23) G. Hamel, Was erwartet die Wissenschaft, insbesondere die Technik, von dem mathematischen Unterricht der höheren Schulen? Unt.-Bl. f. Math. u. Naturw. 43 (1937) Nr. 5, S. 129—133.

24) K. Jaspers, Psychologie der Weltanschauungen. 3. Aufl. Berlin 1925. S. 158—160.

Digitized by Google

Stetigkeit sowie in der anschaulichen und diskussionslosen Verifizierbarkeit der Ergebnisse seiner abstrakten Denkprozesse begründet. Diese Zurückhaltung muß aber dann geringer werden, wenn man einsieht, daß auch Gefühl und Phantasie ihren angemessenen Platz in der scheinbar so nüchternen exakten Wissenschaft haben, allerdings erst auf einer Stufe, welche durch die Mannigfaltigkeit und Differenziertheit der Grundlagen die Möglichkeit bietet, mehrere Lösungswege im „Unterbewußtsein" gegeneinander abzuwägen, ehe man sich für die strenge Befolgung eines von ihnen entscheidet. Wer diese Zweifel innerlich überwunden hat, wird leicht zugeben, daß erstens eine Anlage zu *logischem Denken* durch richtige, psychologisch bestimmte Pflege und Anwendung der Mathematik wesentlich gefördert, und daß zweitens hierdurch das *Verantwortungsgefühl* gestärkt wird.

Diese beiden Ziele der Erziehung hatte aber Scharnhorst im Auge, als er für den Mathematikunterricht in Verbindung mit wohlgeleiteten, eigenen Übungen an der Kriegsakademie eintrat. Seine entschiedenen Feststellungen bringen Notwendigkeiten zum Ausdruck, welche heute, wenn es um die Sicherung der vom Führer erkämpften Wehrfreiheit unseres Vaterlandes geht, in weit stärkerem Maße als vor 125 Jahren hervortreten, als man viele technische Mittel noch wenig oder garnicht auszunutzen verstand (z. B. Dampf, Elektrizität), und als Taktik und Strategie noch nicht im entferntesten die heutigen Raum- und Geschwindigkeitsverhältnisse kannten[25]). Auch wir können seiner Ansicht nur vorbehaltlos zustimmen und sie zu der unsrigen machen, die Auffassung nämlich, daß es — abgesehen von den wenigen Ausnahmefällen eines *angeborenen* strategischen Genies — für alle Offiziere notwendig sei, „den mathematischen Geist zu erwerben, den Geist der *Ordnung*, der *Bestimmtheit*, der *Deutlichkeit* und der *Bündigkeit* im Denken"[26]).

25) H. Nuber, Die psychische Elastizität des militärischen Führers. Ber. üb. d. 14. Kongreß d. deutsch. Ges. f. Psychologie in Tübingen 1934. Jena 1935. S. 206—207.

26) a. a. O. 9 a, S. 16.

Digitized by Google

Beweis des Induktionsschlusses der natürlichen Zahlen aus der Dedekindschen Definition endlicher Mengen[1]).

Von Victor Freiherr von Seckendorff in Berlin.

Die Definition der endlichen Menge von Richard Dedekind bietet einen eindeutigen und klaren Ausgangsbegriff für die axiomatische Theorie der natürlichen Zahlen. Darum liegt der Gedanke nahe, den Induktionsschluß, auf dem das Gebäude der natürlichen Zahlen in Form der 5 Axiome von Giuseppe Peano aufbaut, aus dieser Definition zu beweisen. Sie lautet:

Definition: Eine Menge $\mathfrak{M}$ ist *endlich*, wenn jede mit $\mathfrak{M}$ nicht identische Teilmenge $\mathfrak{T}$ auch nicht gleich $\mathfrak{M}$ ist.

Das Gegenteil hierzu besagt: $\mathfrak{M}$ ist *unendlich*, wenn es eine mit $\mathfrak{M}$ nicht identische Teilmenge $\mathfrak{T}$ gibt, die gleich $\mathfrak{M}$ ist.

Zwei verschiedene Elemente bilden zusammengefaßt eine endliche Menge, erweisen also die widerspruchsfreie Daseinsfähigkeit der in der Definition geforderten Gegenstände. Der entsprechende Gedanke ist im Peanoschen System nicht so durchsichtig.

Die folgende Darstellung des Beweises ist gemäß dem zur Verfügung stehenden Raum wesentlich gekürzt, und ich muß deshalb auf eine spätere ausführliche Darstellung hinweisen. Das Urteil, welche Axiome der Beweis benutzt, und ob die vorgelegten Mittel wirklich in strengen Formeln und bis in jede Einzelheit durchführbar sind (siehe z. B. Funktionsbegriff) muß an dieser Stelle dahingestellt bleiben, obwohl es für die mathematische Grundlagenforschung das Entscheidende ist. Diese Zeilen sollen nur einen Einblick in die Schwierigkeiten geben, die der Durchführung des Grundgedankens (siehe Satz 3) entgegenstanden. Und es soll zwischen dem formalen Begriff und der Anschauung vermittelt werden, in welchem Verhältnis der Kern dieses Gedankenganges verborgen ist. Von hier aus führt auch der Weg in die großen Problemzusammenhänge, darein dieser Beweis mit bestimmten Mitteln einen Einblick gewähren soll; auch hierauf kann nicht eingegangen werden.

Es handelt sich zunächst darum alle für den Gedankengang benutzten Begriffe von nicht rein mengentheoretischen Bestandteilen zu *reinigen*. (Die Mengenlehre baut auf der Menge als

1) Vorgetragen in der 327. Sitzung am 24. März 1937.

Digitized by Google

Gegenstand und dem Enthaltensein als *Beziehung* zwischen diesen Gegenständen auf.)

Den Vergleich von Mengen bewerkstelligt man mit Hilfe der eineindeutigen Funktion. Was ist die *Funktion* $\mathfrak{F}$ *der* $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ *mit* $\mathfrak{q}$ *in* $\mathfrak{Q}$[2])? Eine *Zuordnung* $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{Q}$ ist eine Menge $\mathfrak{P}$, die von jedem $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ wenigstens ein Element, aber auch nur höchstens eines enthält (sozusagen werden also die Elemente von $\mathfrak{P}$ durch ihre Zusammenfassung in der Menge $\mathfrak{P}$ alle einander zugeordnet). Eine *Funktion* $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{Q}$ ist dann eine Summe von Zuordnungen $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{Q}$. Die Funktion $\mathfrak{F}$ ist *eineindeutig*, wenn je 2 Zuordnungen $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ entweder identisch sind oder kein Element gemeinsam haben. Eine Funktion $\mathfrak{F}$ ist also anschaulich gesprochen eine *strukturierte* Menge, d. h. wir merken uns die „Veränderlichenmengen" $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{Q}$ und die Zuordnungsmengen $\mathfrak{P}$, aus denen sie entstanden ist.

Zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind dann gleich, wenn es unter der Gesamtheit aller eineindeutigen Funktionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wenigstens eine gibt, in der die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthalten ist. Gibt es keine solche Funktion, so ist $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$. Man sieht sofort, daß die aus der Ordinalzahltheorie bekannte Frage, ob jede Abbildung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufeinander zum selben Ergebnis führt, garnicht zur Sache gehört.

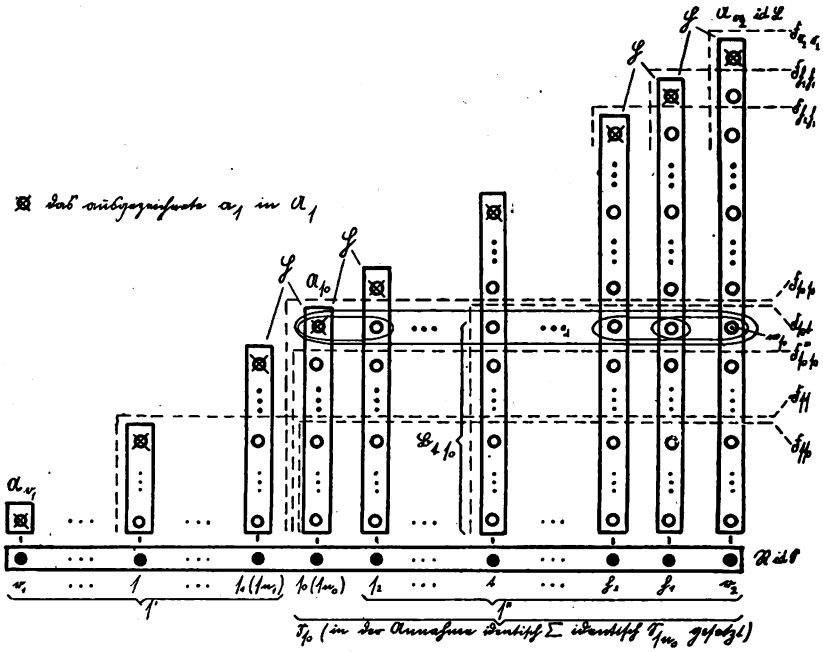
Die *Größer-* und *Kleinerbeziehungen* werden wie üblich erklärt. Lediglich die *Transitivitäts-* und *Asymmetriegesetze* erfordern einige Aufmerksamkeit. Ein elementarer Beweis gelingt, wenn eine der im Satze vorkommenden Mengen endlich ist. Damit sind die Mittel, aus denen sich der Beweis des Induktionsschlusses aufbaut, alle herbeigeschafft.

Nun ist die Grundlage der Ordinalzahltheorie, daß wenn man eine Reihe endlicher Zahlen bis zum n-ten Gliede (der Ordinalzahl n) abschreitet, man an *genau* n Gliedern vorbeikommt, wofern man nur alle Ordinalzahlen $m \leqq n$ dabei berührt. Dieser sehr anschauliche Satz wird den Mittelpunkt des Beweises bilden und lauten: die Anzahl aller Ziffern kleiner oder gleich 5 ist selbst gleich 5. Offenbar liegt in dieser Tatsache die Ursache, daß man die Ordinalzahlen als gleichwertiges Darstellungsmittel für die Kardinalzahlen verwenden kann.

2) Große deutsche Buchstaben $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ ... bedeuten Mengen, kleine $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ ... Elemente. Die Ausdrucksweise „$\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{Q}$" bedeutet: zu jedem $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{Q}$ ist eine Menge $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ gegeben. (Aus der Schrift ist immer klar ersichtlich, wann Indizes nur Unterscheidungsmerkmale bedeuten und wann sie diesen besonderen Sinn haben.)

Digitized by Google

Der vorstehende Hauptsatz unseres Beweises muß jetzt eine genaue Formulierung erhalten (siehe hierzu die Figur): Es sei die *endliche Menge* $\mathfrak{L}$ gegeben. Ferner seien gewisse $\mathfrak{A}_\tau$ mit τ in $\mathfrak{R}$ gegeben, welche folgenden Bedingungen genügen mögen: 1. zu jedem $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{L}$ gibt es ein $\mathfrak{A}_\tau$ mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}_\tau$, 2. alle untereinander gleichen $\mathfrak{K}$ besitzen aber nur einen einzigen Vertreter $\mathfrak{A}_\tau$, 3. stets ist $\mathfrak{A}_\tau \leqq \mathfrak{L}$. Dann heißt $\mathfrak{R}$ eine *gewöhliche Reihe der Länge* $\mathfrak{L}$. Offenbar vertritt $\mathfrak{R}$ den Begriff „Anzahl aller Ziffern kleiner



oder gleich $\mathfrak{L}$“. Kann man zu jeder Menge $\mathfrak{L}$ wirklich gewisse $\mathfrak{A}_\tau$ mit τ in $\mathfrak{R}$, die den vorstehenden Bedingungen genügen, als *existent* annehmen? (Eine Frage, mit der der Beweis offenbar steht und fällt.) Zur Beantwortung zeige ich zweierlei: 1. Man kann immer endliche Mengen so angeben, daß es *kein* $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{L}$ geben kann, für welches nicht unter diesen Mengen eine gleiche vorhanden wäre. Solche Mengen sind durch die Menge $\mathfrak{G}(\mathfrak{L})$ aller Teilmengen $\mathfrak{T}_\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{L}$ (mit $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{G}(\mathfrak{L})$) gegeben; denn zu jedem $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{L}$ gibt es *notwendig* ein $\mathfrak{T}_\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{T}_\mathfrak{g}$. 2. $\mathfrak{R}$ ist wirklich eine *Menge*. Das ist klar, da $\mathfrak{G}(\mathfrak{L})$ eine Menge ist (man kann sich bei zureichender Vorsicht im Beweis $\mathfrak{R}$ als Teilmenge von $\mathfrak{G}(\mathfrak{L})$ vorstellen). Der Hauptsatz nimmt jetzt folgende Gestalt an: es ist $\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{L}$ und damit $\mathfrak{R}$ endlich. $\mathfrak{G}(\mathfrak{L})$ liefert keine brauchbare Abschätzung von $\mathfrak{R}$, denn es ist zwar $\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{G}(\mathfrak{L})$, aber $\mathfrak{G}(\mathfrak{L})$

Digitized by Google

$= 2^{\mathfrak{L}}$ und somit erheblich größer als $\mathfrak{L}$, vielleicht sogar unendlich.

Wir wissen nicht einmal, ob alle $\mathfrak{A}_r$ untereinander vergleichbar sind, d. h. ob zwischen 2 $\mathfrak{A}_r$ eine der Beziehungen $= < >$ gilt. Darum bilden wir die Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$, indem wir alle $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ zusammenfassen die untereinander und mit $\mathfrak{L}$ vergleichbar sind. Jedes nicht zu $\mathfrak{S}$ gehörige $\mathfrak{A}_r$ ist mit mindestens einem der zu $\mathfrak{S}$ gehörigen $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ unvergleichbar. Wir wissen zunächst nicht ob es kein oder ein oder mehrere $\mathfrak{S}$ gibt; später wird $\mathfrak{R}$ identisch $\mathfrak{S}$ bewiesen.

Leicht zu beweisen ist der

Hilfssatz 1: Ist $\mathfrak{A}$ endlich, so ist $\mathfrak{A}+\mathfrak{a}$ endlich, $\mathfrak{A}+\mathfrak{a} > \mathfrak{A}$, und es gibt kein $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}+\mathfrak{a}$. (Alles beweist man elementar durch Widerspruch, indem im entgegengesetzten Falle $\mathfrak{A}$ unendlich wäre.)

Mit diesem Hilfssatz beweist man, daß bei gegebenem $\mathfrak{S}$ jedes zu $\mathfrak{S}$ gehörige $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ inbezug auf die übrigen $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ einen Schnitt bildet, also den

Satz 2: $\mathfrak{A}_{r_1} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}'} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_1} < \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} < \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_2} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}''} \leqq \mathfrak{A}_{r_2}$, wobei $\mathfrak{A}_{r_1}$ nur ein Element enthält, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0} - \mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_2} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} + \mathfrak{a}_2$ $\mathfrak{A}_{r_2} = \mathfrak{L}$ ist. (Dabei kommen $\mathfrak{A}_{r_1}$ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_1}$ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_2}$ $\mathfrak{A}_{r_2}$ unter den $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ vor.)

Beweis: Zu $\mathfrak{A}_{r_1}$: jedes $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ enthält wenigstens 1 Element. Zu $\mathfrak{A}_{r_2}$: voraussetzungsgemäß. Ich zeige den Beweis für $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_1}$ (für $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_2}$ verläuft er genau so): Daß $\mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0} - \mathfrak{a}_1$ mit allen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}''} \geqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0}$ vergleichbar ist, ist wegen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0} - \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0}$ (nach dem Hilfssatz 1) und $\mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}''}$ nach dem Transitivitätsgesetz. Für alle $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}'}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}'} < \mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0}$ gilt: sie sind wenigstens um ein Element kleiner als $\mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0}$, daher gilt $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}'} + \mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0} = (\mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0} - \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_1$, woraus durch streichen von $\mathfrak{a}_1$ alles folgt. Also ist $\mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0} - \mathfrak{a}_1$ mit allen zu $\mathfrak{S}$ gehörigen $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ vergleichbar. Da es kleiner oder gleich $\mathfrak{L}$ ist, gibt es ein $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{j}_0} - \mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{j}_1$ in $\mathfrak{R}$, und wegen der vorstehenden Vergleichbarkeitseigenschaft ist $\mathfrak{j}_1$ in $\mathfrak{S}$.

Aus Satz 2 folgt, daß zu jedem $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ ein $\mathfrak{S}$ vorhanden ist. Denn zu jedem $\mathfrak{S}$ gehören die Mengen $\mathfrak{A}_{r_1}$ und $\mathfrak{A}_{r_2} = \mathfrak{L}$, unter Umständen auch $\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_1} = \mathfrak{L} - \mathfrak{j}_1$ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_2} = \mathfrak{L} - (\mathfrak{j}_1 + \mathfrak{j}_2)$.

Nun folgt derjenige Satz, welcher die Hauptschwierigkeiten des Beweises überwindet:

Satz 3: $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{L}$ (also da $\mathfrak{L}$ endlich ist, ist auch $\mathfrak{S}$ endlich).

Der Beweis hat die Aufgabe, die in Satz 2 erkannten Größenverhältnisse der $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ auf Enthaltenseinsverhältnisse abzubilden: die Schattenbilder der $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ sollen auf der Menge $\mathfrak{A}_{r_2}$ (identisch $\mathfrak{L}$) in bestimmter Weise zur Deckung gebracht werden und zwar so, daß die Teilmengen von $\mathfrak{A}_{r_2}$, welche jeweils

Digitized by Google

mit einem Schattenbild eines der $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ zusammenfallen, zueinander entsprechende Enthaltenseinsverhältnisse aufweisen wie an Größenverhältnissen die $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ in Satz 2. Dieses Verfahren ist *nur* bei *endlichen* Mengen anwendbar, da *nur* endliche Mengen als *echte Teilmenge* einer anderen Menge auch *kleiner* sind als diese und *nicht gleich* derselben.

Der Satz wird so bewiesen: Aus Satz 2 ersieht man, daß es eineindeutige Funktionen $\mathfrak{F}$ gibt, die jedes $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ auf Teilmengen $\mathfrak{B}_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_0}$ aller $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} \leqq \mathfrak{A}_\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2}$ abbilden. Zu jedem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ gibt es sicher in jedem $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{A}_\mathfrak{f} > \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ Teilmengen $\mathfrak{B}_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_0}$ für die $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_0}$ ist. Man wähle zu jedem $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ unter den möglichen eineindeutigen Funktionen von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ und $\mathfrak{B}_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_0}$ *eine* aus. Zu jedem $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}_0}$ aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ faßt man nun diejenigen Zuordnungen sämtlicher ausgewählter Funktionen zusammen, die $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}_0}$ enthalten; dadurch entsteht eine Zuordnung von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ und allen $\mathfrak{B}_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_0}$. Faßt man alle so bildbaren Zuordnungen zusammen, so erhält man eine eineindeutige Funktion $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ und allen $\mathfrak{B}_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_0}$, welche zugleich eineindeutige Funktion der $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} \leqq \mathfrak{A}_\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2}$ ist (da die $\mathfrak{B}_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_0}$ Teilmengen der entsprechenden $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ sind). Offenbar bildet die Funktion $\mathfrak{F}$ die *ganze* Menge $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ auf Teilmengen der $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} \leqq \mathfrak{A}_\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2}$ ab.

Um den Zweck der im Vorstehenden als vorhanden nachgewiesenen Funktionen $\mathfrak{F}$ übersichtlich und mit *ausreichender formaler Genauigkeit* auseinanderlegen zu können, müssen einige *Definitionen* eingeführt werden: Zunächst werde mit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}_0}$ die Teilmenge aller derjenigen $\mathfrak{f}$ aus $\mathfrak{S}$ bezeichnet, für die $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} \leqq \mathfrak{A}_\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2}$ bei fest gegebenem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ ist. Offenbar ist jede der oben zu einem beliebigen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ konstruierten eineindeutigen Funktionen $\mathfrak{F}$ eine Funktion der $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}_0}$. Wählt man irgend ein beliebiges $\mathfrak{A}_\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}_0}$ und trennt von jeder Zuordnung aus $\mathfrak{F}$ alle Elemente aus den $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} \leqq \mathfrak{A}_\mathfrak{f} < \mathfrak{A}_\mathfrak{t}$ ab, so bleiben Zuordnungen der $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}_\mathfrak{t}$ übrig; diese bilden eine eineindeutige Funktion der $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}_\mathfrak{t}$, welche $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{t}}$ genannt werden möge. Offenbar ist dann $\mathfrak{F}$ identisch $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0}$, ferner $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{t}}$ enthalten in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0}$ für $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}_0}$. Weiter möge, wenn $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}_0}$ ein ausgezeichnetes Element von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ ist, $\bar{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0}$ diejenige eineindeutige Funktion bedeuten, die übrig bleibt, wenn die $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}_0}$ enthaltende Zuordnung von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0}$ (es gibt wegen der Eineindeutigkeit von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0}$ nur eine einzige) aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0}$ fortgelassen wird. Offenbar gibt es zu jedem $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0}$ bei festem $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}_0}$ in $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ nur ein einziges $\bar{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0}$.

Nun wird diejenige Behauptung ausgesprochen, welche die Grundlage des zu beweisenden Satzes ausmacht; mit ihrem Beweis wird die eigentliche Schwierigkeit des Gedankenganges überwunden sein:

Digitized by Google

(B) Es lassen sich zu den $\mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{S}$ Funktionen $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}$ derart auswählen, daß es zu jedem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$

1. ein *einziges* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}_0\mathfrak{i}_0}$ gibt
2. und für jedes $\mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{A}_\mathfrak{i} < \mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$ auch $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}_0}$ in $\mathfrak{F}^-_{\mathfrak{i}_0\mathfrak{i}_0}$ erhalten ist. (Damit ist natürlich gemeint, daß jede Zuordnung von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}_0}$ auch Zuordnung von $\mathfrak{F}^-_{\mathfrak{i}_0\mathfrak{i}_0}$ ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß in jedem $\mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ ein bestimmtes $\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ ausgezeichnet ist.)

Der Beweis von (B) ist nicht ohne eine Hilfsvoraussetzung zu machen. Denn würde man den direkten Weg einschlagen, und zu einem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$ eines der als vorhanden erwiesenen $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}_0\mathfrak{i}_0}$ auswählen, so wäre jede weitere Auswahl eines $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}$ zu irgend einem $\mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ offenbar von der bereits getroffenen Auswahl abhängig. Um für alle $\mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{S}$ die in (B) geforderte Auswahl zu treffen, müßte man also die Gültigkeit der sukzessiven Maßnahmen des Induktionsschlusses voraussetzen. Das muß umgangen werden.

Die Hilfsvoraussetzung ist folgender Art: In jedem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$ sei ein (an sich willkürlich wählbares) Element $\mathfrak{a}_{\mathfrak{i}_0}$ fest ausgezeichnet. Es sei ferner zu $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$ das $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{i}_0}$ gegeben, und unter den aus dieser Gleichheit entspringenden eineindeutigen Funktionen zwischen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1}$ und $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{i}_0}$ bzw. $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$ eine einzige (an sich willkürlich wählbare) ausgezeichnet, $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0})$ genannt. Zuerst wird nun behauptet:

(B′) Zu den $\mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{S}$ gibt es Funktionen $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}$ derart, daß eine Zuordnung aus einem $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0})$ entweder ganz einer Zuordnung aus einem $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}$ angehört oder gar nicht, wofern $\mathfrak{i}_1$ $\mathfrak{i}_0$ beide in $\mathfrak{S}_\mathfrak{i}$ vorkommen.

Weiter wird behauptet:

(B″) Die $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}$ aus (B′) erfüllen (B).

Man ersieht, daß mit dem Beweis der Behauptungen (B′) und (B″) der Induktionsschluß umgangen ist, da die Auswahlakte der $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0})$ völlig unabhängig voneinander geschehen können. Beide Behauptungen (B′) (B″) werden zugleich bewiesen.

Es gibt $\mathfrak{S}_{\mathfrak{i}\mathfrak{n}}$ für die (B′) (B″) gilt, wofern man nur darin statt $\mathfrak{S}$ schreibt $\mathfrak{S}_{\mathfrak{i}\mathfrak{n}}$. Denn sind $\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2}$ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{r}_2}$ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_2} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_1} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{h}_1}$ gegeben, dazu $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_1}\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2})$ $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_2}\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_1})$, und bildet man durch zusammensetzen der entsprechenden Zuordnungen der $\mathfrak{H}$ die 3 Funktionen $\mathfrak{F}_{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}$ $\mathfrak{F}_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_1}$ $\mathfrak{F}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_2}$, so sind $\mathfrak{S}_{\mathfrak{r}_2}$ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{h}_1}$ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{h}_2}$ derartige Mengen.

Sei $\sum$ die Summe aller $\mathfrak{S}_{\mathfrak{i}\mathfrak{n}}$. Dann gelten (B′) (B″) auch für $\sum$. (Es kann für ein $\mathfrak{i}$ in $\sum$ nicht 2 verschiedene $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}}$ $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}}$ geben, da es ein $\mathfrak{S}_{\mathfrak{i}\mathfrak{n}}$ mit $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{i}\mathfrak{n}}$ gibt, und dann für dieses $\mathfrak{S}_{\mathfrak{i}\mathfrak{n}}$ auch die beiden $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}}$ $\mathfrak{F}_{\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}}$ vorhanden wären, gegen die Definition der $\mathfrak{S}_{\mathfrak{i}\mathfrak{n}}$. —

Digitized by Google

Sind weiter $\mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_2$ in $\sum$ gegeben, so gibt es auch ein $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}}$, in dem beide liegen. — Aus diesen beiden Tatsachen folgen die Behauptungen über $\sum$.)

Behauptet wird: Es ist $\sum \leqq \mathfrak{L}$ und daher $\sum$ endlich. Denn ordnet man jedem $\mathfrak{f}$ aus $\sum$ das ausgezeichnete $\mathfrak{a}_\mathfrak{f}$ aus $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ zu, jedem $\mathfrak{a}_\mathfrak{f}$ das $\mathfrak{w}_\mathfrak{f}$ aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2}$, welches in der einzig vorhandenen Zuordnung $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}$ vorkommt, die $\mathfrak{a}_\mathfrak{f}$ enthält, so ist alles bewiesen, da die Zuordnungen $\mathfrak{P}$ jeweils entweder identisch sind oder kein Element gemeinsam haben. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller $\mathfrak{a}_\mathfrak{f}$, $\mathfrak{W}$ die Menge aller $\mathfrak{w}_\mathfrak{f}$ (also $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2}$). Dann gilt also $\sum = \mathfrak{A} = \mathfrak{W} \leqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_2} = \mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{L}$ endlich ist folgt daraus die Endlichkeit der übrigen Mengen.

Die weitere Aufgabe des Beweises wird nun der Nachweis der Identität von $\mathfrak{S}$ und $\sum$ sein. Zu diesem Zwecke wird zunächst gezeigt, daß $\sum$ selbst eine der Mengen $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}}$ ist. Da $\sum$ mit jedem $\mathfrak{f}_0$ auch alle $\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{A}_\mathfrak{f} \geqq \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ enthält, genügt es zu zeigen, daß unter den $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\sum$ ein kleinstes $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}_0}$ vorkommt. Denn andernfalls gäbe es zu jedem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ unter den $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\sum$ ein $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}'}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}'} < \mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$, also auch ein $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_1}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{i}_0}$ (da alle zwischen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}'}$ und $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$ liegenden $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ auch unter den $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\sum$ vorkommen). Die Menge $\mathfrak{S}_1$ aller $\mathfrak{f}_1$ ist Teilmenge von $\sum$, und gleich $\sum$, wenn jedem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_0}$ das $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1}$ zugeordnet wird (da verschiedenen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ auch verschiedene $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_1}$ zugehören); es ist aber $\mathfrak{S}_1$ nicht identisch $\sum$ (da $\mathfrak{r}_2$ aus $\sum$ in $\mathfrak{S}_1$ fehlt); nach der Dedekindschen Definition müßte $\sum$ also unendlich sein, während $\sum$ soeben als endlich erwiesen wurde.

Wäre nun $\sum$ nicht identisch $\mathfrak{S}$, so käme unter den $\mathfrak{A}_\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\sum$ *nicht* das $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}_0} - \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}_0}$ vor. Zeigt man aus $\mathfrak{H}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}_1}\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}_0})$ und $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}_0\mathfrak{f}\mathfrak{n}_0}$ (durch zusammenfassen der entsprechenden Zuordnungen) die Existenz eines einzigen $\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1}$, so sieht man, daß $\mathfrak{f}_1 + \sum$ auch ein $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}_1}$ ist, das aber *nicht* unter den $\sum$ bildenden $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}}$ vorkommt, im Widerspruch zur Definition von $\sum$, welches *alle* $\mathfrak{S}_{\mathfrak{f}\mathfrak{n}}$ umfassen soll. Darum muß $\sum$ identisch $\mathfrak{S}$ sein.

Da bereits $\sum \leqq \mathfrak{L}$ erwiesen ist, ist nun auch der wichtige Satz $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{L}$ endgültig bewiesen.

Es wird nunmehr bewiesen der

Satz 4: Sind die endlichen Mengen $\mathfrak{L}_\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$ gegeben, so ist unter ihnen ein kleinstes $\mathfrak{L}_{\mathfrak{m}_0}$ vorhanden, abgesehen von etwaigen $\mathfrak{L}_{\mathfrak{m}_0}$ gleichen $\mathfrak{L}_\mathfrak{m}$. (Es ist also $\mathfrak{L}_{\mathfrak{m}_0} \leqq \mathfrak{L}_\mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$. Das besagt zugleich, daß $\mathfrak{L}_{\mathfrak{m}_0}$ vergleichbar mit jedem $\mathfrak{L}_\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$ ist.)

(Dieser Satz wurde bereits von Mario Pieri 1908 und S. Kaczmarz 1932 als Axiom an Stelle des Induktionsschlusses benutzt.)

Digitized by Google

Zum Beweise werde festgesetzt: ist $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}\mathfrak{m}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}\mathfrak{m}_2}$ (wobei $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{m}_2$ verschieden sein dürfen), so seien $\mathfrak{f}_{\mathfrak{m}_1}\ \mathfrak{f}_{\mathfrak{m}_2}$ identisch. Behauptet wird dann: der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}}$ mit $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$ ist vorhanden; denn für alle $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}}$ ist unter den $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}}$ ein $\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}_1\mathfrak{m}}$ mit nur einem einzigen Element vorhanden.

Behauptet wird: Unter den $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}}$ mit $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{D}$ und den $\mathfrak{L}_{\mathfrak{m}}$ mit $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$ gibt es ein $\mathfrak{A}_{\mathfrak{d}}$ und ein $\mathfrak{L}_{\mathfrak{m}_0}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{d}} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{m}_0}$. Das folgt so: Notwendig gilt einer der Fälle *entweder* 1. es gibt ein Paar $\mathfrak{A}_{\mathfrak{d}}\ \mathfrak{L}_{\mathfrak{m}_0}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{d}} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{m}_0}$, *oder* 2. für alle Paare $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}}\ \mathfrak{L}_{\mathfrak{m}}$ gilt $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}} < \mathfrak{L}_{\mathfrak{m}}$ (an sich $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}} \neq \mathfrak{L}_{\mathfrak{m}}$, woraus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}} < \mathfrak{L}_{\mathfrak{m}}$ folgt, da $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}}$ für jedes $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$ ist). Fall 1. ist unsere Behauptung, Fall 2. führt zu einem Widerspruch. Denn im Fall 2. gibt es zu jedem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ ein $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_2}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_2} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0} + \mathfrak{a}_2$, und es ist $\mathfrak{f}_2$ in $\mathfrak{D}$ (denn wenn die $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{m}}$ alle untereinander gleich sind, sind es auch die um ein Element vermehrten Mengen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0\mathfrak{m}} + \mathfrak{a}_2\mathfrak{m}$). Faßt man alle $\mathfrak{f}_2$ in der Menge $\mathfrak{S}_2$ zusammen, so ist $\mathfrak{S}_2$ in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}_2$ nicht identisch $\mathfrak{D}$ (da $\mathfrak{r}_1$ aus $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{S}_2$ fehlt), $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{D}$ (wenn man jedem $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ das $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_2}$ zuordnet, da zu verschiedenen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_0}$ auch verschiedene $\mathfrak{A}_{\mathfrak{f}_2}$ gehören). $\mathfrak{D}$ müßte also nach der Dedekindschen Definition unendlich sein, während es als Teilmenge eines jeden endlichen $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}}$ selbst endlich ist.

Aus der Behauptung des vorstehenden Absatzes folgt Satz 4, da $\mathfrak{D}$ Teilmenge jedes $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}}$ mit $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$ ist.

Wendet man Satz 4 auf die Teilmengen $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{M}$ an, so erhält man den

Satz 5: Die $\mathfrak{L}_{\mathfrak{m}}$ mit $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$ sind untereinander vergleichbar.

Wendet man Satz 5 auf die gewöhnliche Reihe $\mathfrak{R}$ an, so erhält man den

Satz 6: $\mathfrak{R}$ ist identisch $\mathfrak{S}$ (also $\mathfrak{R}$ endlich und $\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{L}$).

Jetzt endlich können wir zum Beweis des Induktionsschlusses übergehen, er ist nunmehr sehr elementar. Zunächst wird die „*natürliche Zahlreihe* $\mathfrak{Z}$“ entsprechend der gewöhnlichen Reihe $\mathfrak{R}$ definiert: Zu jedem endlichen $\mathfrak{K}$ gibt es ein $\mathfrak{A}_{\mathfrak{z}}$ mit $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{Z}$, sodaß $\mathfrak{A}_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{K}$ ist; alle untereinander gleichen $\mathfrak{K}$ besitzen aber nur einen einzigen Vertreter $\mathfrak{A}_{\mathfrak{z}}$.

Hauptsatz 7: (von der vollständigen Induktion)

V 1 Sei die natürliche Zahlreihe $\mathfrak{Z}$ gegeben. (Darin liegt 1. die *unbewiesene* Voraussetzung, daß der Begriff „alle natürlichen Zahlen der natürlichen Zahlreihe“ auch wirklich eine *Menge* $\mathfrak{Z}$ definiert, 2. die Dedekindsche Definition endlicher Zahlen.)

V 2 Ferner die Menge $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{Z}$.

Digitized by Google

V 3.1 Es gibt ein $\mathfrak{A}_{m_1}$ mit m_1 in $\mathfrak{M}$, welches nur ein Element enthält.

V 3.2 Ist irgend ein $\mathfrak{A}_m$ mit m in $\mathfrak{M}$ gegeben, so ist ein $\mathfrak{A}_{m_1}$ mit m' in $\mathfrak{M}$ vorhanden, für das gilt $\mathfrak{A}_{m'} = \mathfrak{A}_m + a$.

B Dann ist $\mathfrak{M}$ identisch $\mathfrak{Z}$.

Beweis: (In der Literatur bereits bekannt.) Wäre der Satz nicht wahr, so wäre $\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}$ vorhanden. Dann gäbe es unter den $\mathfrak{A}_m$ mit m in $\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}$ ein kleinstes $\mathfrak{A}_{m_0}$. Man bilde zu $\mathfrak{A}_{m_0}$ die gewöhnliche Reihe $\mathfrak{R}$. Da nach V 3.1 $\mathfrak{A}_{m_0} \neq \mathfrak{A}_{m_1}$ ist, also mehr als nur ein Element enthält, gibt es unter den $\mathfrak{A}_r$ mit r in $\mathfrak{R}$ ein $\mathfrak{A}_{f_1}$ mit $\mathfrak{A}_{f_1} = \mathfrak{A}_{m_0} - a_1$. Da $\mathfrak{A}_{f_1} < \mathfrak{A}_{m_0}$ ist, kann f_1 nicht in $\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}$ liegen, sondern muß in $\mathfrak{M}$ liegen. Das gibt aber einen Widerspruch, da nach V 3.2 m_0 dann ebenfalls in $\mathfrak{M}$ läge, während es in $\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}$ liegen soll.

Digitized by Google

Neuere Ergebnisse zum Problem der Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeit[1]).

Von Karl Maruhn in Berlin-Adlershof.

1. *Einführung.* Bei der Untersuchung der Gestalt der Himmelskörper stößt man, wollte man alle physikalischen Gegebenheiten in Rechnung ziehen, selbst bei Anwendung des ganzen vorhandenen mathematischen Rüstzeugs, heute noch auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Daher ist man gezwungen, auf idealisierende Annahmen zurückzugreifen.

In der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten werden lediglich die Eigengravitations- und die Zentrifugalkräfte berücksichtigt, und man verlangt, daß die Flüssigkeitsmasse wie ein starrer Körper um eine im Raume feste Achse rotiere. Wir setzen überdies noch Inkompressibilität und konstante Temperatur voraus und fragen: Welche Gestalt kann ein solcher Körper annehmen?

Beschränken wir uns der Einfachheit halber zunächst auf Flüssigkeitskörper konstanter Dichte. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen von Gleichgewicht ist dann, daß das Gesamtpotential der Einheitskräfte (d. h. die Summe der Potentiale der Attraktions- und Zentrifugalkräfte) auf der Oberfläche einen konstanten Wert hat. Ruht die Flüssigkeit, so stellt die Kugel die einzige mögliche Gleichgewichtsfigur dar.

Maclaurin zeigte als erster die Existenz abgeplatteter ellipsoidischer Gleichgewichtsfiguren mit Rotationssymmetrie, und zwar entsprechen jedem genügend kleinen Wert der Winkelgeschwindigkeit ω zwei Ellipsoide verschiedener Abplattung. Die beiden „linearen Reihen" der Maclaurinschen Ellipsoide stoßen, wenn der Reihenparameter ω einen bestimmten Wert $\omega' = \sqrt{2\pi\varkappa f} \cdot 0{,}224\ldots$

1) In diesem Referat — vorgetragen in der 329. Sitzung am 26. Mai 1937 — sollen lediglich die Grundzüge der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten an wichtigen Spezialfällen und Beispielen kurz dargestellt werden. Eine vorzügliche zusammenfassende Darstellung findet sich bei L. Lichtenstein, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933. — Auf Stabilitätsfragen kann hier nicht eingegangen werden.

Digitized by Google

annimmt ($\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante, f die Flüssigkeitsdichte), zusammen; für diesen gibt es nur eine, für noch größere ω-Werte überhaupt keine ellipsoidische Gleichgewichtsfigur. Geht ω gegen Null, so endet die eine Reihe in der Kugel, die andere in einer unendlich ausgedehnten, unendlich dünnen Scheibe.

Die Vermutung, daß nur rotationssymmetrische Figuren Gleichgewichtsfiguren sein könnten, wurde von Jacobi widerlegt, der zeigte, daß sehr wohl gewisse dreiachsige Ellipsoide den Gleichgewichtsbedingungen genügen können. Bei diesen entspricht jedem $\omega < \omega''$ ($\omega'' = \sqrt{2\pi\varkappa f}.0{,}187\ldots$) eine einzige Figur. Die lineare Reihe endet für $\omega = \omega''$ in dem zu ω'' gehörigen, schwächer abgeplatteten Maclaurinschen Ellipsoid und geht für ω gegen Null in eine unendlich dünne, unendlich lange Nadel über. — Die Reihe der Jakobischen Ellipsoide „zweigt" also gewissermaßen von der der Maclaurinschen ab. Die Frage, ob vielleicht noch weitere Reihen (diesmal nichtellipsoidischer Figuren) abzweigen, wurde von Liapounoff[2]) für die Reihen beider Ellipsoide in bejahendem Sinne beantwortet.

Bei Betrachtung der Reihen der Ellipsoide erhebt sich die Vermutung, daß ganz allgemein Gleichgewichtsfiguren nicht „einzeln" auftreten, sondern sich stets zu linearen Reihen zusammenschließen. Diese Behauptung Poincarés wurde von Lichtenstein, unter Verallgemeinerung Liapounoffscher Gedankengänge, vollständig bewiesen[3]). Der Beweis, der zugleich ein Verfahren zur Bestimmung der Nachbarfiguren enthält, soll im Folgenden kurz skizziert werden.

2. *Neue Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen Figur.* Im Raume x-y-z befinde sich eine Gleichgewichtsfigur T[4]), deren Oberfläche Σ der Klasse Ah[5]) angehört und die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert. Wir fragen: Gibt es ein (hinreichend kleines) Intervall $\langle\omega^{(1)}, \omega^{(2)}\rangle$, das ω enthält, so daß zu jedem Werte der Winkelgeschwindigkeit eine neue Gleichge-

2) Vgl. die Arbeiten Liapounoffs in den Mém. de l'acad. d. sciences de Pétersbourg: 1906, S. 1 ff.; 1909, S. 1 ff.; 1912, S. 1 ff.

3) Vgl. vor allem folgende Arbeiten Lichtensteins in der Math. Zeitschr.: Bd. 1 (1918), S. 229 ff.; 7 (1920), S. 126 ff.

4) T kann auch aus mehreren Einzelmassen bestehen; um aber die Betrachtungen auf das Wesentliche zu beschränken, soll T hier nur aus einer einzigen Masse bestehen.

5) D. h.: Die Richtungskosinus der Normalen ν genügen einer Hölderbedingung, z. B. $|\cos(\nu, x)_1 - \cos(\nu, x)_2| \leqq A d_{12}^{\lambda}$; A, λ, $(0 < \lambda < 1)$ konstant, d_{12} die Entfernung der beiden Punkte auf Σ, in denen die Kosinus genommen sind.

Digitized by Google

wichtsfigur T_1 (Randfläche Σ_1) in der Nachbarschaft von T gehört? Die gesuchte Fläche Σ_1 habe stetige Normale, die zugehörige Winkelgeschwindigkeit sei ω_1. Die Punkte (X, Y, Z) oder kürzer (σ) auf Σ seien durch geeignete Gaußsche Parameter ξ, η festgelegt. — Denken wir uns jetzt in jedem Punkt von Σ die Normale (positive Richtung nach außen) gezogen und auf ihr von Σ aus die Strecke ζ aufgetragen (vgl. Abb. 1), so gehört, wenn nur $|\zeta|$ hinreichend klein ist, zu jedem Punkte (σ) auf Σ ein und nur ein Raumpunkt.

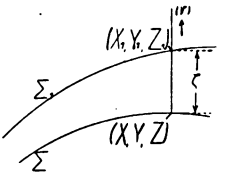


Abb. 1.

Wir setzen nunmehr voraus, daß die Gleichung von Σ_1 auf die Form

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta; \omega_1)$$

gebracht werden kann, wobei $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ als vorhanden und stetig und nebst ζ selbst dem absoluten Betrage nach als hinreichend klein vorausgesetzt werden[6]).

Es sei $\varkappa U$ das Gravitationspotential des Körpers T in einem Punkte (X, Y, Z) auf Σ ($\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante) und $\varkappa U_1$ dasjenige von T_1 in dem korrespondierenden Punkte (X_1, Y_1, Z_1) auf Σ_1. Wegen der Gleichgewichtsbedingungen muß für alle Punktepaare (X, Y, Z) und (X_1, Y_1, Z_1)

$$U_1(X_1, Y_1, Z_1) - U(X, Y, Z) = \frac{\omega^2}{2\varkappa}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(X_1^2 + Y_1^2) + \bar{s} \qquad (\bar{s} \text{ konstant}) \tag{1}$$

gelten. Bezeichnen wir mit $\varkappa\psi(\sigma)$ die Gesamtschwerkraft im Punkte (σ) auf Σ, mit f die (konstante) Dichte, und setzen wir $\lambda = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa}$, so läßt sich (1) in Form einer Integro-Differentialgleichung für ζ schreiben:

$$\psi(\sigma)\zeta(\sigma) + \int_{\Sigma} f(\sigma')\zeta(\sigma')\frac{1}{\varrho}\,d\sigma' = \bar{s} - (X^2 + Y^2)\lambda + \Pi\{\lambda, \zeta\}. \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $\varrho = \sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2}$ die Entfernung der beiden auf Σ gelegenen Punkte σ und σ', $d\sigma'$ das Flächenelement in σ' und Π die Gesamtheit sämtlicher Ausdrücke

6) In einer nachgelassenen Arbeit Lichtensteins (Math. Z. 39 (1935), S. 640) brauchte die Existenz der Ableitungen von ζ nicht vorausgesetzt zu werden.

Digitized by Google

mindestens zweiten Grades in λ, ξ, $\frac{\partial \xi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$, die zum größten Teile in Integralausdrücken vorkommen.

Sehr wesentlich für die weitere Behandlung von (2) ist die Diskussion der homogenen Integralgleichung

$$\psi \xi + \int_{\Sigma} f' \xi' \frac{1}{\varrho} d\sigma' = 0, \qquad (\xi' = \xi(\sigma')). \tag{3}$$

Diese hat im Allgemeinen mindestens zwei von Null verschiedene Lösungen $u_1(\sigma)$ und $u_2(\sigma)$; nur wenn T ein Rotationskörper ist, so ist $u_2 \equiv 0$. Diese „trivialen" Lösungen entspringen der Eigenschaft jeder Gleichgewichtsfigur, bei einer Translation längs der Rotationsachse und bei einer Drehung um diese in eine völlig ungeänderte Figur überzugehen. — Nehmen wir jetzt an, daß (3) im Ganzen m ($m \geqq 2$) von einander linear unabhängige Lösungen besitze: $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Sie seien gemäß der Bedingung

$$\int_{\Sigma} f \psi u_j^2 d\sigma = -1 \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

normiert. Indem wir die E. Schmidtsche Methode der Kernzerspaltung benutzen, setzen wir

$$\frac{1}{\varrho} = \mathfrak{N}(\sigma, \sigma') + \sum_{l=1}^{m} \psi \psi' u_l u_l' \qquad (\psi' = \psi(\sigma'),\ u_l' = u_l(\sigma')). \tag{4}$$

Dann hat die Integralgleichung

$$\psi \xi + \int_{\Sigma} f' \mathfrak{N}(\sigma, \sigma') \xi' d\sigma' = 0 \tag{5}$$

keine von Null verschiedene Lösung mehr.

Die Integro-Differentialgleichung (2) nimmt jetzt die Gestalt

$$\psi \xi + \int_{\Sigma} f' \mathfrak{N}(\sigma, \sigma') \xi' d\sigma' = \bar{s} - (X^2 + Y^2)\lambda + \Pi\{\lambda, \xi\} + \sum_{l=1}^{m} \psi r_l u_l \tag{6}$$

an, wobei zur Abkürzung

$$r_l = -\int_{\Sigma} f' \psi' u_l' \xi' d\sigma' \tag{7}$$

gesetzt ist. Wie sich zeigen läßt[7]), kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $r_1 = r_2 = 0$ gesetzt werden, da dies lediglich einer kleinen Schraubung von T_1 um die z-Achse entspricht. Sind keine weiteren Lösungen von (3) vorhanden ($m = 2$), so existiert zu jedem dem Betrage nach hinreichend kleinen Werte von $\bar{s}$ und λ

7) Vgl. E. Hölder, Math. Z. 31 (1929), S. 198 ff., insbes. S. 206—209.

Digitized by Google

eine und nur eine, in $\bar{s}$ und λ analytische Lösung $\xi = \xi(\xi, \eta; \bar{s}, \lambda)$ der Gleichung (6), wie sich durch sukzessive Approximationen ergibt. Für jeden $\bar{s}$-Wert ist daher in diesem „regulären" Falle T in eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren eingebettet. — Sind weitere Nullösungen von (3) vorhanden, so liefert (6), wenn neben $|\bar{s}|$ und $|\lambda|$ noch $|r_3|, |r_4|, \ldots, |r_m|$ hinreichend klein sind, entsprechend die in sämtlichen Parametern analytische Lösung

$$\xi = \xi(\xi, \eta; \bar{s}, \lambda, r_3, r_4, \ldots, r_m). \tag{8}$$

Für die $m-2$ Parameter $r_3, \ldots, r_m$ ergeben sich $m-2$ Bestimmungsgleichungen („Verzweigungsgleichungen"), wenn (8) in (7) eingesetzt wird. Diese sind von mindestens zweitem Grade in den Unbekannten. Um festzustellen, wieviel lineare Reihen von der betrachteten Figur abzweigen bzw. ob überhaupt eine Verzweigung vorkommt, ist eine genaue Diskussion der Verzweigungsgleichungen unerläßlich.

Wegen der Kompliziertheit der in $\Pi\{\lambda, \xi\}$ enthaltenen Integralausdrücke bietet die Diskussion im Allgemeinen große rechnerische Schwierigkeiten, die schon im Falle der Verzweigungsellipsoide nicht geringer sein würden als die in den Liapounoffschen Arbeiten. Nur ein Beispiel[8]) ließ sich bis jetzt ohne allzu große Mühe nach dem oben geschilderten Verfahren behandeln, nämlich die Verzweigungsfiguren der unendlich langen Kreiszylinder. Diese bilden bekanntlich ohne Gestaltsänderung für $0 \leqq \omega^2 \leqq 2\pi\varkappa f$ eine lineare Reihe; von dieser zweigt, wie schon länger bekannt ist, für $\omega^2 = \pi\varkappa f$ die Schar der Zylinder elliptischen Querschnittes ab. Wir fragen nach weiteren Verzweigungsfiguren.

Die Integro-Differentialgleichung (2) modifiziert sich wegen des Überganges zum ebenen Problem ein wenig. Σ wird durch die Kreisperipherie S (Radius R, Bogenlänge s, Bogenelement ds), $\frac{1}{\varrho}$ durch $2 \log \frac{R}{\varrho}$ ersetzt, ferner ist $\psi = -2\pi f R + \frac{\omega^2 R}{\varkappa}$. Die homogene Integralgleichung

$$\left(-2\pi f R + \frac{\omega^2 R}{\varkappa}\right)\xi + 2\int_S f'\xi' \log \frac{R}{\varrho}\, ds' = 0 \tag{9}$$

besitzt keine trivialen Lösungen; weitere Lösungen sind nur für

$$\frac{\omega^2}{\varkappa} = 2\pi f \frac{n-1}{n}, \text{ d. h. } \psi = -\frac{2\pi f R}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

möglich. Diese lauten dann mit $\varphi = \frac{s}{R}$

8) Vgl. K. Maruhn, Math. Z. 40 (1935), S. 56 ff. und S. 312 ff.

Digitized by Google

$$(11)\qquad u_3 = \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}},\quad u_4 = \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi R}}\ ^{9}).$$

Legen wir noch den Parameter $\bar{s}$ derart fest, daß für alle λ die Nachbarfiguren den gleichen Inhalt wie der Kreis haben, so lautet die zu (6) analoge Integro-Differentialgleichung

$$(12)\quad \zeta - \int_S \overline{\mathfrak{N}}(s,s')\,\zeta'\,ds' = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}(r_3\cos n\varphi + r_4\sin n\varphi) + \Pi\{\lambda,\zeta\},$$

$$\overline{\mathfrak{N}}(s,s') = \frac{n}{\pi R}\log\frac{R}{\varrho} + \frac{\cos n\varphi'}{\sqrt{\pi R}}\frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}} + \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi R}}\frac{\sin n\varphi'}{\sqrt{\pi R}},$$

$$r_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_S \zeta'\cos n\varphi'\,ds',\quad r_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_S \zeta'\sin n\varphi'\,ds'.$$

Da man noch die gesuchte Figur ohne Einschränkung der Allgemeinheit so orientieren kann, daß $r_4 = 0$ wird, so ist nur

$$r_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_S \zeta'\cos n\varphi'\,ds'$$

zu diskutieren. Diese Gleichung nimmt, wie sich zeigt, die Gestalt

$$(13)\qquad r_3\left(\frac{n}{f\pi}\lambda + \frac{n^2-n}{2\pi R^3}r_3^2 + \mathfrak{P}_1(\lambda, r_3)\right) = 0$$

an, unter $\mathfrak{P}_1(\lambda, r_3)$ eine Potenzreihe verstanden, die keine Glieder mit r_3, r_3^2, und λ, ferner keine von r_3 und λ freien Glieder enthält. Aus (13) ergeben sich folgende drei Lösungen für r_3:

$$(14)\quad r_3^{(1)} = 0,\quad r_3^{(2)} = \left(-\frac{2R^3}{f(n-1)}\lambda\right)^{1/2} + \mathfrak{P}_2\left\{\left(-\frac{2R^3}{f(n-1)}\lambda\right)^{1/2}\right\},$$

$$r_3^{(3)} = -\left(-\frac{2R^3}{f(n-1)}\lambda\right)^{1/2} + \mathfrak{P}_3\left\{\left(-\frac{2R^3}{f(n-1)}\lambda\right)^{1/2}\right\},$$

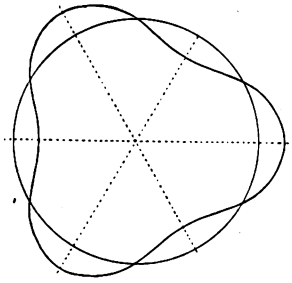


Abb. 2.

unter $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ gewisse mit der zweiten Potenz ihrer Veränderlichen beginnende Potenzreihen verstanden. Die erste Lösung liefert $\zeta = 0$, d. h. die Ausgangsreihe der Kreiszylinder. Die beiden anderen ergeben für alle ganzen $n > 1$ und für $\lambda < 0$ Zylinder, deren Normalschnitte n Symmetriegerade besitzen (vgl. Abb. 2 mit drei Symmetriegeraden). Die erste Näherung ζ_1 der Lösung ζ lautet

9) Hier wurde einfacher gemäß $\int_S u_l^2\,ds' = 1$ $(l = 3, 4)$ normiert, da ja φ auf S konstant ist.

Digitized by Google

$$\zeta_1 = \frac{r_s \cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}}.$$

Für $n = 1$ ($\omega = 0$) zweigen keine neue Figuren ab, die Nullösung $\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\pi R}}$ entspricht einer Verschiebung längs der x-Achse. —

Der Beweis für die Existenz linearer Reihen in der Nachbarschaft einer gegebenen, mit Flüssigkeit nichtkonstanter Dichte erfüllten Gleichgewichtsfigur gelingt im Wesentlichen entsprechend[10]). Auch können neben s und λ noch weitere kleine Störungen eingeführt werden, z. B. eine Änderung der Dichte, ein Außenfeld usw. Hierauf beruhen Untersuchungen über die Gestalt des Erdmondes, über Doppelsterne und über ringförmige Figuren[11]).

3. *Gleichgewichtsfiguren mit singulären Punkten auf der Oberfläche.* Von welchem Nutzen die Verwendung einer kleinen Dichteänderung bei der Konstruktion ganz neuartiger Gleichgewichtsfiguren sein kann, mag an einem Beispiel[12]) kurz erläutert werden.

Es sei die Aufgabe gestellt, die Existenz einer Gleichgewichtsfigur von der Gestalt eines linsenförmigen rotationssymmetrischen „Urnebels“ (s. Abb. 3) zu beweisen, auf dessen Äquator die Gesamtschwerkraft gleich Null ist. Eine solche Figur ist astronomisch von besonderem Interesse, da sie ein Modell für den Zustand beginnender Masseloslösung darstellt.

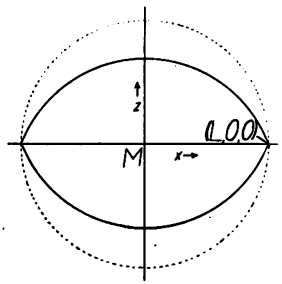


Abb. 3.

Wir gehen so vor: Im Ursprung eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierenden Achsenkreuzes x-y-z befinde sich ein punktförmiges Attraktionszentrum der Masse M. Das Gesamtpotential V der rotationssymmetrischen Konfiguration im Punkte $(x, 0, z)$ hat den Wert

$$V(x, 0, z) \equiv \frac{\varkappa M}{r} + \frac{\omega^2 x^2}{2}, \qquad (r^2 = x^2 + z^2). \tag{15}$$

Die Gesamtschwerkraft verschwindet in den Punkten $(-L, 0, 0)$ und $(L, 0, 0)$ mit $L = \left(\frac{\varkappa M}{\omega^2}\right)^{1/3}$ und sonst nirgends in der Ebene

10) Vgl. L. Lichtenstein, Math. Z. 36 (1933), S. 481 ff. — Das Gesamtpotential ist jetzt auf allen Flächen gleicher Dichte konstant.

11) Vgl. Lichtenstein, Math. Z. 10 (1921), S. 130 ff.; 12 (1922), S. 201 ff.; 13 (1922), S. 82 ff.; V. Garten und K. Maruhn, Math. Z. 35 (1932), S. 154 ff.; V. Garten, Math. Z. 35 (1932), S. 684 ff.; K. Maruhn, Math. Z. 39 (1934), S. 244 ff.

12) Vgl. K. Maruhn, Math. Z. 37 (1933), S. 463 ff.

Digitized by Google

$y = 0$. In dieser Ebene verläuft weiter die Kurve

$$V(x, 0, z) = V(L, 0, 0) \tag{16}$$

sonst ganz im Innern des Kreises $x^2 + y^2 = L^2$ und besitzt in $(L, 0, 0)$ eine Doppeltangente mit der Gleichung $3(L - x)^2 - z^2 = 0$. Entsprechendes gilt vom Punkte $(-L, 0, 0)$.

Die Rotationsfläche, deren Meridianschnitt durch die Kurve (16) dargestellt wird, ist also im Wesentlichen so beschaffen wie die Gleichgewichtsfigur, deren Existenz wir nachweisen wollen. Wir fassen daher die betrachtete singuläre Niveaufläche als die Begrenzung einer mit Flüssigkeit der Dichte Null erfüllten Gleichgewichtskonfiguration auf und fragen nach der Existenz einer Gleichgewichtsfigur mit nichtverschwindender Dichte in der Nachbarschaft, die insbesondere gleichartige Singularitäten aufweist.

Es zeigt sich, daß eine solche Figur tatsächlich existiert, wenn ihre Dichte hinreichend klein ist und auf der Berandung verschwindet. Die Dichte ist also notwendig inkonstant [13]). Um den Existenzbeweis möglichst übersichtlich zu gestalten, empfiehlt es sich, den singulären Kreis der gesuchten Figur mit dem der Ausgangskonfiguration zusammenfallen zu lassen, was sich etwa durch eine kleine Änderung der Winkelgeschwindigkeit erreichen läßt. — Die Integro-Differentialgleichung dieses Problems ist hier insofern einfacher als die Gleichung (2), als die linke Seite lediglich den Ausdruck $\psi\zeta$ enthält (ψ und ζ sind jetzt natürlich nicht nur auf der Oberfläche, sondern auch im Innern der Ausgangskonfiguration erklärt). Damit erübrigen sich die Verzweigungsbetrachtungen; die Existenz der Lösung wird wieder mittels sukzessiver Näherungen gezeigt. — Es sei noch bemerkt, daß sich auch die Existenz einer stetigen Schar von Gleichgewichtsfiguren erweisen läßt, die von Figuren mit überall nach innen gerichteter Schwerkraft zu unserer singulären Figur führt.

Durch geeignete Wahl der Ausgangsverteilung kann man so noch Urnebel mit ein oder zwei kegelförmigen Spitzen, Doppelsterne im Moment der Trennung und Ringkörper im Moment der Loslösung vom Zentralkörper konstruieren [14]).

Auf dem zuletzt beschrittenen Wege dürften sich weitere schöne Aufschlüsse über die Gestalt der Himmelskörper erhalten lassen.

13) Figuren konstanter Dichte mit singulären Stellen auf der Oberfläche sind nicht bekannt.

14) Vgl. K. Maruhn, Math. Z. 33 (1931), S. 300ff.; 36 (1932), S. 122ff.; 38 1934), S. 747ff.

Digitized by Google

Ein einfaches Gerät zur Transformation ebener Kurven und seine Anwendung auf die Ermittlung von Momenten[1]).

Von Helmut Gröttrup in Berlin.

1. In verschiedenen technischen Fachzeitschriften sind in der letzten Zeit Veröffentlichungen über die graphische Bestimmung von Momenten erschienen. Diese Arbeiten — auf die nachher noch im einzelnen eingegangen werden soll — schreiben sämtlich eine Transformation der gegebenen Fläche in eine andere vor, deren Inhalt — der mit dem Planimeter ausgemessen werden kann — zahlenmäßig gleich der Größe des gesuchten Momentes ist. Die Transformation wird meist so durchgeführt, daß die Koordinaten einzelner Punkte der gegebenen Umrandungskurve nach den Transformationsgleichungen umgerechnet werden und die sich als Verbindung der neugefundenen Punkte ergebende Linie als Grundlage der weiteren Berechnung benutzt wird. Die rechnerische Transformation, die meist etwas umständlich ist, läßt sich mit dem in Folgendem beschriebenen Gerät leicht durch eine rein mechanisch auszuführende Transformation bei gleichen Genauigkeitsansprüchen ersetzen.

2. Die Transformationsgleichung für die Ordinaten sei:

$$u = f(x, y),$$

wo x und y die ursprünglichen Koordinaten bedeuten, und u die transformierte Ordinate ist. Dann besteht das Hilfsgerät aus einem durchsichtigem Blatt, dem sogenannten „Schiebeblatt", das eine zur x-Achse parallele lineare Teilung trägt, die es gestattet, am rechten Rande die Ordinaten abzumessen und ferner die Kurvenschar

$$u = f(x, y)$$

in einem Koordinatensystem dessen u-Achse nach oben, dessen x-Achse aber nach links gerichtet ist (Abb. 1), enthält. Die in die einzelnen Kurvengleichungen eingesetzten Werte für den Parameter y entsprechen den Längen, der mit der Teilung der u-Achse abzumessenden Ordinaten. Legt man dieses Schiebeblatt so auf die gegebene Kurve, daß sich die x-Achsen decken, so kann man

1) Vorgetragen in der 330. Sitzung am 16. Juni 1937.

Digitized by Google

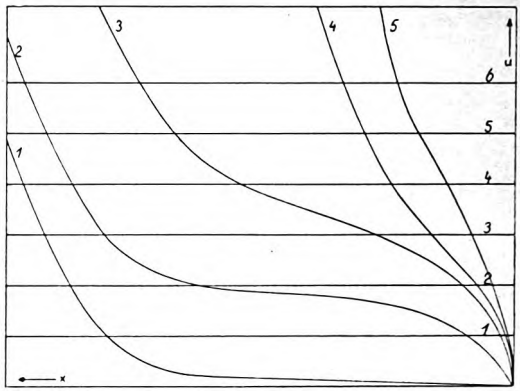


Abb. 1. Prinzip des Schiebeblattes.

an der rechten Kante, die gleichzeitig u-Achse des Schiebeblattes ist, die Länge der Ordinate (y_1) der ursprünglichen Kurve abmessen. Geht man auf der dieser Länge zugeordneten Kurve des Schiebeblattes

$$u = f(x, y_1)$$

bis zum Schnittpunkt mit der y-Achse der ursprünglichen Kurve, so erhält man dort den Wert

$$u = f(x_1, y_1).$$

Das Auffinden der Kurve, die zu einer bestimmten Ordinate gehört, wird wesentlich erleichtert durch das Eintragen der Hilfslinie:

$$y = f(x, y)$$

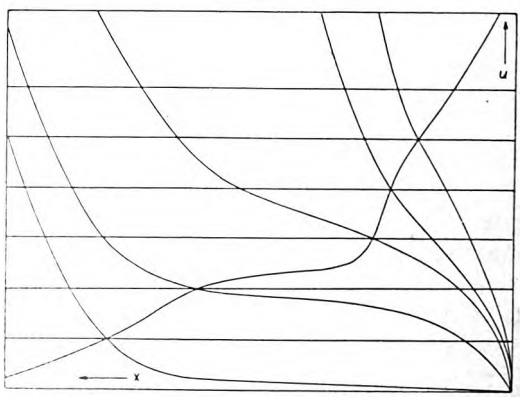


Abb. 2. Prinzip des Schiebeblattes mit Hilfskurve.

Digitized by Google

also derjenigen Linie, die die Kurven der Schar gerade in den Punkten

$$u = f(x, y_1) = y_1$$

schneidet, in das Schiebeblatt (Abb. 2).

Der Gebrauch des Schiebeblattes ist dann folgender (Abb. 3): man legt das Schiebeblatt so auf die gegebene Kurve, daß sich die x-Achsen decken, und die gegebene Kurve den Rand des Schiebeblattes gerade im Endpunkt einer der Parallelen zur x-Achse trifft (A). Dann geht man auf dieser Parallelen bis zum Schnitt-

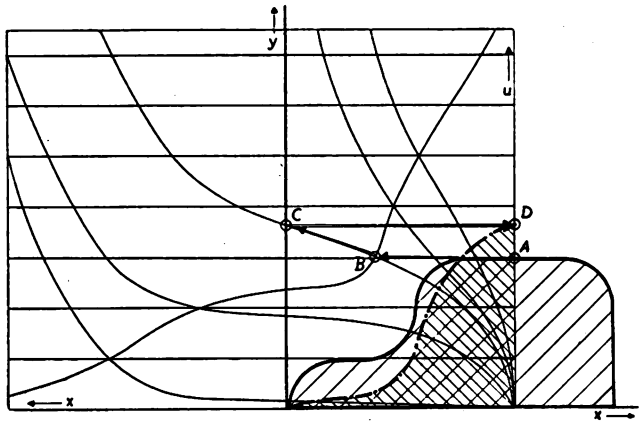


Abb. 3. Gebrauch des Schiebeblattes.

punkt mit der Hilfslinie (B) und von dort auf der durch diesen Punkt gehenden Kurve der Schar bis zum Schnittpunkt mit der y-Achse der gegebenen Kurve (C). Von hier geht man wieder parallel zur x-Achse zur rechten Kante des Schiebeblattes zurück und trägt den so gefundenen Punkt (D) der transformierten Kurve in die ursprüngliche Zeichnung ein.

Das Schiebeblatt eignet sich nun nicht nur für die graphische Bestimmung von Momenten, sondern läßt sich stets anwenden, wenn es sich um eine Transformation von Ordinaten einer gegebenen Kurve handelt. Die Herstellung des Schiebeblattes erhält — wie es bei allen mathematischen Geräten der Fall ist — natürlich erst dann einen Sinn, wenn die Transformation nach ein und derselben Gleichung häufiger durchzuführen ist — bei einer einmaligen Transformation wird man stets auf die rechnerische Durchführung zurückgreifen. Der Anwendungsbereich des Schiebeblattes läßt sich noch erweitern, wenn man das gleiche Gerät mehrmals für die Transformation in der gleichen oder auch in verschiedenen Richtungen verwendet.

Digitized by Google

3. Bevor die Anwendung des Schiebeblattes auf die Berechnung von Momenten gezeigt wird, sollen noch einige Arbeiten besprochen werden, in denen Methoden zur graphischen Bestimmung von Momenten angegeben worden sind.

O. Martin beschreibt die Bestimmung des äquatorialen Trägheitsmomentes von Drehkörpern um eine zur Drehachse senkrecht stehende Achse. Zu diesem Zweck zerlegt er das Trägheitsmoment in drei Integralausdrücke. Diese Integralausdrücke ermittelt er durch eine Transformation der gegebenen Erzeugenden des Rotationskörpers und durch Planimetrieren der gefundenen Hilfsflächen. Die Transformation führt er mit einer monogramm-ähnlichen Hilfskurve durch.

F. Röttcher beschreibt einige Verfahren zur Ermittlung statischer Momente und damit von Schwerpunkten, von Momenten höherer Ordnung und zur Rauminhaltsbestimmungen von Körpern. Alle diese Methoden beruhen darauf, daß man die Ordinaten der gegebenen Fläche nach bestimmten Gleichungen transformiert und den Inhalt der unter den gefundenen Hilfskurven liegenden Hilfsflächen durch Planimetrieren ermittelt.

M. Baumann beschreibt ein anderes Verfahren zur graphischen Bestimmung beliebiger Momente. Nach ihm werden beide Koordinaten der Umrandungslinie der gegebenen Fläche transformiert und wie bei den bisher beschriebenen Verfahren dient der Inhalt der von der gefundenen Hilfskurve eingeschlossenen Fläche als Grundlage der weiteren Berechnung.

Gerade die angeführten Arbeiten, die in *technischen* Zeitschriften erschienen sind, geben die Gewißheit, daß auf dem Gebiete der Bestimmung von Momenten tatsächlich ein Bedürfnis nach graphischen Methoden besteht.

3. Um nun das beschriebene Schiebeblatt bequem für die Bestimmung von Momenten verwenden zu können, müssen die Transformationsgleichungen für die Umrandungslinie so gewählt werden, daß nur eine Koordinate transformiert zu werden braucht.

Die allgemeine Form eines Momentes einer Fläche ist:

$$M = \iint k x^n y^m \, dx \, dy.$$

Führt man (unter der Voraussetzung, daß die Fläche nur eine obere und eine untere Begrenzung hat) die Integration über eine Veränderliche — z. B. y — durch, so ergibt sich:

$$M = \int \frac{k}{m+1} x^n y_o^{m+1} \, dx - \int \frac{k}{m+1} x^n y_u^{m+1} \, dx = \oint \frac{k}{m+1} x^n y^{m+1} x^n,$$

Digitized by Google

wenn y_o die obere und y_u die untere Randordinate der Fläche ist. Transformiert man die gegebene Fläche nach den Gleichungen:

$$\xi = x \text{ und } \eta = \frac{k}{m+1} y^{m+1} x^n,$$

so erhält man eine Fläche, deren Inhalt:

$$\underline{M} = \int \eta \, dx$$

dem Zahlenwert nach gleich der Größe des gesuchten Momentes ist.

Auf Grund dieser Transformationsgleichungen sind nun die Schiebeblätter für einige wichtige Momente entwickelt worden. Der Einfachheit halber wurde angenommen, daß die gegebene Fläche ganz im ersten Quadranten des Achsensystems liegt. Sollten die Achsen die gegebene Fläche schneiden, so ändert dies an der Transformation selbst nichts. Nur bei der Auswertung der Hilfsflächen mit dem Planimeter müssen die Flächen teils positiv, teils negativ gewertet werden, wie es die ursprüngliche Gleichung des Momentes verlangt, — was in bekannter Weise durch rechts- oder linkssinniges Umfahren mit dem Fahrstift des Planimeters erfolgt.

Das Volumen eines Drehkörpers, der die x-Achse zur Drehachse hat, ist gegeben durch:

$$V = \iint 2\pi y \, dx \, dy.$$

Nach der Transformation erhält man:

$$V = \oint \pi y^2 \, dx.$$

In diesen Gleichungen sind x und y die Ordinaten des Achsenquerschnittes. Das zugehörige Schiebeblatt würde die Geradenschar

$$u = \pi y^2 \qquad (y\text{: Parameter})$$

enthalten, man vereinfacht es zweckmäßig zu einem Schiebelineal (Abb. 4). Den Gebrauch eines solchen Schiebelineals zeigen die Abbildungen 5 und 6.

Das statische Moment einer Fläche in Bezug auf die y-Achse ist gegeben durch:

$$S_y = \iint x \, dx \, dy.$$

Nach der Transformation erhält man:

$$S_y = \oint x y \, dx.$$

Digitized by Google

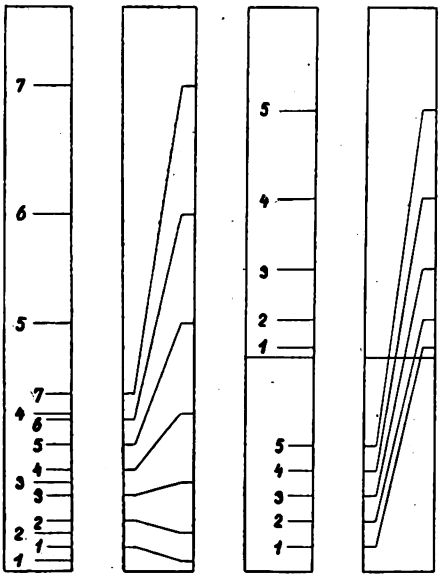


Abb. 4. Verschiedene Ausführungsarten des Schiebelineals.

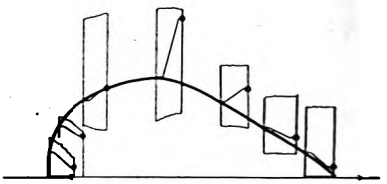


Abb. 5. Gebrauch des Schiebelineals

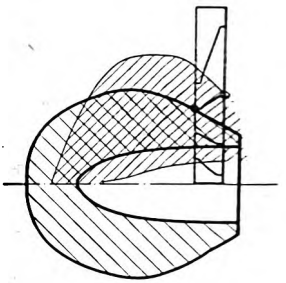


Abb. 6.
Bestimmung des Rauminhaltes von Drehkörpern.

Das Schiebeblatt trägt die Geradenschar:

$$u = xy \qquad (y: \text{Parameter})$$

(Abb. 7). Der Zahlenwert des statischen Momentes findet sich als Maßzahl des Inhaltes der von der Hilfskurve eingeschlossenen Fläche (Abb. 8).

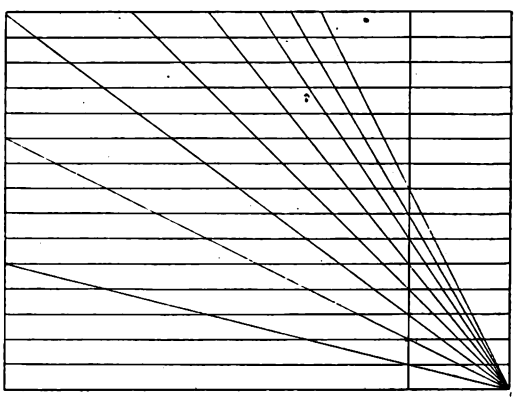


Abb. 7. Schiebeblatt für statische Momente.

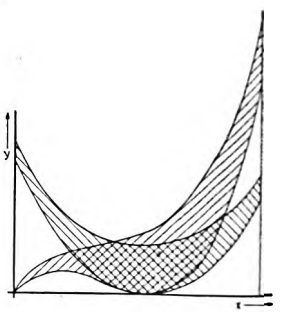


Abb. 8. Statisches Moment einer Dampfturbinenschaufel.

Digitized by Google

Das äquatoriale Trägheitsmoment einer Fläche ist gegeben durch:

$$I_y = \iint x^2\,dx\,dy.$$

Nach der Transformation erhält man:

$$I_y = \oint x^3 y\,dx.$$

Das Schiebeblatt (Abb. 9) enthält die Parabelschar:

$$u = y x^2 \qquad (y\text{: Parameter}).$$

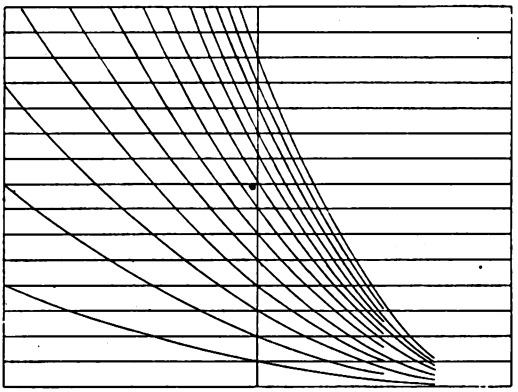


Abb. 9. Schiebeblatt für Flächenträgheitsmomente.

Das Raumträgheitsmoment eines Drehkörpers in Bezug auf seine Achse (y-Achse) ist gegeben durch:

$$I_y = \iint 2\pi x^3\,dx\,dy.$$

Nach der Transformation erhält man:

$$I_y = \oint 2\pi x^3 y\,dx.$$

Das Schiebeblatt trägt die Parabeln 3. Grades:

$$u = y x^3 \qquad (y\text{: Parameter})$$

(Abb. 10).

Das Zentrifugalmoment einer Fläche ist gegeben durch:

$$I_{xy} = \iint x y\,dx\,dy.$$

Nach der Transformation erhält man:

$$I_{xy} = \int \frac{x y^2}{2}\,dx.$$

Digitized by Google

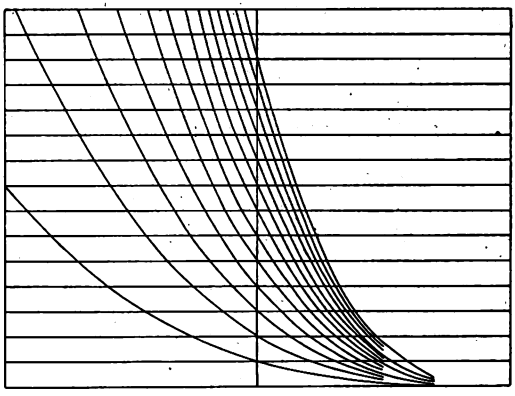


Abb. 10. Schiebeblatt für Raumträgheitsmomente.

Das zugehörige Schiebeblatt (Abb. 11) trägt die Geradenschar:

$$u = 0{,}5\, y^2 x \qquad (y\text{: Parameter}).$$

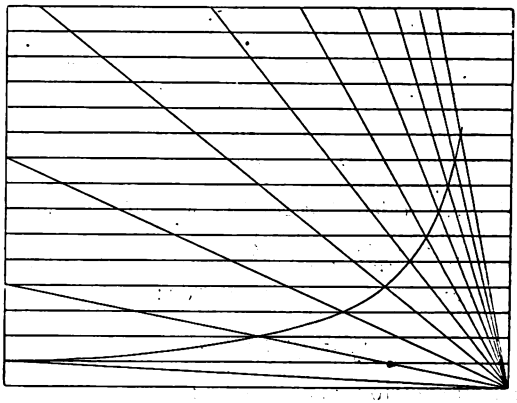


Abb. 11. Schiebeblatt für Zentrifugalmomente.

5. In der gleichen Weise lassen sich Schiebeblätter für alle Arten von Momenten und ähnlich aufgebauten Funktionen konstruieren. Von großem Einfluß auf die Handhabung ist das Maßstabsverhältnis der beiden Achsen. Man wählt es zweckmäßig so, daß die vorkommenden u-Werte etwa in die Größenordnung der y-Werte fallen. Der Abstand der die lineare Teilung bildenden, zur x-Achse parallelen Geraden braucht nicht besonders klein zu sein, da es immer möglich ist, das Schiebeblatt so an die gegebene Kurve zu legen, daß diese den Rand des Blattes gerade im Endpunkt einer der Parallelen trifft. Die praktische Ausführung erfolgt zweckmäßig so, daß man die Kurven auf ein starkes Trans-

Digitized by Google

parentpapier zeichnet (transparentes Millimeterpapier ist für manche Anwendungen besonders geeignet). An der unteren und linken Kante des Schiebeblattes bringt man eine Verstärkung aus Pappe an, damit man das Schiebeblatt in Verbindung mit der Reißschiene oder Zeichenmaschiene benutzen kann. Besonders vorteilhaft ist für den, der das Schiebeblatt dauernd benutzt, eine Ausführung in starkem Zellglas, die auch gewerbsmäßig hergestellt werden könnte.

Schrifttum.

Slaby, R. Ein praktisches Verfahren zur Lösung von Integralen und seine Anwendung auf die Ermittlung von statischen Momenten und Trägheitsmomenten. Z. VDI **58** (1914), S. 1348.

Martin, O. Graphische Bestimmung der Trägheitsmomente von Drehkörpern. Mitt. Forsch. Anst. GHH-Konzern **4** (1936), S. 128.

Röttcher, F. Einfache Verfahren zur Ermittlung des Schwerpunktes, des Rauminhaltes und der Momente höherer Ordnung. Z. VDI **80** (1936), S. 1351.

Baumann, M. Praktische Anwendungen einer allgemeinen Integrationsmethode zur Bestimmung von Momenten. Stahlbau **10** (1937), S. 22.

Digitized by Google

Moderne Methoden der Algebra[1]).

Von Fr. Neiß in Berlin.

Die Ausführungen wandten sich in der Hauptsache an solche Hörer, denen die Methoden und Ziele der modernen Algebra fremd sind. (Vergl. auch H. Hasse. Jahresber. d. Dt. Math. Ver. 1930. 39. Bd. 1.—4. Heft, die moderne algebraische Methode.)

An der Hand der geschichtlichen Entwicklung wird gezeigt, daß die Entdeckung der Algebra längere Zeit in Anspruch nahm und offenbar weit mehr Schwierigkeiten machte, als die Geometrie. Man beachte, wie weit diese bei den Griechen entwickelt war, während Anfänge der Algebra erst bei Diophant ca. 300 n. Chr. zu finden sind.

Die Schwierigkeit lag in der Einführung allgemeiner Größen und in der Schaffung einer geeigneten Symbolik, was eigentlich erst bei Vieta (1540—1603) in der Hauptsache durchgeführt wurde und durch Leibniz und Euler abgeschlossen wurde.

Die moderne Algebra geht insofern weiter, als den Symbolen eine wesentlich allgemeinere Bedeutung zukommt. Waren vorher die Buchstaben $a, b, \ldots$ nur Zahlen, so sind jetzt darunter Elemente einer Menge zu verstehen (z. B. Matrizen, Elemente einer Gruppe und anderes). Wesentlich ist nur, daß die Operationen $a \pm b$, $a\,b$ und unter Umständen auch $a : b$ erklärt sind und dadurch wieder Elemente derselben Menge erhalten werden, und daß gewisse Rechenregeln gelten.

An Beispielen werden Vorzug und Bedeutung dieser modernen algebraischen Methoden gezeigt. So ist die Menge aller komplexen Zahlen nicht wesentlich verschieden von der Menge der Matrizen:

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a und b reelle Zahlen), weil die Beziehungen zwischen den Einheiten 1 und i denen zwischen den beiden obigen Matrizen ganz analog sind.

Die Lösung der Gleichung $x^n = 1$ führt in der Algebra zu den Einheitswurzeln, und in der Zahlentheorie führt die Diskussion

1) Vorgetragen in der 322. Sitzung am 28. Oktober 1936.

Digitized by Google

der Kongruenz: $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ (p eine Primzahl) zu Ergebnissen, die den vorigen ganz entsprechen. Die abstrakte Algebra macht keinen Unterschied, um in dem einen oder anderen Fall etwa die Existenz einer Primitivwurzel nachzuweisen.

So ist für die neue Methode charakteristisch, wie Herr Hasse in dem genannten Vortrag sagt, das Bestreben, „ein vorgelegtes mathematisches Gebiet auf seine allgemeinsten und daher einfachsten begrifflichen Grundlagen zurückzuführen und dann eben mit deren alleiniger Hilfe auf- und auszubauen".

Digitized by Google

Beiträge zur Theorie der Strahlenkomplexe, der dreifach-orthogonalen Systeme und der Verbiegung der Flächen zweiten Grades [1].

Von H. Jonas.

1. Ein *3 W-Komplex* werde durch die Eigenschaft definiert, daß, wenn ein beliebiger der drei Parameter α, β, γ konstant gehalten wird, der Strahl eine W-Kongruenz durchläuft, in der die Asymptotenlinien der Brennmäntel den beiden anderen Parametern entsprechen. Ein Beispiel liefern die von Bianchi entdeckten schiefen Weingartenschen Systeme pseudosphärischer Flächen [2]. Allgemein gelingt die Darstellung mittels dreier Lösungspaare der aus der Moutardschen Transformation gewonnenen Differentialgleichungen:

$$(A)\quad \xi'_\alpha - \xi_\alpha = -\frac{\psi_\alpha}{\psi}(\xi' + \xi),\quad \xi'_\beta + \xi_\beta = -\frac{\psi_\beta}{\psi}(\xi' - \xi),\quad \xi'_\gamma = \frac{1}{\psi^2}\xi_\gamma.$$

Das System (A) tritt bereits bei Darboux auf, der, an Bonnet anknüpfend, für die *dreifach-orthogonalen Flächenscharen* eine Methode entwickelt, bei der die Bildkugel auf die imaginären Erzeugenden bezogen wird [3]. Zwischen den beiden Problemen vermittelt Lies imaginäre Geraden-Kugel-Transformation, die Asymptotenlinien in Krümmungslinien verwandelt. Liesches Äquivalent des 3 W-Komplexes (Übergang von den Linienkoordinaten zu den hexasphärischen Kugelkoordinaten) ist nun nicht unmittelbar ein dreifach-orthogonales System, sondern ein durch gewisse Eigenschaften der Enveloppenscharen ausgezeichnetes System von ∞^1 Kugeln. Der Umstand, das nach Darboux *zwei* Lösungspaare von (A) zur Konstruktion eines dreifach-orthogonalen Systems ausreichen, läßt darauf schließen, daß dieses erst durch eine Transformation allgemeineren Charakters in das gedachte Kugelsystem übergeht. Eine solche kann in der Tat aus dem Combescure-Ribaucourschen Prozeß hergeleitet werden.

1) Kurze Inhaltsgabe des in der 323. Sitzung am 25. November 1936 gehaltenen Vortrags. Die beiden Abhandlungen, über die berichtet wurde, sollen später an anderer Stelle erscheinen.

2) Jonas, Ein allgemeiner Satz über W-Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme. Math. Annalen **114** (1937). Seite 237.

3) Darboux, Systèmes orthogonaux. 2. Aufl., Paris 1910; daselbst S. 415.

Digitized by Google

2. In einer größeren Abhandlung hat Bianchi, von den dreifach-orthogonalen Systemen mit einer Schar Flächen von konstanter Krümmung ausgehend, das Problem in Angriff genommen, Scharen von Biegungsflächen einer Fläche zweiten Grades darzustellen, die durch ihre Trajektorien mit Korrespondenz der Asymptotenlinien und der permanenten konjugierten Netze aufeinander abgebildet werden, und für Rotationsflächen, Paraboloide und Darbouxsche F^2 erledigt[4]). Seine ursprüngliche Absicht, auch den Fall der allgemeinen Mittelpunkts-F^2 von den dreifach-konjugierten Systemen aus zu behandeln, scheint nicht durchführbar. Ein gangbarer Weg ergibt sich aus einer Behandlung des Biegungsproblems, deren ich mich beim einschaligen Hyperboloid in mehreren Arbeiten bedient habe[5]). Sie gründet sich auf das bewegte Hauptachsendreikant des auf der Biegungsfläche rollenden Hyperboloids und auf die beiden, den asymptotischen Parametern α, β der Biegungsfläche entsprechenden Tripel der *Rotationen* p, q, r und p', q', r'. Man kann nun ein drittes Tripel $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{r}$ bezüglich des Parameters γ der Trajektorien hinzunehmen, das gleichfalls eine quadratische Relation, und zwar von der Form:

$$\frac{\tilde{p}^2}{a^2+\varkappa}+\frac{\tilde{q}^2}{b^2+\varkappa}-\frac{\tilde{r}^2}{c^2+\varkappa}=C \qquad (\varkappa = \text{const}, \quad C = \text{const})$$

erfüllt. Für $C=0$ ergeben sich in Analogie zu den schiefen Weingartenschen Systemen bemerkenswerte geometrische Beziehungen zu einem zweiten, durch eine spezielle Transformation B_k ohne Integration zugänglichen System von Biegungsflächen; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bilden einen $3W$-Komplex. Für $C \neq 0$ fehlen derartige Eigenschaften; dafür bietet dann aber der Fall des *orthogonalen* Hyperboloids $\left(\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)$ ein besonderes Interesse. Ein intrinseker Transformationsprozeß führt nämlich bei einem speziellen Wert von $\varkappa$ von dem System der Biegungsflächen zu einer Laméschen Schar von *H-Flächen* mit den Krümmungsliniennetzen (α, β). Eine H-Fläche ist dadurch ausgezeichnet, daß sie selber sowie das Paar ihrer Evolutenmäntel je einem viergliedrigen Zyklus Laplacescher Transformationen angehört[6]).

4) Bianchi, Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche. Annali di Mat. (3) 23 (1914), S. 135.

5) Jonas, Über die Verallgemeinerung des in der Biegungstheorie der Flächen zweiten Grades auftretenden intrinseken Transformationsprozesses *H*. Sächs. Ak. Ber. 87 (1935), S. 41.

6) Ebenda § 5.

Digitized by Google

Ordnung und Gestaltung im griechischen Städtebau.

Von C. A. Doxiadis in Athen.

Menschen des 20. Jahrhunderts machen sich leicht ein falsches Bild von altgriechischen Städten. Für sie bedeutet Athen, Olympia, Milet, Pergamon eine schöne griechische Landschaft unter dem blauen südlichen Himmel, mit Bäumen und Büschen bewachsen, zwischen denen goldfarbige Trümmer eines alten Tempels emporragen. Was diesen Eindruck bestimmt, ist eine völlig romantische Anschauung von griechischem Schaffen, das in Wahrheit mit Romantik gar nichts zu tun hat. Diese Anschauung ergibt sich aus der Art, wie wir diese Städte sehen, d. h. entweder an Ort und Stelle in einem Zustand, der von dem alten völlig verschieden ist, oder auf dem Plan im Grundriß, der von der ursprünglichen Gestalt keinen wirklichen Eindruck geben kann. Wenn wir aber Rekonstruktionen von altgriechischen Städten sehen, so wie der Grieche sie entworfen hat, und zwar von der Stelle aus, von der er sie entworfen hat, dann bekommen wir ein anderes Bild.

Um die wirkliche Struktur dieser Städte zu verstehen, muß man sie vom Standpunkt des schaffenden und sehenden Menschen jener Zeit aus studieren, vom Standpunkt also des Menschen, der diese Anlagen erlebt hat, und man muß sich stets gegenwärtig halten: Maßgebend und entscheidend ist allein das, was der Mensch sieht und was der Mensch fühlt.

Bei einem solchen Studium dieser Anlagen kommt man zu der Überzeugung, daß in ihrer Raumgestaltung ein bestimmtes System angewendet worden ist. Dieses System haben wir bis heute nicht verstanden, weil es mit dem heute überall herrschenden dreiachsialen Koordinatensystem gar keine Ähnlichkeit hat. Es geht im Gegenteil einzig und allein von dem sehenden und fühlenden Menschen aus, der den Raum von sich als dem Mittelpunkt aus fühlt und für den die verschiedenen Gegenstände im Raum je nach dem entsprechenden Sehwinkel und Abstand von ihm ihre Bedeutung erhalten. Der feste Punkt in diesem System, der Punkt, von dem aus die ganze Anlage gesehen und ihre Gestalt bestimmt wird, ist der Eingang.

Das kann man bei allen uns heute bekannten städtebaulichen Anlagen der Antike feststellen, besonders aber bei den besser er-

Digitized by Google

haltenen von Athen, Olympia, Kos, Magnesia, Ephesos, Milet und Pergamon.

Als einziges Beispiel will ich in diesem kurzen Bericht das Beispiel der Akropolis von Athen bringen.

Akropolis von Athen. Abb. 1 Grundriß und Abb. 2 perspektivische Ansicht.

Vom Eingangspunkt gehen verschiedene Richtungen aus, welche den Platz der einzelnen Bauwerke durch die Festlegung ihrer wichtigsten Ecken so bestimmen, daß es vermieden wird, daß ein wichtiges Gebäude nicht ganz, sondern nur teilweise zu sehen ist. Im allgemeinen kann man alle Gebäude einer Anlage ganz sehen oder, wenn das für einige Gebäude nicht möglich gemacht werden kann, dann werden zumindest alle Überschneidungen vermieden, meist dadurch, daß die zurückliegenden Gebäude durch davorstehende gänzlich verdeckt werden.

Blickrichtungen. (Für die Gebäude, die in Klammern stehen, ist die Stelle nicht genau bestimmt. R. E. = Rechte Ecke. L. E. = Linke Ecke).

a. R. E. der Burgtreppe am Nordabhang.
a'. Mittlere Ecke des nördlichen Gebäudes.
b. R. E. des nördlichen Gebäudes.
c. L. E. der Nordhalle des Erechtheion. L. E. des nicht ausgeführten aber wahrscheinlich geplanten westlichen Teiles des Erechtheion.
c. R. E. der westlichen Fassade des Erechtheion.
d. L. Seite des Sockels der Athena Promachos. R. E. der Korenhalle. R. E. der östlichen Halle des Erechtheion.
e. R. E. des Sockels der Athena Promachos- (L. E. des Athenaaltars).
f. (R. E. des Athenaaltars).
g. L. E. des Parthenon.
h. Mittlere E. des Parthenon.
k. L. E. der Chalkotheke- R. E. des Parthenon.
l. R. E. der Chalkotheke.

Sehwinkel.

Die Richtungen, welche diese verschiedenen Gebäude bestimmen, bilden gewisse Winkel, die gleich groß sind, und zwar im allgemeinen die bestimmte Größe eines Sektors haben, der durch die Teilung eines Kreises in gleiche Teile entstanden ist; so finden wir in jeder Anlage Winkel von 30°, 60°, 90°, 120°, 150° ange-

Digitized by Google

wendet, die einer Zwölfteilung des ganzen Raumes entsprechen, oder Winkel von 36°, 72°, 180°, 144°, denen eine Zehnteilung des ganzen Raumes zugrunde liegt. In der Akropolis finden wir:

$$\text{zwischen der Richtung a und c Winkel} = 30^0 = \frac{180^0}{6}$$

$$\text{„ „ „ c „ g „} = 30^0 = \frac{180^0}{6}$$

$$\text{„ „ „ g „ k „} = 30^0 = \frac{180^0}{6}$$

$$\text{„ „ „ k „ l „} = 30^0 = \frac{180^0}{6}$$

Wir haben also ein gleichseitiges Dreieck AD_1D_4 mit zwei außen symmetrischen Sektoren von 30° an seine Achse AG.

Abstände. Die verschiedenen Gebäude sind nicht nur durch die Blickrichtungen, sondern auch durch gewisse Abstände bestimmt, gemessen von demselben Ausgangspunkt, der auch für die Richtungswinkel gilt. Diese Abstände befinden sich unter einfachen geometrischen Verhältnissen, die von dem für die Teilung des Raumes benutzten Winkel abhängig sind; sie haben im allgemeinen den Fuß als Grundmaß und zwar in runden Zahlen von 100, 150, 200 Fuß.

Abstände. Vom Punkt A bis zur Achse der Athena Promachos C und bis zum Anfang der Chalkothekc C_1 gleich und zwar: $AC = AC_1 = 39{,}80$ m. Abstände vom Punkt A bis zum Ende des nördlichen Gebäudes D, bis zum Anfang des Erechtheion D, bis zum Anfang des Parthenon D_3 und bis zur L. E. der Chalkotheke D_4 sind gleich und zwar: $AD = AD_2 = AD_4 = 79{,}60$ m. Wir erhalten: $AC = \frac{1}{2}AD$. Es handelt sich also um eine Halbierung der Seite des gleichseitigen Dreiecks AD_1D_4. Eine Verdoppelung der Strecke $AC = CD$ bestimmt die Ecke des Erechtheion $DE = CD = 39{,}80$ m. Die Ecke D_3 des Parthenon ist der Schnittpunkt des Kreisbogens um A mit dem Radius AD und der durch Punkt K gezogenen Parallele zu der Richtung AD_4. Die Ecke H der Korenhalle ist als Schnittpunkt der Richtung der Parallele zu Richtung AD_1 durch Punkt K bestimmt.

Gesamtbild. Beim Gesamtüberblick der Akropolis von dem Torbau bietet sich ein einheitlich geschlossenes Bild, das nur durch ein östlich orientiertes freies Blickfeld unterbrochen ist. So entstehen zwei Gebäudegruppen. Die linke Gruppe gibt einen Ausblick in die Landschaft frei, es klafft aber keine Lücke im Bild,

Digitized by Google

weil dieser freie Sektor, durch den Hügel Lykabettos im Hintergrund genau ausgefüllt, trotzdem als geschlossen wirkt. In diesem Bild sind die verschiedenen Gebäude durch eine Sechs- oder Zwölfteilung des Raumes oder besser durch das von ihnen abgeleitete gleichseitige Dreieck bestimmt, d. h. durch dessen Winkel und Seiten.

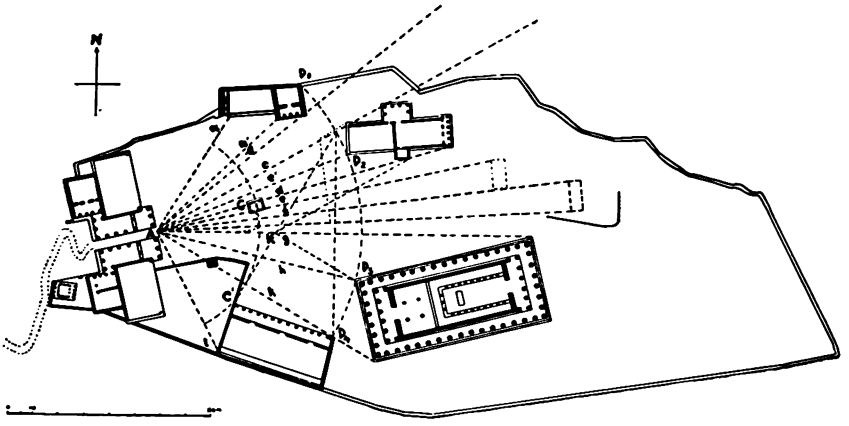
Dieses System ist überall dasselbe und seine oben angedeuteten Differenzierungen scheinen der Verschiedenheit der beiden wichtigsten griechischen Stämme und der von ihnen erfundenen Architekturstile zu entsprechen, der Verschiedenheit von Dorern und Ioniern.

Es ist kein erfundenes und von einem bestimmten Zeitpunkt ab fertig angewendetes System. Eine geschichtliche Übersicht kann uns überzeugen, daß es zusammen mit der Bildung des griechischen Menschen allmählich entstanden ist, während seiner Entwicklung sich entwickelt hat, und nach seinem Untergang verschwunden ist. Es entspricht der Struktur des Griechen überhaupt, der sich selbst als Zentrum und Maßstab aller Dinge und aller Erscheinungen fühlte, wie uns die griechische Philosophie lehrt.

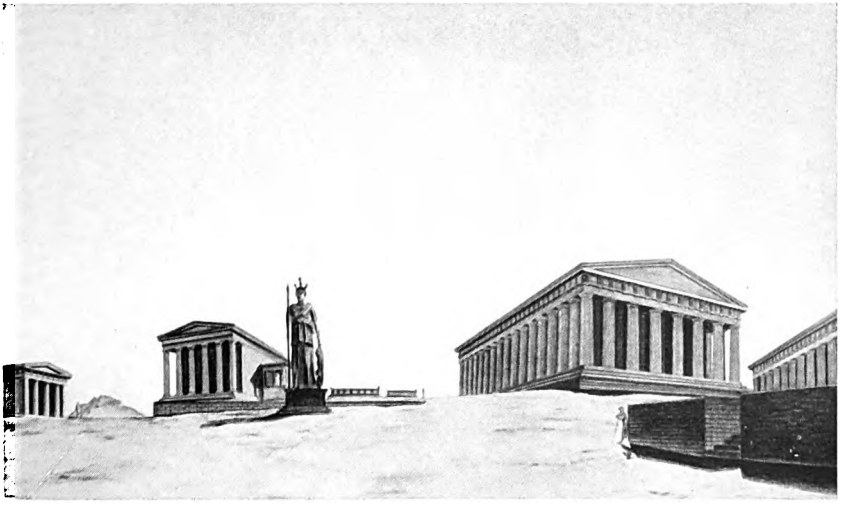
In diesem System gilt kein absolutes Gesetz; das Ganze ist entworfen und ausgestaltet nur nach dem, was der Mensch wahrnimmt. Keine absoluten Verhältnisse, nur relative, durch Sehwinkel bestimmt, keine achsialen Abstände, nur Abstände vom Menschen, keine unanschaulich abstrakte Achse, nur ein Zentrum, der Mensch, von dem aus der Raum strahlen- und kreisförmig geordnet wird.

Digitized by Google

Digitized by Google



Figur 1.



Figur 2.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

XXXVII. JAHRGANG

INHALT:

	Seite
Das elliptische Kugelbild in der Perspektive. Von **G. Scheffers**	5—8
Neuer Beitrag zur Theorie der regulären Somenkongruenzen. Von **O. Mühlendyck**	9—21
Die Durchschlagskraft eines schwach gekrümmten Balkens. Von **K. Marguerre**	22—40
Nichtholonome Systeme höherer Art. Von **G. Hamel**	41—52
Zur Theorie der diophantischen Gleichungen dritten und vierten Grades. Von **E. Haentzschel**	53—61
Berichte über die Sitzungen und Auszüge aus den Vorträgen **Keller, Mittmann** und **Kromm**	1—4

1938

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

A. Auszug aus den §§ 3 und 7 der Satzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

§ 3.

Über die Sitzungen werden Berichte herausgegeben und sogleich nach Erscheinen jedem Mitgliede kostenfrei zugesendet.

Nur solche Mitteilungen von Mitgliedern der Gesellschaft, die in einer Sitzung von diesem Mitgliede vorgetragen oder durch die Redaktionskommission vorgelegt und noch nicht anderweitig veröffentlicht worden sind, können in den Sitzungsberichten zum Abdruck gelangen. In besonderen Fällen kann die Gesellschaft auf Antrag der Redaktionskommission den Abdruck einer Mitteilung beschließen, die nicht von einem Mitgliede herrührt.

§ 7.

Mit der Redaktion der Sitzungsberichte ist eine Redaktionskommission betraut, die sich aus dem Vorstande und vier weiteren Mitgliedern zusammensetzt.

B. Bestimmungen der Redaktionskommission.

1) Der Umfang von Vorträgen soll im allgemeinen 10 Seiten, der von Mitteilungen 6 Seiten nicht überschreiten. Die Redaktionskommission hat das Recht, Kürzungen zu verlangen.

2) Mitteilungen, welche in einer Sitzung vorgelegt werden sollen, müssen mindestens eine Woche vor der Sitzung in den Händen des Schriftleiters sein.

3) Die in einer Sitzung vorgetragenen oder vorgelegten Mitteilungen werden, soweit sie von der Redaktionskommission zur Veröffentlichung angenommen sind, in dem nächsten Stück der Sitzungsberichte abgedruckt, sofern dem nicht technische Schwierigkeiten im Wege stehen. Dazu ist erforderlich, daß das Manuskript von Vorträgen spätestens in der Sitzung dem Schriftleiter übergeben wird und daß die Korrekturen rechtzeitig erledigt werden.

4) Die Redaktionskommission nimmt nur völlig druckfertige Manuskripte an. Korrekturen, welche über das Beseitigen von Druckfehlern und kleine Änderungen des Wortlautes hinausgehen, werden den Verfassern berechnet.

5) Die Redaktionskommission hat das Recht, den Abdruck von Vorträgen und von ihr vorgelegten Mitteilungen ohne Angabe von Gründen abzulehnen.

Mitteilungen.

1) Bestellungen auf die Zeitschrift sind zu richten an den Sekretär der Berliner Mathematischen Gesellschaft, dessen Anschrift lautet: **Herrn W. Braun, Berlin-Steglitz, Martinstraße 6.**

2) Die Anschrift der Berliner Mathematischen Gesellschaft lautet: **Berliner Mathematische Gesellschaft, Berlin-Charlottenburg, Berlinerstraße 171, (Math. Seminar der Techn. Hochschule, H. 155).**

Es wird darum gebeten, alle Zeitschriften, die die Gesellschaft im Austauschverkehr erhält, nur an diese Adresse zu senden.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT

SIEBENUNDDREISSIGSTER JAHRGANG

1938

GEDRUCKT VON DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
(W. FR. KAESTNER) GÖTTINGEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
5.	**Haentzschel,** Zur Theorie der diophantischen Gleichungen dritten und vierten Grades	53—61
4.	**Hamel,** Nichtholonome Systeme höherer Art	41—52
7.	**Marguerre,** Die Durchschlagskraft eines schwach gekrümmten Balkens	22—40
6.	**Mühlendyck,** Neuer Beitrag zur Theorie der regulären Somenkongruenzen	9—21
3.	**Scheffers,** Das elliptische Kugelbild in der Perspektive	5—8
31.	Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 27. Oktober 1937	1
32.	„ am 24. November 1937	1
33.	„ „ 8. Dezember 1937	1
34.	„ „ 26. Januar 1938	2
35.	„ „ 23. Februar „	2
36.	„ „ 30. März „	3
37.	„ „ 27. April „	3
38.	„ „ 22. Juni „	4

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

331. Sitzung und ordentliche Mitgliederversammlung am 27. Oktober 1937.

Vorsitzender: Herr Jonas. Anwesend: 23 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Geschäftlicher Teil:

Die Berichte des Kassenwarts und der Kassenprüfer werden entgegengenommen; dem Kassenwart wird daraufhin die Entlastung erteilt.

Zum ersten Vorsitzenden wird in geheimer Wahl mit 22 von 23 gültigen Stimmen Herr Prof. Dr. A. Timpe, Berlin-Schlachtensee, Dianastraße 21 gewählt. Die übrigen Herren des Vorstandes werden durch Zuruf wiedergewählt: zweiter Vorsitzender und Schriftführer Herr Dozent Dr.-Ing. habil U. Graf, Berlin-Steglitz, Schloßstraße 16; Kassenwart Herr Prof. P. B. Fischer, Berlin-Lichterfelde-West, Holbeinstraße 2; Kassenprüfer Herr Prof. Dr. Zacharias und Herr Dozent Dr. habil O. H. Keller.

In die Redaktionskommission tritt für den satzungsgemäß ausscheidenden Herrn Hammerstein Herr Jonas ein. Die Redaktionskommission besteht also jetzt aus den Herren Hamel, Jonas, Neiß, Salkowski und dem Vorstand.

2. Wissenschaftlicher Teil:

Herr Scheffers: Das elliptische Kugelbild in der Perspektive.

332. Sitzung am 24. November 1937.

Vorsitzender: Herr Timpe. Anwesend: 13 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Mühlendyck: Neuer Beitrag zur Theorie der regulären Somenkongruenzen.

333. Sitzung am 8. Dezember 1937.

Vorsitzender: Herr Timpe. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Keller: Über die Integraldarstellungen der Bessel'schen Funktionen.

Man kennt zwei verschiedene Arten von Integraldarstellungen der Besselschen Funktionen, die sich auch nicht durch einen Wechsel der Integrationsveränderlichen in einander überführen lassen: Die Besselsche,

Digitized by Google

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\frac{z}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}}{\zeta^{\lambda+1}}\,d\zeta$$

erstreckt über eine Schleife um den Nullpunkt, und die Poissonsche,

$$J_\lambda(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int e^{izt}(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt,$$

erstreckt über einen Achterweg um die Punkte $+1$ und -1. In den meisten Lehrbüchern werden diese beiden Darstellungen ohne Beziehung zu einander einzeln aus der Differentialgleichung oder der Reihenentwicklung abgeleitet. Es sei nun auf eine Integraltransformation aufmerksam gemacht, mit deren Hilfe Poisson 1813 seine Integraldarstellung entwickelt hat: Nach bekannten Sätzen ist

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\frac{z}{2}\left(\sqrt{\zeta}\,t+\frac{i}{\sqrt{\zeta}}\right)^2} = i\sqrt{\frac{2\pi}{\zeta z}}.$$

Man kann mit Hilfe dieser Formel $e^{-\frac{z}{2\zeta}}$ durch ein bestimmtes Integral ausdrücken und in die Besselsche Integraldarstellung einsetzen; man kann in dem entstandenen Doppelintegral die Integration nach ζ ausführen und erhält so die Poissonsche Integraldarstellung. Beschränkt man sich auf geeignete Teilgebiete der λ- und der z-Ebene und stellt die Besselsche Funktion als halbe Summe der beiden Hankelschen Funktionen dar, die man einzeln zu behandeln hat, so bleiben die Integrale bei jedem Schritt konvergent, und man kann die Vertauschbarkeit der Integrationen in dem Doppelintegral nachweisen. Vgl. auch Watson, Theory of Bessel Fonctions Kap. VI. 3 S. 185/187.

Herr Timpe: Nomogramme zur Versicherungsmathematik. (Erschienen im Archiv f. math. Wirtschafts- u. Sozialforschung Bd. 4 (1938) S. 26).

334. Sitzung am 26. Januar 1938.

Vorsitzender: Herr Timpe. Anwesend: 20 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Marguerre: Über die Durchschlagskraft eines schwach gekrümmten Balkens.

335. Sitzung am 23. Februar 1938.

Vorsitzender: Herr Timpe. Anwesend: 13 Mitglieder und Gäste.

Digitized by Google

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Mittmann: Rassehygienische Maßnahmen mathematisch betrachtet.

Gestützt auf die Mendelschen Gesetze und deren Verallgemeinerungen ist es bei Verwendung mathematischer Hilfsmittel möglich, sich ein angenähertes Bild über die Erfolgsaussichten von Maßnahmen gegen die Erbkrankheiten zu machen. Als wichtigstes Ergebnis zeigt sich, daß wir auch bei den sog. überdeckbaren (rezessiven) Krankheitsanlagen mit einem ansehnlichen Erfolg der Krankensterilisation rechnen können, wenn wir nicht die üblicherweise vorausgesetzte Annahme machen, daß Gesunde und Kranke in der Vergangenheit stets völlig wahllos durcheinander geheiratet haben, sondern wenn wir die wirklichkeitsgetreue Voraussetzung machen, daß ein Gesunder eher einen Gesunden heiraten wird als einen Kranken.

336. Sitzung am 30. März 1938

in Gemeinschaft mit der Berliner Ortsgruppe der

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Vorsitzender: Herr Timpe. Anwesend: 30 Mitglieder beider Gesellschaften und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Hamel: Über nichtholonome Systeme der Mechanik.

337. Sitzung am 27. April 1938

in Gemeinschaft mit der Berliner Ortsgruppe der

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Vorsitzender: Herr Timpe. Anwesend: 19 Mitglieder beider Gesellschaften und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Kromm: Knickung von Platten mit einseitigen Rippen.

Beim Ausknicken von Platten mit zu ihrer Mittelebene unsymmetrischen Versteifungen tritt im Gegensatz zu symmetrisch versteiften Platten zusätzlich zur Ausbiegung noch eine Reckung von Platte und Rippe auf. Die dafür aufzubringende Dehnungsenergie hat eine stabilisierende Wirkung. Zu der Differentialgleichung und den Randbedingungen für die Normalverschiebung w kommen noch die Differentialgleichungen und Randbedingungen für die Verschiebungen u, v und die Kräfte in der Plattenmittelebene hinzu, wobei die Normalverschiebung w mit u und v nur in den Grenzbedingungen gekoppelt ist.

Digitized by Google

Als Beispiel wurde ein einseitig starr eingespannter oder frei aufgelagerter Plattenstreifen mit einer unsymmetrischen Aussteifung am anderen Rande durchgerechnet. Es ergab sich, daß sich das Problem auf das der symmetrischen Rippe zurückführen läßt, wenn man ein geeignetes „wirksames" Trägheitsmoment definiert, das den Einfluß der Exzentrizität enthält und außer von den Querschnittsabmessungen von Platte und Rippe noch von der Wellenlänge der Beulfigur abhängig ist. Für die symmetrisch angeordnete Rippe wurden Näherungslösungen entwickelt und auf den allgemeineren Fall angewandt.

Anschließend: Außerordentliche Mitgliederversammlung der Berliner Mathematischen Gesellschaft: Infolge seiner Berufung nach Danzig legte Herr Graf sein Amt als Schriftführer nieder. Zu seinem Nachfolger wurde Herr Keller durch Zuruf gewählt.

Am 25. Mai 1938: Besuch der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Berlin-Adlershof.

Anwesend: 44 Mitglieder und Gäste.

338. Sitzung am 22. Juni 1938.

Vorsitzender: Herr Timpe. Anwesend: 10 Mitglieder und Gäste.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Haentzschel: Zur Theorie der diophantischen Gleichungen 3. und 4. Grades.

Digitized by Google

Das elliptische Kugelbild in der Perspektive[1]).

Von Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

Wer eine Zeichnung aus dem Gebiete der darstellenden Geometrie zu prüfen hat, muß sich nach Hilfsmitteln umsehen, die ihn instandsetzen, mittels möglichst einfacher Proben zu entscheiden, ob die Zeichnung richtig oder falsch ist. Die Lehrbücher sehen ihre Aufgabe meistens nur darin, auseinanderzusetzen, wie man die Probleme zeichnerisch zu lösen hat; sie geben nur selten solche nachträglich zur Prüfung anzuwendende Hilfsmittel an. Zu den in meinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie und in anderen Veröffentlichungen schon gebrachten entscheidenden Merkmalen soll hier ein neues hinzugefügt werden. Freilich ist wohl anzunehmen, daß das zu Sagende nicht eigentlich neu sein wird, sondern nur die Art, wie ich das Wesentliche schließlich heraushebe. Ich glaube damit denen, die häufiger Zeichnungen zu prüfen haben, einen Gefallen zu tun.

Zunächst muß an Einiges erinnert werden, was ganz und gar wohlbekannt ist: Wir betrachten von einem Punkt O aus eine Kugel, um sie perspektiv auf eine Tafel abzubilden. Der Umriß des Bildes ist eine Ellipse, wenn die Kugel die zur Tafel parallele Ebene durchs Auge O, d. h. die sogenannte Verschwindungsebene, meidet, und nur dieser Fall soll uns beschäftigen. Die Ebene durch den zur Tafel senkrechten Hauptsehstrahl und durch den Mittelpunkt M der Kugel ist Symmetrieebene; sie enthält den Hauptpunkt H, d. h. den Fußpunkt des Lotes von O auf die Tafel, und einen Großkreis k der Kugel. Vorerst werde nun diese Symmetrieebene in Fig. 1 als Ebene der Zeichnung benutzt. Die eigentliche Tafel der Perspektive muß man sich also längs der mit t bezeichneten Geraden lotrecht aufstehend denken. Die Ebene der Figur enthält zwei Mantellinien des die Kugel einhüllenden Sehkegels, und ihre Schnittpunkte S_1 und S_2 mit t sind Scheitel der Bildellipse. Daß der Durchmesser S_1S_2 insbesondere die Hauptachse $2a$ der Bildellipse ist, erhellt aus der Verwendung der Dandelin-Queteletschen Hilfskugeln, die dem Sehkegel eingeschrieben sind und die Tafel der Perspektive berühren, da ja ihre Berührpunkte

1) Vorgetragen in der 331. Sitzung am 27. Oktober 1937.

Digitized by Google

die Brennpunkte sind. Diese Brennpunkte A' und B' ergeben sich in Fig. 1 sofort auf bekannte Weise. Nun haben die zur Tafel der Perspektive senkrechten Durchmesser der beiden Kugeln, also ihre zu OH parallelen Durchmesser dasselbe perspektive Bild wie der zu OH parallele Durchmesser AB des Kreises k, woraus die bekannte Tatsache hervorgeht, daß die Brennpunkte der Bildellipse die Bilder der Endpunkte des zur Tafel der Perspektive senkrechten Durchmessers der abzubildenden Kugel sind.

Insgesamt gibt es ∞^4 Kugeln, aber je ∞^1 haben dasselbe perspektive Bild, d. h. insgesamt ergeben sich nur ∞^3 Bildellipsen. Auf der Tafel der Perspektive gibt es aber ∞^5 Ellipsen überhaupt.

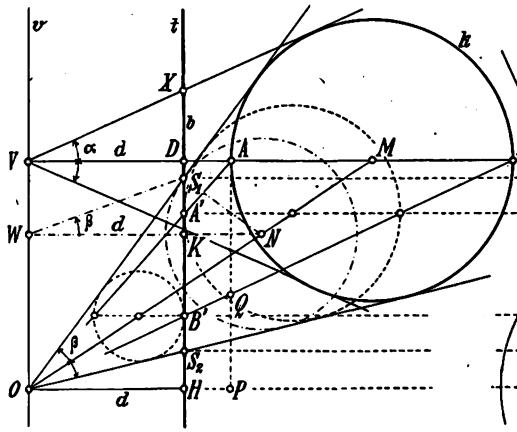


Fig. 1.

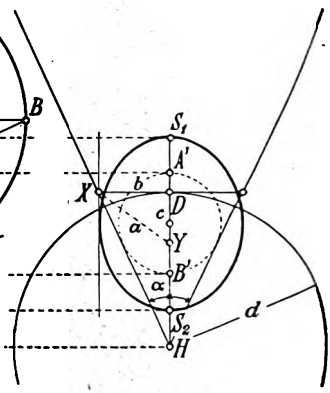


Fig. 2.

Also müssen diejenigen Ellipsen auf der Tafel, die richtige perspektive Bilder von Kugeln sind, durch $5-3=2$ besondere Eigenschaften ausgezeichnet sein. Die erste Eigenschaft besteht darin, daß die Hauptachse S_1S_2 der Ellipse nach dem Hauptpunkte H zielen muß. Unsere Aufgabe soll es sein, die dazutretende zweite Eigenschaft auf eine praktisch möglichst bequeme Form zu bringen.

Zu diesem Zwecke brauchen wir den Schnittpunkt V von $v \parallel t$ mit der Geraden AB und die Schnittpunkte P und Q von OH und OB mit der zu t parallelen Geraden durch A. Man liest ab:

$$VA:VB = OQ:OB = PQ:PA = HB':HA'.$$

Die hiernach bestehende Proportion

$$VA:VB = HB':HA'$$

wird sogleich benutzt werden.

Will man die halbe Nebenachse b der Bildellipse haben, so denke man sich durch das Auge O diejenigen beiden Ebenen ge-

Digitized by Google

legt, die von der Geraden v ausgehen und die abzubildende Kugel berühren. Zwischen ihnen liegt die Kugel derart, daß durch ihren Schnitt mit der Tafel der Perspektive die zur Hauptachse S_1S_2 senkrechte Breite der Ellipse gemessen wird, d. h. eben die Strecke $2b$. Die gedachten beiden Ebenen bilden mit der Ebene der Fig. 1 gleiche Winkel α, und diese Winkel ergeben sich, wenn man sich den Großkreis der Kugel, dessen senkrechte Projektion auf die Ebene der Fig. 1 die Strecke AB ist, in diese Ebene umgelegt vorstellt, d. h. es sind die Winkel, die in Fig. 1 von der Geraden $VDAB$ mit den Tangenten von V an den Kreis k gebildet werden. Somit ist die Strecke DX gleich der halben Nebenachse b, also $b = d \cdot \operatorname{tg}\alpha$, wenn d die Augendistanz $OH = VD$ bezeichnet.

Nun gehen wir endlich zum elliptischen Kugelbilde selbst über, d. h. in Fig. 2 soll die Ebene der Zeichnung die Bildtafel der Perspektive bedeuten, die man sich so hervorgehen denkt, daß man sie in Fig. 1 um die Gerade t herumdreht. Ohne weiteres leuchtet ein, wie sich hier in der neuen Fig. 2 die Scheitel S_1 und S_2 und die Brennpunkte A' und B' der Bildellipse auf der vom Hauptpunkte H ausgehenden Geraden aus Fig. 1 ergeben. Entnimmt man noch aus Fig. 1 die halbe Nebenachse b, so kann man die Ellipse zeichnen. Aber wir wollen nicht eigentlich dies Kugelbild entwerfen, sondern ein es kennzeichnendes einfaches Merkmal ableiten.

Man denke sich in Fig. 2 den Hilfskreis mit dem Durchmesser $A'B' = 2c$. Wegen der vorhin aufgestellten Proportion ist dann die Strecke VAB und der Kreis k über AB in Fig. 1 ähnlich zur Strecke $HB'A'$ und dem ebengenannten Hilfskreis in Fig. 2. Mithin bilden die vom Hauptpunkte H an den Hilfskreis gezogenen Tangenten mit der Geraden HS_2S_1 wieder den Winkel α. Wird also der Kreis um H mit dem Halbmesser d, d. h. der sogenannte Distanzkreis, von der Geraden HS_2S_1 in D geschnitten, so ergibt sich auch hier in Fig. 2 die Strecke DX gleich b. Da nun $a^2 = b^2 + c^2$ ist, können wir die notwendigen und hinreichenden Kennzeichen eines richtigen elliptischen Kugelbildes in Fig. 2 so aussprechen:

Erstens: Die Hauptachse S_1S_2 der Ellipse muß nach dem Hauptpunkte H zielen.

Zweitens: Schneidet die Gerade der Hauptachse den Distanzkreis in D, so ziehe man in D die Tangente an ihn. Diese Tangente bringe man in X zum Schnitte mit einer der zur Hauptachse parallelen Ellipsentangenten. Schließlich ziehe man die Gerade HX. Nun nehme man den Stechzirkel zur Hand und greife

Digitized by Google

mit ihm die Entfernung c der Ellipsenmitte von der Geraden HX ab (was man bekanntlich tun kann, ohne dies Lot selbst zu zeichnen). Die abgegriffene Strecke c trage man von D auf der Hauptachse auf bis Y. Die Strecke YX muß gleich der halben Hauptachse a sein. Stimmt dies, so ist das Kugelbild richtig.

Wer dies mit den Zeichendreiecken und dem Stechzirkel ausführt, wird einsehen, wie schnell sich die Ellipse prüfen läßt. Eben dieser Einfachheit halber verdient das Verfahren mehr bekannt zu werden.

Ein kleiner Zusatz möge gestattet sein: Will man den Krümmungskreis der Bildellipse im Hauptscheitel S_1 haben, so schreibt man bekanntlich dem Sehkegel die durch S_1 gehende Kugel ein, deren Mittelpunkt N sich in Fig. 1 als der Schnittpunkt von OM mit dem in S_1 auf OS_1 errichteten Lot ergibt. Die Kugel schneidet die Tafel der Perspektive in dem gesuchten Kreis, so daß KS_1 in Fig. 1 der Halbmesser des Kreises ist. Nun sind $\sphericalangle OWN$ und $\sphericalangle OS_1N$ rechte Winkel, so daß O, W, S_1, N auf einem Kreise liegen und daher $\sphericalangle NWS_1$ gleich $\sphericalangle NOS_1 = \beta$, dem halben Sehwinkel der abzubildenden Kugel, ist. Folglich hat die Bildellipse in ihren Hauptscheiteln den Krümmungshalbmesser $d \cdot tg\beta$. Er ist merkwürdiger Weise unabhängig von dem Winkel, den der Sehstrahl OM mit dem Hauptsehstrahl bildet, und so geht also hervor:

Alle Kugeln, die man unter demselben Gesichtswinkel sieht, bilden sich so ab, daß ihre Umrisse in den Hauptscheiteln denselben Krümmungshalbmesser haben. Dieser Satz findet sich vielleicht schon früher, als ich ihn in meinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie ausgesprochen habe.

Digitized by Google

Neuer Beitrag zur Theorie der regulären Somenkongruenzen[1].

Von O. Mühlendyck in Berlin.

Im folgenden wird auf die unten unter [2]) und [3]) angeführten Arbeiten Bezug genommen.

§ 1. Einiges über Biquaternionen. Zusammenstellung der Abkürzungen.

Eine Größe $a+\varepsilon b$, wo a und b reelle oder komplexe Größen sind und ε eine Einheit ist, die der Rechenregel $\varepsilon^2 = 0$ genügt, heißt eine *duale Größe*; a heißt der *skalare*, b der *vektorielle Koeffizient*, in Zeichen:

$$(1) \qquad \mathfrak{S}(a+\varepsilon b) = a, \quad \mathfrak{V}(a+\varepsilon b) = b.$$

Eine *Biquaternion* ist eine Größe $Q = Q_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3$, wo die Q_i duale Größen sind: $Q_i = q_{i1} + \varepsilon q_{i2}$, und wo die Einheiten e_1, e_2, e_3 die Rechenregeln befolgen: $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$, $e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1$, $e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2$, $e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$.

Sind Q, R, S, T Biquaternionen, so setzen wir zur Abkürzung

$$(QQ) = \Sigma Q_i^2, \quad (QR) = \Sigma Q_i R_i,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [QRS] = \begin{vmatrix} 1 & Q_0 & R_0 & S_0 \\ e_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ e_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ e_3 & Q_3 & R_3 & S_3 \end{vmatrix}, \quad (QRST) = \begin{vmatrix} Q_0 & R_0 & S_0 & T_0 \\ Q_1 & R_1 & S_1 & T_1 \\ Q_2 & R_2 & S_2 & T_2 \\ Q_3 & R_3 & S_3 & T_3 \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

Eine Biquaternion Q, für die $(QQ) = 1$ ist, heißt eine *Einheitsbiquaternion*. Es gelten die beiden Sätze:

Satz 1. Sind Q und R Biquaternionen, A und B Einheitsbiquaternionen, so ist $(QR) = (AQB, ARB)$.

1) Vorgetragen in der 332. Sitzung am 24. November 1937.

2) E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903; Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 12 (1913).

3) O. Mühlendyck, Zur Differentialgeometrie der regulären eindimensionalen Somenmannigfaltigkeiten, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 24 (1925); Beitrag zur Differentialgeometrie der regulären Somenkongruenzen, Math. Ann. 97 (1927); Geometrische Bedeutung des dualen Krümmungsmaßes und der dualen mittleren Krümmung einer Somenkongruenz, Jahresber. d. Deutsch. Math. Verein. 39 (1930). In den folgenden Anmerkungen kurz mit I, II, III bezeichnet.

Digitized by Google

Satz 2. Sind Q, R, S, T Biquaternionen, A und B Einheitsbiquaternionen, so ist $(QRST) = (AQB, ARB, ASB, ATB)$.

Verschwindet für eine Biquaternion Q der duale Koeffizient Q_0, so wird die Biquaternion zu einem *dualen Vektor*. Ist

$$U = U_1 e_1 + U_2 e_2 + U_3 e_3, \quad U_i = u_{i1} + \varepsilon u_{i2}$$

ein dualer Vektor und sind V, W weitere duale Vektoren, so setzen wir

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}U = u_{11} e_1 + u_{21} e_2 + u_{31} e_3, \quad \mathfrak{V}U = u_{12} e_1 + u_{22} e_2 + u_{32} e_3, \\ (UU) = \Sigma U_i^2, \quad (UV) = \Sigma U_i V_i, \quad (UVW) = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Ein dualer Vektor U, für den $(UU) = 1$ ist, heißt ein *dualer Einheitsvektor*.

§ 2. Das begleitende Zylindroid und die Hauptsteigungen einer regulären Somenkongruenz. Invariante Ableitungen der Hauptsteigungen.

Ein (rechtseitiges) Soma wird wie früher durch eine Einheitsbiquaternion X dargestellt:

$$(4) \quad X = X_0 + X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3, \quad X_i = \alpha_i + \varepsilon \beta_i, \quad \Sigma X_i^2 = 1.$$

Wir betrachten eine reguläre Somenkongruenz

$$(5) \quad X = X(u, v).$$

Beschränkt man sich auf reelle Kongruenzen, was wir im folgenden tun wollen, so kann als *regulär* eine solche Somenkongruenz erklärt werden, die analytisch ist und sich nicht in Schiebungs-Somen-M_1 zerlegen läßt. Eine Schiebungs-Somen-M_1 ist eine Somen-M_1, deren Somen alle zueinander parallel sind. Zu der Schraubung, die ein Kongruenzsoma X in das Nachbarsoma $X + X_u du + X_v dv$ überführt, gehört ein Gewinde, dessen Koordinaten durch die 6 Koeffizienten des dualen Vektors (§ 1)

$$(6) \quad X^{-1} X_u du + X^{-1} X_v dv \quad (X^{-1} = X_0 - X_1 e_1 - X_2 e_2 - X_3 e_3)$$

gegeben sind. Betrachtet man in (6) $du : dv$ als veränderlich, so erhält man das begleitende Gewindebüschel der Stelle (u, v). Die Achsen der Gewinde des Büschels bilden das *begleitende Zylindroid*

$$(7) \quad \frac{X^{-1} X_u du + X^{-1} X_v dv}{\sqrt{\mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2}}$$

der Stelle (u, v). $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ sind die dualen Grundgrößen 1. Ordnung

Digitized by Google

der Kongruenz:

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = E_1 + \varepsilon E_2 + = (X_u X_u), & \mathfrak{F} = F_1 + \varepsilon F_2 = (X_u X_v), \\ \mathfrak{G} = G_1 + \varepsilon G_2 = (X_v X_v), \end{cases}$$

wo die Klammern durch (2) erklärt sind. (7) ist ein dualer Einheitsvektor (§ 1), dessen 6 Koeffizienten die Richtungskosinus und Momente der zu $du:dv$ gehörigen Erzeugenden des Zylindroids angeben. Das Quadrat des *dualen Bogenelements*[4]) der Kongruenz ist durch

$$(9)\qquad (d\theta + \varepsilon\, d H)^2 = \mathfrak{E}\, du^2 + 2\,\mathfrak{F}\, du\, dv + \mathfrak{G}\, dv^2$$

gegeben, und die *Steigung*[4]) σ der Kongruenz durch

$$(10)\qquad \sigma = \frac{d H}{d\theta} = \tfrac{1}{2}\,\frac{E_2\, du^2 + 2\, F_2\, du\, dv + G_2\, dv^2}{E_1\, du^2 + 2\, F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2}.$$

Im reellen Fall hat σ als Funktion von $du:dv$, wenn die Stelle (u, v) nicht isotrop ist ($E_1 : F_1 : G_1 \neq E_2 : F_2 : G_2$), zwei Extremwerte σ_1 und σ_2, die als die *Hauptsteigungen* bezeichnet werden. Die zu diesen gehörigen Fortschreitungsrichtungen heißen die Hauptfortschreitungsrichtungen und die zugehörigen Erzeugenden H_{I} und H_{II} des Zylindroids (7) die *Haupterzeugenden. H_{I} und H_{II} schneiden einander senkrecht.* Schreitet man von einem Kongruenzsoma aus in der Kongruenz immer in einer Hauptfortschreitungsrichtung weiter, so erhält man eine *Haupt-Somen-M_1*. Wir führen jetzt Parameter u, v derart ein, daß

$$(11)\qquad \mathfrak{F} \equiv 0$$

ist. Dann sind, wenn die Kongruenz nicht isotrop ist, die Parameter-Somen-M_1 die Haupt-Somen-M_1. Die Haupterzeugenden des Zylindroids (7) sind wegen (11) durch die dualen Einheitsvektoren

$$(12)\qquad H_{\mathrm{I}} = X^{-1} X_u : \sqrt{\mathfrak{E}}, \quad H_{\mathrm{II}} = X^{-1} X_v : \sqrt{\mathfrak{G}}$$

gegeben und orientiert. Die gemeinsame Normale von H_{I} und H_{II}, die Achse des Zylindroids, wird als *Normalachse der Kongruenz* an der Stelle (u, v) bezeichnet und ist durch den dualen Einheitsvektor

$$(13)\qquad P = H_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{II}}$$

gegeben und orientiert. Die Erzeugenden des Zylindroids schneiden die Achse P senkrecht. Der Winkel, den eine Erzeugende mit H_{I} bildet, möge mit φ, der Abstand von H_{I} mit ψ bezeichnet

4) Duales Bogenelement und Steigung siehe I S. 48 und II S. 420.

Digitized by Google

werden. Unter Benutzung der Funktionen sin und cos einer dualen Größe [5]) und unter Anwendung des Satzes 1 erhalten wir

$$(14)\quad \begin{cases} \cos(\varphi+\varepsilon\psi) = \left(\dfrac{X^{-1}X_u}{\sqrt{\mathfrak{E}}},\ \dfrac{X^{-1}X_u\,du + X^{-1}X_v\,dv}{\sqrt{\mathfrak{E}\,du^2+\mathfrak{G}\,dv^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{\mathfrak{E}}\,du}{\sqrt{\mathfrak{E}\,du^2+\mathfrak{G}\,dv^2}}, \\ \sin(\varphi+\varepsilon\psi) = \left(\dfrac{X^{-1}X_v}{\sqrt{\mathfrak{G}}},\ \dfrac{X^{-1}X_u\,du + X^{-1}X_v\,dv}{\sqrt{\mathfrak{E}\,du^2+\mathfrak{G}\,dv^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{\mathfrak{G}}\,dv}{\sqrt{\mathfrak{E}\,du^2+\mathfrak{G}\,dv^2}}. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir

$$(15)\quad \cos(\varphi+\varepsilon\psi) = \cos\varphi - \varepsilon\psi\sin\varphi,\quad \sin(\varphi+\varepsilon\psi) = \sin\varphi + \varepsilon\psi\cos\varphi,$$

so erhalten wir aus (7) leicht die bekannte Formel für das Zylindroid:

$$(16)\qquad \psi = \tfrac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_1)\sin 2\varphi$$

und aus (10) für die Steigung σ die Formel

$$(17)\qquad \sigma = \sigma_1\cos^2\varphi + \sigma_2\sin^2\varphi.$$

An der Stelle (u, v) haben die Haupt-Somen-M_1 (s. o.) der Kongruenz die skalaren Bogenelemente [4])

$$(18)\qquad \begin{cases} d\theta_1 = -\sqrt{E_1}\,du, & \text{bezogen auf } H_{\mathrm{I}}, \\ d\theta_2 = -\sqrt{G_1}\,dv, & \text{bezogen auf } H_{\mathrm{II}}. \end{cases}$$

Es ergeben sich jetzt an der Stelle (u, v) folgende *invariante Ableitungen der Hauptsteigungen* σ_1 und σ_2:

$$(19)\quad \begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{\sigma_{1u}\,du}{d\theta_1} = -\dfrac{\sigma_{1u}}{\sqrt{E_1}},\quad \sigma_{12} = \dfrac{\sigma_{1v}\,dv}{d\theta_2} = -\dfrac{\sigma_{1v}}{\sqrt{G_1}}, \\ \sigma_{21} = \dfrac{\sigma_{2u}\,du}{d\theta_1} = -\dfrac{\sigma_{2u}}{\sqrt{E_1}},\quad \sigma_{22} = \dfrac{\sigma_{2v}\,dv}{d\theta_2} = -\dfrac{\sigma_{2v}}{\sqrt{G_1}}. \end{cases}$$

§ 3. Die Normalschnitte einer Kongruenzstelle. Stellen erster, zweiter und dritter Art.

Die reguläre Somenkongruenz $X = X(u, v)$ hat an einer Stelle allgemeiner Lage (u, v) $(E_1G_1 - F_1^2 \neq 0)$ eine bestimmte berührende ebene Somenkette [6]) [7]) E_b. Wir legen durch das zu E_b reziproke Soma und die Kongruenzsomen (u, v) und $(u+du,\ v+dv)$ die ausgezeichnete fünfdimensionale Somenkette [7]). Diese schneidet die Kongruenz in einer Somen-M_1, die als ein *Normalschnitt* der Stelle

5) Über sin und cos einer dualen Größe vergl. Geometrie der Dynamen S. 205.

6) Berührende ebene Somenkette siehe II S. 422.

7) Über Somenketten vergl. Geometrie der Dynamen S. 569 ff.

Digitized by Google

(u, v) bezeichnet werden soll. Für die zu (u, v) gehörige *duale Krümmung*[8]) *der Normalschnitte* gilt die Formel[9])

$$k + \varepsilon\varkappa = \frac{\mathfrak{L}\,du^2 + 2\,\mathfrak{M}\,du\,dv + \mathfrak{N}\,dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2 + 2\,\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2} \qquad (k \neq 0). \tag{20}$$

Hier bedeutet k die *skalare*, $\varkappa$ die *vektorielle*, $k + \varepsilon\varkappa$ die *duale Krümmung* des zu $du : dv$ gehörigen Normalschnittes der Stelle (u, v). $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sind die dualen Grundgrößen 2. Ordnung der Kongruenz:

$$\mathfrak{L} = L_1 + \varepsilon L_2 = (Y X_{uu}), \quad \mathfrak{M} = M_1 + \varepsilon M_2 = (Y X_{uv}), \tag{21}$$
$$\mathfrak{N} = N_1 + \varepsilon N_2 = (Y X_{vv}),$$

$$Y = [X X_u X_v] : \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}, \tag{22}$$

wo die Klammern durch (2) erklärt sind. Der duale Einheitsvektor

$$P = - X^{-1} Y \tag{23}$$

stellt die zu (u, v) gehörige Normalachse der Kongruenz (§ 2) dar. Es gibt im allgemeinen zwei Fortschreitungsrichtungen $du : dv$, deren zugeordnete Normalschnitte die skalare Krümmung Null an der Stelle (u, v) haben. Für diese beiden Schnitte liefert (20) zwar die skalaren, aber nicht die vektoriellen Krümmungen, obwohl sich bestimmte endliche vektorielle Formelwerte ergeben. Dieser Umstand veranlaßt mich, für den Quotienten aus der zweiten und ersten dualen Grundform der Kongruenz nachher eine neue geometrische Deutung zu geben, die für jede Fortschreitungsrichtung gültig ist, für die der Quotient einen bestimmten endlichen dualen Wert hat. Hat ein Normalschnitt die skalare Krümmung $k = 0$, so kann man seine vektorielle Krümmung $\varkappa$ mit Hilfe der Formeln (34) und (36) oder (41) berechnen.

Man kann die Stellen allgemeiner Lage $(E_1 G_1 - F_1^2 \neq 0)$ einer regulären Somenkongruenz hinsichtlich der Krümmungen ihrer Normalschnitte in drei Arten einteilen: *Stelle erster Art*: $k \not\equiv 0$, *Stelle zweiter Art*: $k \equiv 0$, $\varkappa \not\equiv 0$, *Stelle dritter Art*: $k + \varepsilon\varkappa \equiv 0$.

§ 4. Die dualen geodätischen Krümmungen der Normalschnitte.

A sei eine feste Einheitsbiquaternion, X ein veränderliches Soma. Dann wird durch

8) Duale Krümmung einer Somen-M_1 siehe I S. 50.

9) Siehe III S. 57. Bei der dort angegebenen Formel fehlt irrtümlich der Zusatz $(k \neq 0)$.

Digitized by Google

(24) $$(A\,X) = 0$$

eine ebene Somenkette dargestellt. Das zu A gehörige Soma ist zu der ebenen Kette reziprok. Ein weiteres Soma, das nicht zu A parallel ist, sei durch die Einheitsbiquaternion B gegeben. Wir verbinden A mit B durch eine gerade Somenkette und bringen diese mit der ebenen Kette zum Schnitt. Das Schnittsoma ist gegeben durch

(25) $$X = \frac{B - (A\,B)\,A}{\sqrt{1 - (A\,B)^2}}$$

und soll als die *senkrechte Projektion des Soma B auf die ebene Somenkette* (24) bezeichnet werden.

Wir betrachten einen Normalschnitt $X = X(t)$ der Stelle (u, v) der Somenkongruenz $X = X(u, v)$. Zu (u, v) gehöre der Parameter $t = 0$. Dann lautet die Reihenentwickelung für die Umgebung der Stelle $t = 0$ des Normalschnittes:

(26) $$X + X'\,t + X''\,\frac{t^2}{2} + \cdots,$$

wo die Striche die Ableitungen nach t bedeuten. Zu der ebenen Somenkette E_b, die die Kongruenz in (u, v) berührt, ist das Soma Y (Formel (22)) reziprok. Wir projizieren den Normalschnitt (26) senkrecht auf die ebene Kette E_b und erhalten als Projektion eine Somen-M_1. Dabei wenden wir Formel (25) an, stellen hierauf für die Umgebung der Stelle $t = 0$ der Projektion die Reihenentwickelung auf und erhalten:

(27) $$Z = X + X'\,t + [X'' - (Y\,X'')\,Y]\,\frac{t^2}{2} + \cdots$$

Somit ist an der Stelle $t = 0$:

(28) $$Z = X, \quad Z' = X', \quad Z'' = X'' - (Y\,X'')\,Y.$$

Die Tangentialachse[10]) der Projektion an der Stelle t ist gegeben durch den dualen Einheitsvektor

$$U = Z^{-1}\,Z' : \sqrt{(Z'\,Z')}.$$

Wir erhalten jetzt an der Stelle $t = 0$ unter Berücksichtigung von (28), (3), Satz 1, (23), von $(Y\,X) = (Y\,X') = 0$, $(Y\,Y) = 1$ und von Satz 2:

$$U' = \frac{(X'\,X')}{\sqrt{(X'\,X')}} + \frac{X^{-1}\,[X'' - (Y\,X'')\,Y]}{\sqrt{(X'\,X')}} - \frac{X^{-1}\,X'\,(X'\,X'')}{(X'\,X')\,\sqrt{(X'\,X')}},$$

10) Die Achse der Schraubung, die ein Soma einer Somen-M_1 in das benachbarte Somen-M_1-Soma überführt, heißt Tangentialachse.

Digitized by Google

$$29)\quad \left\{\begin{array}{l} (P\,U') = (X\,P,\ X\,U') = (-\,Y,\ X'' - (Y\,X'')\,Y) = 0, \\ (P\,U\,U') = (1, P, U, U') = (X, X\,P, X\,U, X\,U') \\ \quad = \left(X, -\,Y, \dfrac{X'}{\sqrt{(X'\,X')}}, \dfrac{X''}{\sqrt{(X'\,X')}}\right) = (Y\,X\,X'\,X''):(X'\,X'). \end{array}\right.$$

Da der Normalschnitt mit dem Soma Y in einer ausgezeichneten fünfdimensionalen Somenkette liegt, ist

$$30)\qquad \mathfrak{S}(Y\,X\,X'\,X'') = 0,$$

wo $\mathfrak{S}$ durch (1) erklärt ist. Auf Grund von (29) und (30) ergibt sich weiter

$$\mathfrak{S}(P\,U') = \mathfrak{S}(U\,U') = \mathfrak{S}(P\,U\,U') = 0,$$

$$31)\qquad \mathfrak{S}\,U' = 0.$$

(31) bedeutet aber, daß die zu $t = 0$ und $t = dt$ gehörigen Tangentialachsen der Projektion zueinander parallel sind. Der Abstand der beiden Achsen werde mit $d\eta^*$ bezeichnet. Dann ist $d\eta^*$ der duale Kontingenzwinkel[11]), $d\vartheta^* + \varepsilon\,dH^* = -\sqrt{(Z'\,Z')}\,dt = -\sqrt{(X'\,X')}\,dt$ das duale Bogenelement[11]), $\varepsilon\,d\eta^* : -\sqrt{(X'\,X')}\,dt$ die duale Krümmung[11]) der Projektion an der Stelle $t = 0$. Diese duale Krümmung wollen wir die *duale geodätische Krümmung* $k_g + \varepsilon\varkappa_g$ *des Normalschnittes* nennen. Man sieht, daß $k_g = 0$ ist, was den Satz ergibt:

Satz 3. Die Normalschnitte einer Kongruenzstelle haben an der Stelle die skalare geodätische Krümmung Null.

$\mathfrak{V}\,U' : d\eta^*$ ($\mathfrak{V}$ durch (3) erklärt) ist ein Einheitsvektor, der wegen (31) und (29) auf P und U senkrecht steht. Mithin ist, man beachte (29),

$$(P\,U\,U')\,dt = \varepsilon\,d\eta^*,\ \varepsilon\varkappa_g = \frac{\varepsilon\,d\eta^*}{-\sqrt{(X'\,X')}\,dt} = \frac{(P\,U\,U')}{-\sqrt{(X'\,X')}} = \frac{(Y\,X\,X'\,X'')}{-(X'\,X')\sqrt{(X'\,X')}}.$$

Daher erhalten wir für die zu $t = 0$ oder (u, v) gehörige *vektorielle geodätische Krümmung* $\varkappa_g$ *des Normalschnittes*:

$$32)\qquad \varkappa_g = \frac{\mathfrak{V}(Y\,X\,X'\,X'')}{-[\mathfrak{S}(X'\,X')]^{3/2}}.$$

Wir rechnen $\varkappa_g$ weiter aus, wobei wir (30) benutzen, setzen aber, damit die Formel nicht zu umfangreich wird, voraus, die Para-

11) Dualer Kontingenzwinkel, duales Bogenelement, duale Krümmung einer Somen-M_1 siehe I S. 48 u. 50.

Digitized by Google

meter u, v seien so gewählt, daß $\mathfrak{F} \equiv 0$ ist, und gelangen zu der Formel

$$(33)\quad \begin{cases} \varkappa_g = \dfrac{a_0\,du^3 + a_1\,du^2\,dv + a_2\,du\,dv^2 + a_3\,dv^3}{-(E_1\,du^2 + G_1\,dv^2)^{3/2}}\ (\mathfrak{F} \equiv 0), \\ a_0 = E_1(G_2 E_{1v} - G_1 E_{2v}) : 2\,G_1\sqrt{E_1 G_1}, \\ a_1 = 2E_1^2(G_1 G_{2u} - G_2 G_{1u}) - G_1^2(E_1 E_{2u} - E_2 E_{1u}) : 2\,E_1 G_1\sqrt{E_1 G_1}, \\ a_2 = E_1^2(G_1 G_{2v} - G_2 G_{1v}) - 2\,G_1^2(E_1 E_{2v} - E_2 E_{1v}) : 2\,E_1 G_1\sqrt{E_1 G_1}, \\ a_3 = G_1(E_1 G_{2u} - E_2 G_{1u}) : 2\,E_1\sqrt{E_1 G_1}. \end{cases}$$

Jetzt nehmen wir an, der Normalschnitt (26) habe an der Stelle $t = 0$ die skalare Krümmung $k = 0$. Die Tangentialachse des Normalschnittes in $t = 0$ ist durch $P_\mathrm{I} = X^{-1}X' : \sqrt{(X'X')}$ gegeben. Die Nachbartangentialachse $P_\mathrm{I} + P_\mathrm{I}'dt$ ist wegen $k = 0$ zu P_I parallel und habe von P_I den Abstand $d\eta$. Dann ist $n = \mathfrak{V}P_\mathrm{I}'dt : d\eta$ ein Einheitsvektor, der auf der durch P_I und $P_\mathrm{I} + P_\mathrm{I}'dt$ gelegten Ebene senkrecht steht. Die gemeinsame Normale von P und P_I ist durch PP_I gegeben und orientiert. Wir bezeichnen den Winkel $PP_\mathrm{I} \to n$, bezogen auf P_I, mit ω. Jetzt ist

$$(PP_\mathrm{I}P_\mathrm{I}')\,dt = \varepsilon\,d\eta\cos\omega,\quad \varepsilon\varkappa = \varepsilon\,d\eta : d\theta + \varepsilon\,dH = \varepsilon\,d\eta : -\sqrt{(X'X')}\,dt,$$

$$\begin{aligned} (PP_\mathrm{I}P_\mathrm{I}') &= (1, P, P_\mathrm{I}, P_\mathrm{I}') = (X, XP, XP_\mathrm{I}, XP_\mathrm{I}') \\ &= \left(X, -Y, \frac{X'}{\sqrt{(X'X')}}, \frac{X''}{\sqrt{(X'X')}}\right) = (YXX'X'') : (X'X'), \\ \varepsilon\varkappa\cos\omega &= (YXX'X'') : -(X'X')\sqrt{(X'X')}. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir unter Berücksichtigung von (32) für die zu $t = 0$ oder (u, v) gehörige *vektorielle Krümmung $\varkappa$ des Normalschnittes* die Formel

$$(34)\qquad \varkappa\cos\omega = \frac{\mathfrak{V}(YXX'X'')}{-[\mathfrak{S}(X'X')]^{3/2}} = \varkappa_g \qquad (k = 0).$$

§ 5. Die dualen normalen Krümmungen der Normalschnitte.

Wir betrachten den Normalschnitt (26). Die Somenkongruenz hat an der Stelle $t = 0$ oder (u, v) eine berührende ebene Somenkette E_b. Durch das zu E_b reziproke Soma und die Kongruenzsomen $(t = 0)$ und $(t = dt)$ legen wir die ebene Somenkette E_n. Nun projizieren wir den Normalschnitt (26) senkrecht auf die ebene Kette E_n und erhalten als Projektion eine Somen-M_1. Hierauf stellen wir für die Umgebung der Stelle $t = 0$ der Projektion die Reihenentwickelung auf und berechnen die duale Krümmung der Projektion an der Stelle $t = 0$. Nachdem im vorigen Para-

Digitized by Google

graphen die Rechnungen ausführlich behandelt worden sind, soll diesmal mit Rücksicht auf den Umfang der Arbeit gleich das Resultat angegeben werden. Die duale Krümmung der Projektion in der Stelle $t = 0$ bezeichnen wir als die zu $t = 0$ oder (u, v) gehörige *duale normale Krümmung des Normalschnittes*. Es ergibt sich

$$k_n + \varepsilon \varkappa_n = \frac{(Y X'')}{(X' X')} = \frac{\mathfrak{L}\,du^2 + 2\,\mathfrak{M}\,du\,dv + \mathfrak{N}\,dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2 + 2\,\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2}. \tag{35}$$

Dies ist die neue geometrische Deutung des Quotienten aus der zweiten und ersten dualen Grundform der Kongruenz. Formel (35) gilt für jede Fortschreitung, für die der genannte Quotient einen bestimmten endlichen dualen Wert hat, was bei Formel (20) nicht der Fall war, sie gilt also insbesondere für alle reellen Normalschnitte einer reellen Kongruenzstelle.

Hat der Normalschnitt (26) an der Stelle $t = 0$ die skalare Krümmung $k = 0$, so ergibt sich als Gegenstück zu Formel (34) für die zu $t = 0$ oder (u, v) gehörige *vektorielle Krümmung* $\varkappa$ *des Normalschnittes* die Formel

$$\varkappa \sin \omega = \frac{\mathfrak{V}(Y X'')}{\mathfrak{S}(X' X')} = \varkappa_n \qquad (k = 0), \tag{36}$$

wo der Winkel ω wie in Formel (34) zu erklären ist.

§ 6. Die Steigungsänderungen der Normalschnitte.

Die Parameter u, v der Somenkongruenz seien so gewählt, daß $\mathfrak{F} \equiv 0$ ist. Dann erhält man für das skalare Bogenelement $d\theta$ und die Steigung σ der Kongruenz die Formeln

$$d\theta = -\sqrt{E_1\,du^2 + G_1\,dv^2}, \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\,\frac{E_2\,du^2 + G_2\,dv^2}{E_1\,du^2 + G_1\,dv^2}. \tag{37}$$

Hier ist $d\theta$ bezogen auf die orientierte Zylindroiderzeugende $X^{-1} X_u\,du + X^{-1} X_v\,dv : \sqrt{\mathfrak{E}\,du^2 + \mathfrak{G}\,dv^2}$ (§ 2). Wir berechnen jetzt an der Stelle (u, v) die *Steigungsänderung* $d\sigma : d\theta$ *des Normalschnittes* $(du : dv)$ der Stelle (u, v) und finden unter Benutzung von (30):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= \frac{b_0\,du^3 + b_1\,du^2\,dv + b_2\,du\,dv^2 + b_3\,dv^3}{-(E_1\,du^2 + G_1\,dv^2)^{3/2}} \quad (\mathfrak{F} \equiv 0), \\ b_0 &= E_1 E_{2u} - E_2 E_{1u} : 2\,E_1, \\ b_1 &= E_1 G_1 E_{2v} + E_1 G_2 E_{1v} - 2\,G_1 E_2 E_{1v} : 2\,E_1 G_1, \\ b_2 &= E_1 G_1 G_{2u} + G_1 E_2 G_{1u} - 2\,E_1 G_2 G_{1u} : 2\,E_1 G_1, \\ b_3 &= G_1 G_{2v} - G_2 G_{1v} : 2\,G_1. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Digitized by Google

§ 7. Die begleitenden Dreikante der Normalschnitte einer Kongruenzstelle erster Art.

Eine Kongruenzstelle (u, v) erster Art ist gekennzeichnet durch $k \not\equiv 0$ (§ 3). Wir betrachten einen Normalschnitt $X = X(t)$ der Stelle (u, v), der in (u, v) die skalare Krümmung $k \neq 0$ hat. Dann hat er in (u, v) ein begleitendes Dreikant, dessen Tangentialachse, Haupt- und Binormalachse durch die dualen Einheitsvektoren

$$(39)\quad P_{\mathrm{I}} = \frac{X^{-1} X'}{\sqrt{(X' X')}},\quad P_{\mathrm{II}} = \frac{P_{\mathrm{I}}'}{-(k+\varepsilon\varkappa)\sqrt{(X' X')}},\quad P_{\mathrm{III}} = P_{\mathrm{I}} P_{\mathrm{II}}$$

gegeben und orientiert sind. Die Tangentialachse schneidet wegen $(P P_{\mathrm{I}}) = 0$ die zu (u, v) gehörige Normalachse P der Kongruenz (§ 2) senkrecht, die Hauptnormalachse P_{II} ist wegen $(P P_{\mathrm{II}}) = 1$ zu der Achse P parallel und habe von ihr, bezogen auf P_{I}, den Abstand ζ, für den man nach einiger Rechnung die Formel erhält:

$$(40)\qquad \zeta = -\frac{\varkappa_g}{k}.$$

Es gilt der

Satz 4. Hat ein Normalschnitt einer Kongruenzstelle S in S die skalare Krümmung $k \neq 0$, so hat er in S ein begleitendes Dreikant, dessen Tangentialachse T die zu S gehörige Normalachse P der Kongruenz senkrecht schneidet und dessen Hauptnormalachse zu der Achse P parallel ist und von ihr, bezogen auf die orientierte Tangentialachse T, den Abstand $\zeta = -\varkappa_g : k$ hat, wo $\varkappa_g$ die zu S gehörige vektorielle geodätische Krümmung des Normalschnittes bedeutet. In dem Quotienten $\varkappa_g : k$ ist nur eine Quadratwurzel enthalten und zwar dieselbe, durch die die Orientierung der Tangentialachse T bewirkt wird.

§ 8. Die Normalschnitte einer Kongruenzstelle zweiter Art.

Wir betrachten eine Kongruenzstelle (u, v) zweiter Art: $k \equiv 0$, $\varkappa \not\equiv 0$ (§ 3). Jetzt existieren die im vorigen Paragraphen betrachteten Dreikante nicht. Zur Berechnung der vektoriellen Krümmung $\varkappa$ eines Normalschnittes können die Formeln (34) und (36) dienen. Es ergibt sich unter der Voraussetzung $\mathfrak{F} \equiv 0$:

$$(41)\quad \begin{aligned} \varkappa \cos\omega &= \frac{a_0\,du^3 + a_1\,du^2\,dv + a_2\,du\,dv^2 + a_3\,dv^3}{-(E_1\,du^2 + G_1\,dv^2)^{3/2}} = \varkappa_g, \\ \varkappa \sin\omega &= \frac{L_2\,du^2 + 2\,M_2\,du\,dv + N_2\,dv^2}{E_1\,du^2 + G_1\,dv^2} = \varkappa_n, \end{aligned}$$

Digitized by Google

wo die Koeffizienten a_i aus (33) zu entnehmen sind. Der Winkel ω ist in § 4 erklärt worden. Aus (41) folgt der

Satz 5. Hat ein Normalschnitt einer Kongruenzstelle an der Stelle die skalare Krümmung $k = 0$, *die vektorielle Krümmung* $\varkappa \neq 0$, *die vektorielle geodätische Krümmung* $\varkappa_g$, *die vektorielle normale Krümmung* $\varkappa_n$ *und die Richtungsinvariante* $tg\,\omega$, *so bestehen die Beziehungen* $\varkappa^2 = \varkappa_g^2 + \varkappa_n^2$, $tg\,\omega = \varkappa_n : \varkappa_g$.

§ 9. Invarianten einer nichtisotropen Kongruenzstelle, die die Umgebung 1. und 2. Ordnung der Stelle kinematisch kennzeichnen.

Aus den Formeln, die wir aufgestellt haben, sollen jetzt Formeln abgeleitet werden, in denen nur Invarianten vorkommen, und zwar sollen die Formeln zur Konstruktion der Umgebung 1. und 2. Ordnung einer Kongruenzstelle dienen. Dabei muß man verschiedene Formeln aufstellen, je nachdem es sich um eine Stelle erster, zweiter oder dritter Art (§ 3) handelt.

Wir betrachten eine Stelle (u, v) erster Art ($k \not\equiv 0$ (§ 3)) einer regulären Somenkongruenz $X = X(u, v)$, deren Parameter u, v so gewählt seien, daß $\mathfrak{F} \equiv 0$ ist. Die Stelle sei nicht isotrop. Dann existieren in (u, v) Hauptsteigungen σ_1 und σ_2 (§ 2), deren zugeordnete Normalschnitte wir als die *Hauptschnitte* der Stelle (u, v) bezeichnen wollen. Formel (35) nimmt jetzt die einfachere Gestalt an:

$$k_n + \varepsilon \varkappa_n = \frac{\mathfrak{L}\,du^2 + 2\,\mathfrak{M}\,du\,dv + \mathfrak{N}\,dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2 + \mathfrak{G}\,dv^2}. \tag{42}$$

Wir setzen

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{E}} = k_{1n} + \varepsilon \varkappa_{1n}, \quad \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{G}} = k_{2n} + \varepsilon \varkappa_{2n}, \quad \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}} = m_1 + \varepsilon m_2 \tag{43}$$

und erhalten unter Anwendung der in § 2 für das begleitende Zylindroid eingeführten Größen φ und ψ und der Formeln (14) und (16) folgende Formel für die *duale normale Krümmung* $k_n + \varepsilon \varkappa_n$ *der Normalschnitte*:

$$\begin{cases} k_n + \varepsilon \varkappa_n = (k_{1n} + \varepsilon \varkappa_{1n}) \cos^2 \mathfrak{f} + 2\,(m_1 + \varepsilon m_2) \cos \mathfrak{f} \sin \mathfrak{f} + (k_{2n} + \varepsilon \varkappa_{2n}) \sin^2 \mathfrak{f}, \\ \mathfrak{f} = \varphi + \varepsilon \psi = \varphi + \varepsilon \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Hier bedeuten $k_{1n} + \varepsilon \varkappa_{1n}$ und $k_{2n} + \varepsilon \varkappa_{2n}$ die dualen normalen Krümmungen des ersten und zweiten Hauptschnittes, m_1 und m_2 sind weitere Invarianten. Die Funktionen $\sin(\varphi + \varepsilon\psi)$ und $\cos(\varphi + \varepsilon\psi)$ sind durch (15) erklärt.

Digitized by Google

Aus (20) ergibt sich für die *duale Krümmung* $k+\varepsilon\varkappa$ *der Normalschnitte* die Formel:

$$(45)\quad \begin{cases} k+\varepsilon\varkappa = (k_{1n}+\varepsilon\varkappa_{1n})\cos^2\mathfrak{f}+2(m_1+\varepsilon m_2)\cos\mathfrak{f}\sin\mathfrak{f}+(k_{2n}+\varepsilon\varkappa_{2n})\sin^2\mathfrak{f} \\ \mathfrak{f} = \varphi+\varepsilon\tfrac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_1)\sin 2\varphi \quad (k\neq 0). \end{cases}$$

Für die *vektorielle geodätische Krümmung* $\varkappa_g$ *der Normalschnitte* erhalten wir aus (33) die Formel

$$(46)\quad \varkappa_g = \varkappa_{1g}\cos^3\varphi+(2\sigma_{21}-\sigma_{11})\cos^2\varphi\sin\varphi+(\sigma_{22}-2\sigma_{12})\cos\varphi\sin^2\varphi + \varkappa_{2g}\sin^3\varphi.$$

Hier sind $\varkappa_{1g}$ und $\varkappa_{2g}$ die vektoriellen geodätischen Krümmungen des ersten und zweiten Hauptschnittes. Die Invarianten σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22} sind in § 2 erklärt worden.

Aus (38) leiten wir für die *Steigungsänderung* $d\sigma:d\vartheta$ *der Normalschnitte* die Formel ab:

$$(47)\quad \frac{d\sigma}{d\vartheta} = \sigma_{11}\cos^3\varphi+(2\sigma_{12}+\varkappa_{1g})\cos^2\varphi\sin\varphi+(2\sigma_{21}-\varkappa_{2g})\cos\varphi\sin^2\varphi + \sigma_{22}\sin^3\varphi.$$

In den Formeln (16), (17), (40), (45), (46), (47) treten folgende 14 Invarianten der Stelle (u, v) auf: σ_1, σ_2, σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22}, k_{1n}, k_{2n}, $\varkappa_{1n}$, $\varkappa_{2n}$, $\varkappa_{1g}$, $\varkappa_{2g}$, m_1, m_2. Sind diese 14 Invarianten der Stelle (u, v) bekannt und sind ferner das zu (u, v) gehörige Soma X und die Haupterzeugenden H_{I} und H_{II} des begleitenden Zylindroids der Stelle (u, v) gegeben, so ist zunächst durch die Formel (16) das begleitende Zylindroid der Stelle (u, v) bestimmt. Wir greifen jetzt einen Normalschnitt (φ) der Stelle (u, v) heraus, dann ist für ihn durch die Formeln (40), (45), (46) das begleitende Dreikant an der Stelle (u, v) bestimmt, und hierauf durch die Formeln für die Steigung σ, die duale Krümmung $k+\varepsilon\varkappa$ und die Steigungsänderung $d\sigma:d\vartheta$ die Umgebung 1. und 2. Ordnung des zu (u, v) gehörigen Soma X des Normalschnittes, wobei wir uns daran erinnern müssen, daß die duale Krümmung $k+\varepsilon\varkappa$ der Quotient aus dem dualen Kontingenzwinkel und dem dualen Bogenelement[11]) des Normalschnittes ist. Da für die andern Normalschnitte der Stelle (u, v) dasselbe gilt, ist die Umgebung 1. und 2. Ordnung des Soma X der Kongruenz festgelegt. Die genannte Umgebung ist durch die 14 Invarianten der Stelle (u, v) kinematisch gekennzeichnet d. h. gekennzeichnet hinsichtlich der G_{12} der eigentlich orthogonalen Somentransformationen[12]). Wir haben dabei vorausgesetzt, daß (u, v) eine Stelle erster Art und nicht isotrop ist.

12) Über diese Gruppe vergl. Geometrie der Dynamen S. 584.

Digitized by Google

2. Es liege eine Kongruenzstelle (u, v) zweiter Art vor: $k \equiv 0$, $\varepsilon \not\equiv 0$ (§ 3). Wir setzen wieder voraus, die Stelle sei nicht isotrop. Jetzt sind zur kinematischen Festlegung der Umgebung 1. und 2. Ordnung der Stelle (u, v) 5 Formeln nötig. Die Formeln für das begleitende Zylindroid, für σ und $d\sigma : d\theta$ bleiben ungeändert. Neu hinzu treten 2 Formeln, die aus (41) abgeleitet werden können. Wir haben somit folgende 5 Formeln:

$$(48)\quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\varphi, \quad \sigma = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi, \\ \dfrac{d\sigma}{d\theta} = \sigma_{11}\cos^3\varphi + (2\sigma_{12} + \varkappa_{1g})\cos^2\varphi \sin\varphi \\ \qquad\qquad + (2\sigma_{21} - \varkappa_{2\mathfrak{z}})\cos\varphi \sin^2\varphi + \sigma_{22}\sin^3\varphi, \\ \varkappa\cos\omega = \varkappa_{1g}\cos^3\varphi + (2\sigma_{21} - \sigma_{11})\cos^2\varphi \sin\varphi \\ \qquad\qquad + (\sigma_{22} - 2\sigma_{12})\cos\varphi \sin^2\varphi + \varkappa_{2\mathfrak{z}}\sin^3\varphi, \\ \varkappa\sin\omega = \varkappa_{1n}\cos^2\varphi + 2m_2\cos\varphi\sin\varphi + \varkappa_{2n}\sin^2\varphi. \end{cases}$$

In den Formeln treten 11 Invarianten der Stelle (u, v) auf: σ_1, σ_2, σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22}, $\varkappa_{1n}$, $\varkappa_{2n}$, $\varkappa_{1g}$, $\varkappa_{2g}$, m_2. Die Umgebung 1. und 2. Ordnung einer nichtisotropen Kongruenzstelle zweiter Art ist durch die genannten 11 Invarianten der Stelle kinematisch gekennzeichnet.

3. Wir betrachten eine Kongruenzstelle (u, v) dritter Art: $k + \varepsilon\varkappa \equiv 0$ (§ 3). Die Stelle sei nicht isotrop. Der bei den Stellen zweiter Art auftretende Winkel ω wird jetzt unbestimmt. Zur kinematischen Festlegung der Umgebung 1. und 2. Ordnung der Stelle (u, v) sind 3 Formeln erforderlich:

$$(49)\quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\varphi, \quad \sigma = \sigma_1\cos^2\varphi + \sigma_2\sin^2\varphi, \\ \dfrac{d\sigma}{d\theta} = \sigma_{11}\cos\varphi + \sigma_{22}\sin\varphi. \end{cases}$$

Die Umgebung 1. und 2. Ordnung einer nichtisotropen Kongruenzstelle dritter Art ist durch die 4 Invarianten σ_1, σ_2, σ_{11}, σ_{22} der Stelle kinematisch gekennzeichnet.

Aus dem Vorausgegangenen erkennt man, daß für eine nichtisotrope Kongruenzstelle, einerlei ob sie eine Stelle erster, zweiter oder dritter Art ist, folgender Satz gilt:

Satz 6. Die Umgebung 1. und 2. Ordnung einer nichtisotropen Kongruenzstelle ist durch die zu der Stelle gehörigen 14 Invarianten σ_1, σ_2, σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22}, k_{1n}, k_{2n}, $\varkappa_{1n}$, $\varkappa_{2n}$, $\varkappa_{1g}$, $\varkappa_{2g}$, m_1, m_2 *kinematisch gekennzeichnet.*

Digitized by Google

Die Durchschlagskraft eines schwach gekrümmten Balkens*).

Von K. Marguerre in Berlin-Adlershof.

1. *Einleitung.*

In der Stabilitätstheorie hat man es mit zwei Klassen von Problemen zu tun: *Verzweigungs*problemen und *Durchschlag*problemen.

Bei beiden Problemen handelt es sich um die Bestimmung gewisser ausgezeichneter Lasten: derjenigen Werte der äußeren Last, bei denen nicht nur eine, sondern mehrere Gleichgewichtslagen möglich sind, bei den Verzweigungs-, derjenigen Lastwerte, bei denen eine Weiterverschiebung des Lastangriffspunktes ohne Lastanstieg eintreten kann, bei den Durchschlagproblemen. — Verfolgt man die beiden Probleme an Hand ihrer Differentialgleichungen, so besteht im ersten Fall die Aufgabe darin, zu einer (der Gestalt nach) bekannten *ersten* Gleichgewichtslage die unendlich benachbarte *zweite* zu finden — wobei die ausgezeichneten Lasten sich als die Wurzeln eines *Eigenwert*problemes ergeben; im zweiten Fall darin, einen *nicht-linearen* Zusammenhang zwischen Kraft und Verzerrung zu bestimmen — welche Aufgabe im allgemeinsten Fall auch auf *nicht-lineare* Differentialgleichungen führt[1]).

Trotz der Verschiedenheit dieser mathematischen Fragestellung gehören die Probleme mechanisch eng zusammen. Sie sind beide Stabilitätsprobleme[2]); denn beidemal handelt es sich um die Bestimmung „kritischer" Lasten (unter deren Wirkung sich das Verhalten des elastischen Systems grundlegend ändert), — und diese Lastwerte lassen sich *energetisch* vermöge *ein und desselben* Kriteriums bestimmen.

Wir bezeichnen mit A_i das Potential der inneren Kräfte (die Formänderungsenergie) mit V das der äußeren (Kraft $\times$ Verschiebung des Kraftangriffspunktes) mit Π ihre Summe (die potentielle

*) Vorgetragen in der 334. Sitzung am 26. Januar 1938.

1) s. z. B. C. B. Biezeno, Über die Bestimmung der Durchschlagkraft einer schwach gekrümmten kreisförmigen Platte. ZAMM 15 (1935) S. 13.

2) Wir weichen mit dieser Bezeichnungsweise von dem vielfach anzutreffenden Brauch ab (s. z. B. Hdb. der Physik Bd. VI, S. 277 ff., oder neuerdings E. Chwalla, Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen, Bau-Ing. 1937, S. 69), den *einen* Typus, die Verzweigungsprobleme, schlechthin Stabilitätsprobleme zu nennen.

Digitized by Google

Energie). Eine Gleichgewichtslage ist gekennzeichnet durch die Forderung [3])

$$\delta \Pi(u, v, w) = 0, \tag{1.1}$$

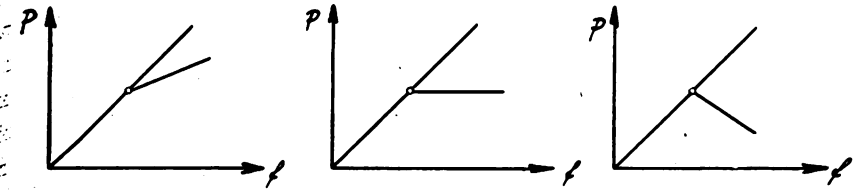
und diese Gleichgewichtslage ist *stabil*, wenn für sie die Bedingung

$$\delta^2 \Pi > 0 \text{ für } \textit{alle } \delta u, \delta v, \delta w \tag{1.2}$$

erfüllt ist. Dabei sind u, v, w die elastischen Verschiebungen, $\delta \Pi$ und $\delta^2 \Pi$ erste und zweite Variation der potentiellen Energie nach diesen Verschiebungen, d. h. diejenigen Ausdrücke, die bei der Entwicklung der variierten Energie

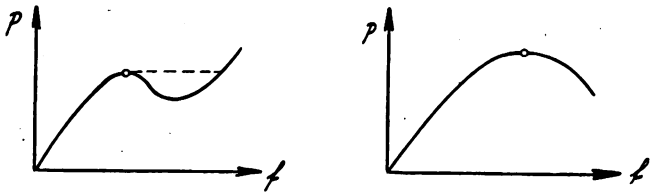
$$\Pi(u + \delta u, \quad v + \delta v, \quad w + \delta w)$$

in den Zusatzverschiebungen δu, δv, δw von der ersten bzw. zweiten Ordnung sind.



a) Seitlich geführte Platte unter Längsdruck — b) Stab unter Längsdruck — c) Bogen unter Querlast

Abb. 1. Verzweigung des elastischen Gleichgewichts.



a) Schwach gekrümmter Balken unter Querlast — b) 1. Dünnwandiges Rohr unter Biegung [4]) 2. Plastische Knickbiegung

Abb. 2. Durchschlagen (P Kraft, f Verschiebung des Kraftangriffs).

Das System verliert seine Stabilität, wenn

$$\delta^2 \Pi = 0 \tag{1.3}$$

wird. Diejenigen Lastwerte, unter denen (1.3) eintreten kann, sind die „kritischen" Werte, und Aufgabe einer *Stabilitäts*theorie

3) Hdb. der Physik Bd. VI, S. 72.

4) L. G. Brazier, The flexure ... Aeron. Res. Comm. Rep. a. Mem. 1081 (1927); O. S. Heck, Über die Stabilität orthotroper Zylinderschalen ... Luftf. Forschg. 14, S. 137 (1937). — Ein nahe verwandtes Durchschlagproblem bei E. Weinel: Stabilität doppelt gekrümmter Platten .... ZAMM 1937, S. 364.

Digitized by Google

ist es, die zugehörigen Gleichgewichtszustände zu untersuchen — gleichgültig, ob bei weiterem Lastanstieg zunächst nur *ein* instabiler Zustand (s. Abb. 2) oder *mehrere* instabile (Abb. 1 c) (bzw. z. T. stabile, Abb. 1 a) Zustände möglich sind. Jeder kritische Gleichgewichtszustand erfüllt also die Doppelbedingung:

$$\delta \Pi = 0, \quad \delta^2 \Pi = 0. \tag{1.4}$$

Es mag nicht unnütz sein hervorzuheben, daß die beiden Zeichen „$= 0$“ in (1.4) einen durchaus verschiedenen Sinn haben: Die erste Bedingung fordert, daß $\delta \Pi$ verschwinden soll für *jede* denkbare Variation δu, δv, δw; die zweite, daß $\delta^2 \Pi$ Null wird für *irgend ein* — ausgezeichnetes — Wertetripel δu, δv, δw. Durch die erste Bedingung wird unter den unendlich vielen geometrisch-möglichen Systemen u, v, w das mechanisch mögliche (das Kräftegleichgewicht befriedigende) herausgegriffen; durch die zweite Bedingung wird zum Ausdruck gebracht, daß es neben u, v, w noch ein (unendlich) benachbartes System $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$ gibt, das unter *denselben* äußeren Kräften möglich ist[5]).

Die folgende Untersuchung soll die Bedeutung des gemeinsamen Kriteriums (1.4) an einem einfachen Beispiel hervortreten lassen. Es wird sich zeigen, daß bei dem schwach gekrümmten Balken unter Querlast Durchschlag- und Verzweigungsproblem *stetig* ineinander übergehen, so daß eine Trennung beider Erscheinungen der mechanischen Aufgabestellung Gewalt antun müßte. — Das Energieverfahren wird also auch an dieser Stelle seinen alten Ruhm unter Beweis stellen: Zusammenhänge zu wahren zwischen Problemen, die bei Behandlung mit Hilfe der Differentialgleichungsmethode u. U. ungebührlich weit auseinander gerissen werden.

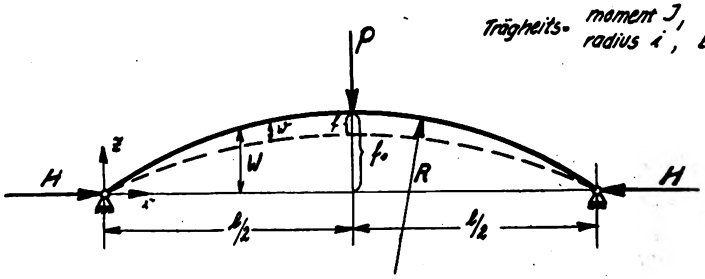


Abb. 3.

5) s. z. B. K. Marguerre, Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode. ZAMM 18 (1938) S. 64 Mitte.

Digitized by Google

2. Problemstellung; die Formänderungsenergie.

Der schwach gekrümmte Balken (s. Abb. 3) biegt sich unter der Last P durch. Da die Balkenenden nach den Seiten nicht ausweichen können, ist die Durchsenkung mit einer Verkürzung der Bogenachse verbunden, als deren Folge eine Horizontalkraft H wirksam wird. Da der Einfluß dieser (sehr großen) Horizontal*druck*kraft auf das Kräftespiel am Balkenelement nicht vernachlässigt werden darf, treten Erscheinungen auf, die mit dem Knickvorgang im Euler-Druckstab verwandt sind. Wir wollen die Aufgabe (obwohl dies durchaus möglich ist[6]) nicht „exakt", sondern nach dem Ritzschen Näherungsverfahren behandeln, weil auf diese Weise der „Mechanismus" des Vorganges, d. h. der Zusammenhang zwischen den wesentlichen Veränderlichen: Größter Vorbiegung f_0, erzwungener Gegenbiegung f_1, Last P und Horizontaldruck H besonders übersichtlich wird.

Die Formänderungsenergie. Wir bezeichnen mit u die Verschiebung in der x-Richtung, mit w die in der negativen z-Richtung, mit W die Ordinate der gekrümmten Ausgangslage des Balkens. Dann ist das Quadrat eines Linienelementes der Balkenmittellinie vor der Deformation

$$(ds)^2 = (1 + W_x^2)\,dx^2, \tag{2.1}$$

nach der Deformation

$$(ds)^2 = [(1 + u_x)^2 + (W_x - w_x)^2]\,dx^2, \tag{2.2}$$

[Index bedeutet Ableitung nach x] und unter der Voraussetzung, daß die Ausgangsordinate W und die elastische Verschiebung w unter einander von gleicher Größenordnung, aber beide klein gegen die Balkenlänge sind, wird die Verzerrung (Dehnung) der Balkenmittellinie:

$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \sqrt{\frac{(1+u_x)^2 + (W_x - w_x)^2}{1 + W_x^2}} - 1 \approx u_x + \frac{w_x^2}{2} - W_x w_x. \tag{2.3}$$

Machen wir die übliche Voraussetzung, daß die Energie der Biegung mit hinreichender Genauigkeit ausgedrückt werden kann durch eine Größe, die dem Quadrat der Krümmung w_{xx} propor-

6) s. C. B. Biezeno, Über eine Stabilitätsfrage beim gelenkig gelagerten schwach gekrümmten Stab. (Kon. Akad. van Wetenschappen te Amstadam, Proc. Vol. XXXII N. 7 1929).

bzw. neuerdings: ZAMM 1938 S. 21. Bei B. sind Sehnen- bzw. Bogenlänge und Last mit $2l$, $2L$ und $2P$ bezeichnet.

Digitized by Google

tional ist, so lautet die Formänderungsenergie (Arbeit der inneren Kräfte):

$$(2.4)\quad A_i = \frac{EF}{2}\int_0^l \left\{\left(u_x + \frac{w_x^2}{2} - W_x w_x\right)^2 + i^2 w_{xx}^2\right\} dx \quad (i = \text{Trägheitsradius})$$

Bezeichnet $f_1 = w(l/2)$ die Verschiebung des Angriffspunktes der Last P, so ist daher das Gesamtpotential gegeben durch

$$(2.5)\quad \Pi = \frac{EF}{2}\int_0^l \left\{\left(u_x + \frac{w_x^2}{2} - W_x w_x\right)^2 + i^2 w_{xx}^2\right\} dx - P f_1,$$

und aus der Forderung des Prinzips der virtuellen Verrückungen

$$(2.6)\quad \delta \Pi = 0$$

erhalten wir nach den Regeln der Variationsrechnung die beiden Differentialgleichungen für die Verschiebungen u und w.

3. Bestimmung der Gleichgewichtslagen.

Wir bilden

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \Pi}{\partial w}\delta w$$

und finden:

$$(3.0)\quad \delta \Pi = EF\int_0^l \left\{\left(u_x + \frac{w_x^2}{2} - W_x w_x\right)\delta u_x\right\} dx$$
$$+ EF\int_0^l \left\{\left(u_x + \frac{w_x^2}{2} - W_x w_x\right)(w_x - W_x)\,\delta w_x + i^2 w_{xx}\,\delta w_{xx}\right\} dx$$
$$- P\,\delta w(l/2).$$

Betrachten wir zunächst die erste Zeile (Variation nach u), die uns die Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte in der x-Richtung — ausgedrückt in den Verschiebungen — liefern muß. Durch Teilintegration erhalten wir

$$\left(u_x + \frac{w_x^2}{2} - W_x w_x\right)\delta u\Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left[u_x + \frac{w_x^2}{2} - W_x w_x\right]\delta u\, dx = 0;$$

der ausintegrierte Term verschwindet, da wir rechts und links starre Widerlager ($u = \delta u = 0$) haben. Die Forderung, daß das Integral für jede Variation (virtuelle Verrückung) δu verschwinden soll, führt auf die Differentialgleichung

Digitized by Google

$$3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[u_x + \dfrac{w_x^2}{2} - W_x w_x\right] = 0, \\ \text{oder } \left[u_x + \dfrac{w_x^2}{2} - W_x w_x\right] = \text{const.} = -\dfrac{H}{EF}, \end{cases}$$

aus der sich durch nochmalige Integration unter Beachtung von $u(l) = u(0) = 0$ ergibt:

$$3.2)\quad \frac{H}{EF} = \frac{1}{l}\int_0^l \left(W_x w_x - \frac{w_x^2}{2}\right) dx.$$

Gl. (3.1) sagt mechanisch nichts anderes aus, als die Gleichgewichtsforderung, daß die Horizontalkraft sich längs x nicht ändern darf.

Die zweite Zeile in (3.0) (Variation nach w) lautet bei Benutzung der Beziehung (3.1)

$$EF\int_0^l \left[-\frac{H}{EF}(w_x - W_x)\,\delta w_x + i^2\,\delta w_{xx}\right] dx - P\,\delta w(l/2) = 0,$$

was sich durch Teilintegration in

$$\left[-H\,\delta w\,(w_x - W_x) + EJ\,(w_{xx}\,\delta w_x - w_{xxx}\,\delta w)\right]_0^l$$
$$+\int_0^l [H(w_{xx} - W_{xx}) + EJ\,w_{xxxx}]\,\delta w - P\,\delta w(l/2) = 0$$

umformen läßt. Die ausintegrierten Teile fallen an den eigentlichen Rändern ($x = 0,\ l$) weg, da δw und w_{xx} verschwinden. In der Mitte ($x = l/2$) ergibt sich

$$P = H(W_x - w_x) - EJ\,w_{xxx}\Big|_{l/2+0}^{l/2-0},$$

bzw. da die ersten Ableitungen W_x und w_x bei $x = l/2$ nicht springen, einfach das aus der Balkentheorie wohlbekannte Ergebnis

$$(3.3)\quad P = EJ\,w_{xxx}\Big|_{l/2-0}^{l/2+0}$$

Die (gebietsweise für $0 \leqq x \leqq l/2,\ l/2 \leqq x \leqq l$ gültige) Differentialgleichung lautet:

$$(3.4)\quad EJ\,w_{xxxx} + H w_{xx} = H\,W_{xx}.$$

Die Bestimmung einer Lösung dieser Differentialgleichung, die zugleich der Übergangsbedingung (3.3) genügt, macht grundsätzlich keinerlei Schwierigkeit [7]). Die Rechnung wird aber sehr viel *über-*

7) s. Anm. 6. — Die enge Verwandtschaft zwischen unserem Durchschlag-

Digitized by Google

sichtlicher[8]), wenn wir auf die exakte Erfüllung von (1.1) verzichten, und anstelle der Bedingung $\delta \Pi = 0$ für *jede* Variation δw, nur *gewisse* Variationen zulassen — m. a. W. das Ritzsche Verfahren anwenden.

Da u und w unabhängige Veränderliche sind, läge es nahe, für beide Größen voneinander unabhängige Ritz-Ansätze einzuführen. Es leuchtet ein, daß wir zweckmäßiger die Willkür auf die Wahl *einer* Veränderlichen beschränken, indem wir (was hier leicht möglich ist), eine der Bedingungsgleichungen zwischen den Veränderlichen vollkommen befriedigen. Wir wollen daher (wovon wir übrigens bei der Herleitung der Gl. (3.4) schon Gebrauch gemacht haben) die Beziehungen (3.1) und (3.2) dazu verwenden, u bzw. H — nachdem die Annahme über w einmal getroffen ist — „exakt" zu bestimmen.

Für w selbst wählen wir den allen Randbedingungen bei $x = 0$, $x = l$ (nicht aber der Bedingung 3.3) genügenden Ritz-Ansatz:

$$w = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \tag{3.5}$$

Als Ausgangslage (deren genaue Kenntnis in den hier interessierenden Fall geringer Krümmung unwesentlich ist) nehmen wir[9]) ebenfalls eine Sinuslinie an:

$$W = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}; \tag{3.5'}$$

dann erhalten wir für die Integrale (3.2)

$$\frac{H}{EF} = \frac{1}{l} \int_0^l \left(W_x w_x - \frac{w_x^2}{2} \right) dx = \frac{\pi^2}{4 l^2} (2 f_1 f_0 - f_1^2) \tag{3.6}$$

und für (2.5) — unter Beachtung von (3.1) —:

problem und dem Eulerschen Verzweigungsproblem wird übrigens aus Gl. (3.4) ganz deutlich. Denn die als Koeffizient von w_{xx} auftretende Horizontaldruckkraft H ist in beiden Fällen zunächst *unbekannt*; die Gleichung ist daher (wenn auch H „nur" eine Konstante ist) *in den beiden Unbekannten* w und H nichtlinear; die Größe H bestimmt sich allerdings in unserem Falle „nachträglich" ohne Schwierigkeit, da $w(x)$ der Gestalt nach angegeben werden kann. — Die Bedingung, mit deren Hilfe diese Bestimmung vorgenommen wird, ist in beiden Fällen eine Randbedingung, beim Eulerstab die bekannte Eigenwertbeziehung $\sin l\sqrt{H/EJ} = 0$, in unserem Fall die Beziehung (3.2), durch die zum Ausdruck gebracht wird, daß die Endpunkte seitlich unverschieblich gelagert sein sollen.

8) und bleibt, wie der Vergleich mit den exakten Werten der Biezenoschen Rechnung zeigt, hinreichend genau,

9) im Gegensatz zu Biezeno, der von der Parabel ausgeht,

Digitized by Google

$$\Pi = EFl\left\{\frac{\pi^4}{8l^4}\left[f_0 f_1 - \frac{f_1^2}{2}\right]^2 + \frac{\pi^4 i^2}{4l^4} f_1^2\right\} - P f_1.$$

führen wir durch

3.7) $$\lambda_0 = \frac{f_0}{i}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1}{i}$$

limensionslose Parameter ein, so ergibt sich

3.8) mit $$p = \frac{1}{\lambda_0}\frac{4l^3}{\pi^4 i^3}\frac{P}{EF} = \frac{4l}{\pi^2 f_0}\frac{P}{H^*}, \quad H^* = \frac{EJ\pi^2}{l^2}$$

ür die bezogene potentielle Energie

$$\hat{\Pi} = \frac{4l^4}{\pi^4 i^4}\frac{\Pi}{EFl} = \lambda_1^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda_0\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right)^2 - p\lambda_0\lambda_1.$$

Die Gleichgewichtslage ist gekennzeichnet durch

3.9) $$\left\{\begin{array}{c} \partial\hat{\Pi}/\partial\lambda_1 = 0 \\ \text{d. h. } \left(\lambda_0\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right)(\lambda_0 - \lambda_1) + 2\lambda_1 - p\lambda_0 = 0. \end{array}\right.$$

4. *Die Durchschlagskraft.*

(3.9) ist in der Unbekannten λ_1 vom dritten Grade: Es kann also bei eindeutig gegebenen λ_0 und P *mehrere* Wurzeln λ_1, d. h. mehrere Gleichgewichtslagen geben. Über die Stabilität dieser Gleichgewichtslagen entscheidet die zweite Variation

(4.1) $$\delta^2\Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\lambda_1^2}\delta\lambda_1^2 = \left[2 + (\lambda_0 - \lambda_1)^2 - \left(\lambda_0\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right)\right]\delta\lambda_1^2.$$

Für hinreichend kleine Werte λ_1 ist dieser Ausdruck sicher >0: die zugehörige Gleichgewichtslage ist (wenigstens solange unsere Voraussetzung gültig bleibt, daß $\delta w = \delta f_1 \sin\frac{\pi x}{l}$ die einzige mögliche virtuelle Verrückung darstellt) stabil. Der Vorzeichenwechsel tritt ein, wenn λ_1 der Gleichung

(4.2) $$(\lambda_0 - \lambda_1)^2 - \left(\lambda_0\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right) + 2 = 0,$$

d. h.

(4.3) $$\lambda_1 = \lambda_0 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda_0^2 - 4},$$

bzw. genauer (da wir ja zunächst die *kleinere* Wurzel suchen)

(4.4) $$\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda_0^2 - 4}$$

Digitized by Google

genügt. Diese Nullstelle ist reell nur für $\lambda_0 > 2$, d. h.

$$f_0 > 2i; \tag{4.5}$$

eine Instabilität kann also nur auftreten, wenn der Biegepfeil der Ausgangslage mindestens doppelt so groß ist, wie der Trägheitshalbmesser des Stabes [10]).

In Abb. 4 ist P als Funktion von λ_1 (Parameter λ_0) nach Gl. (3.9) aufgetragen. Man sieht, daß die Bedingung (4.2) (Verschwinden der zweiten Variation) identisch ist mit der Forderung

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_1} = 0 \tag{4.6}$$

d. h., daß (wie eingangs erwähnt) die Instabilitätsstelle durch die Möglichkeit eines Anwachsens der Verschiebung f_1 unter *konstant bleibender* Last gekennzeichnet ist. Man erkennt auch, daß oberhalb des kritischen Wertes von λ_1 die zweite Variation ihr Zeichen wechselt:

$$\delta^2 \Pi < 0 \quad \text{für} \quad \lambda_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda_0^2 - 4} < \lambda_1 < \lambda_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda_0^2 - 4}, \tag{4.7}$$

d. h. daß es einen Bereich gibt, in dem zu wachsender Durchsenkung eine fallende Last gehört.

Eliminieren wir λ_1 aus (4.4) und (3.9), so erhalten wir die Durchschlagskraft in Abhängigkeit von λ_0 (s. Abb. 6):

$$P_{kr} = H^* \cdot \frac{\pi^2}{4} \frac{f_0}{l}\left[2 + \frac{1}{\lambda_0}\left(\sqrt{\frac{\lambda_0^2 - 4}{3}}\right)^3\right]. \tag{4.8}$$

5. *Unsymmetrische Verformung des Balkens.*

Das Ergebnis (4.8) wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Verformung w die durch den Ritz-Ansatz (3.5) gekennzeichnete Gestalt hat. Nun ist sicher, daß für sehr kleine Lasten die wahre Gestalt der Durchbiegelinie von der Form (3.5) nicht allzuweit abweichen kann. Und außerdem wissen wir, daß in dem Bereich (4.7) der Zustand sicher *instabil* ist, denn wir können „eine" virtuelle Verrückung

$$\delta w = \delta f_1 \sin \frac{\pi x}{l} \tag{5.0}$$

10) Beim Rechteckbalken von der Höhe h würde das heißen: $f_0 \geqq \frac{h}{\sqrt{3}}$; die Bedingung ist für einen „krummen" Stab praktisch immer erfüllt.

Digitized by Google

ngeben, die dort $\delta^2 \Pi < 0$ macht. Daß aber umgekehrt *bis zu der Stelle* (4.4) hin Stabilität herrschen muß, können wir aus der Tatsache $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda_1^2} > 0$ nicht folgern; denn die Stabilitätsbedingung fordert,

(5.1) $$\delta^2 \Pi > 0 \quad \text{für } \textit{alle} \text{ denkbaren } \delta w,$$

nicht nur für die spezielle Variation (5.0).

In der Tat ist der Ansatz (3.5), wegen der ihm zugrundeliegenden Voraussetzung der Symmetrie zur Stabmitte, *wesentlich* unvollständig. Wir müssen die Betrachtung mit dem erweiterten Ansatz

(5.2) $$w = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

noch einmal durchführen. Und wir werden finden, daß oberhalb einer gewissen Schranke die Durchschlagskraft nicht mehr durch (4.8) gegeben ist, weil schon *vor* Erreichen von (4.4) die *Minimum*-Bedingung für Π (5.1) verletzt ist.

Mit $\lambda_2 = f_2/i$ ergibt sich aus (3.2) und (2.5):

(5.3) $$H/EF = \frac{\pi^2 i^2}{4 l^2}(2\lambda_0\lambda_1 - \lambda_1^2 - 4\lambda_2^2),$$

(5.4) $$\hat{\Pi} = \lambda_1^2 + 16\lambda_2^2 + \frac{1}{2}\left[\lambda_0\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2} - 2\lambda_2^2\right]^2 - p\lambda_0\lambda_1.$$

λ_1 und λ_2 bestimmen sich bei gegebener Last P und gegebener Vorbiegung λ_0 aus den beiden Gleichungen

(5.5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1} \equiv 2\lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1)\left[\lambda_0\lambda_1 - \dfrac{\lambda_1^2}{2} - 2\lambda_2^2\right] - p\lambda_0 = 0, \\ \dfrac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \lambda_2} \equiv 32\lambda_2 - 4\lambda_2\left[\lambda_0\lambda_1 - \dfrac{\lambda_1^2}{2} - 2\lambda_2^2\right] = 0. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem zerfällt in die beiden Gleichungspaare

(5.6) $$\begin{cases} \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1)\left(\lambda_0\lambda_1 - \dfrac{\lambda_1^2}{2}\right) = p\lambda_0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda_2^2 = \lambda_0\lambda_1 - \dfrac{\lambda_1^2}{2} - 8, \\ 8\lambda_0 - 6\lambda_1 = p\lambda_0, \end{cases}$$

zu denen nach (3.2) die folgenden Werte der Längsdruckkraft gehören

(5.7) $$H = H^* \cdot \frac{1}{2}\left(\lambda_1\lambda_0 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right), \quad H = H^* \cdot \frac{1}{2}\left(\lambda_1\lambda_0 - \frac{\lambda_1^2}{2} - 2\lambda_2^2\right) = 4H^*.$$

Das erste Lösungssystem zeigt, daß die Erweiterung (5.2) keine „Verfeinerung" für den Ritz-Ansatz (3.5) bedeutet: Dem Werte

Digitized by Google

$\lambda_2 = 0$ entspricht nach wie vor exakt eine Gleichgewichtslage. Aber aus der Existenz eines zweiten Lösungssystems geht hervor, daß der Balken neben dem zuerst diskutierten unter Umständen noch ein grundsätzlich anderes Verhalten aufweisen kann.

Wir betrachten das in (5.6) enthaltene Ergebnis näher. Das Auftreten reeller Wurzeln $\lambda_2 \neq 0$ ist gebunden an die Voraussetzung

$$\lambda_0 \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2} \geqq 8; \tag{5.8}$$

es muß also $\lambda_0 \geqq 4$ sein, damit die Gerade $p = 8 - 6\lambda_1/\lambda_0$ überhaupt einen reellen Punkt haben kann. — In Abb. 4 sind diese Geraden eingezeichnet; sie schneiden die (dem ersten System (5.6) zugehörigen) $p(\lambda_1, \lambda_2)$-Kurven in drei Punkten. Die Schnittgleichung lautet

$$(\lambda_0 - \lambda_1)\left(\lambda_0 \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right) = 8(\lambda_0 - \lambda_1);$$

sie hat die drei Wurzeln

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \sqrt{\lambda_0^2 - 16}, \quad \lambda_1 = \lambda_0, \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 - 16}, \tag{5.9}$$

die für $\lambda \geqq 4$ alle drei reell sind.

6. *Das Durchschlagen des Balkens infolge der unsymmetrischen Verformung.*

Über den mechanischen Sinn der verschiedenen $p(\lambda_1 \lambda_0)$-Kurven gibt die zweite Variation $\delta^2 \Pi$ Auskunft. Wir erhalten sie am einfachsten unter Benutzung des Taylorschen Satzes. Es ist

$$\delta^2 \hat{\Pi} = \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1^2} \delta \lambda_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \delta \lambda_1 \delta \lambda_2 + \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_2^2} \delta \lambda_2^2;$$

$$\text{(6.0)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1^2} = 2 + (\lambda_0 - \lambda_1)^2 - \left(\lambda_0 \lambda_1 - \dfrac{\lambda_1^2}{2}\right) + 2\lambda_2^2, \\ \dfrac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = -4\lambda_2(\lambda_0 - \lambda_1), \\ \dfrac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_2^2} = 4\left\{8 - \left[\lambda_0 \lambda_1 - \dfrac{\lambda_1^2}{2} - 2\lambda_2^2\right] + 4\lambda_2^2\right\}. \end{cases}$$

Eine Gleichgewichtslage ist stabil, solange die für ein Minimum notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_2^2} > 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1^2} \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}\right)^2 > 0$$

Digitized by Google

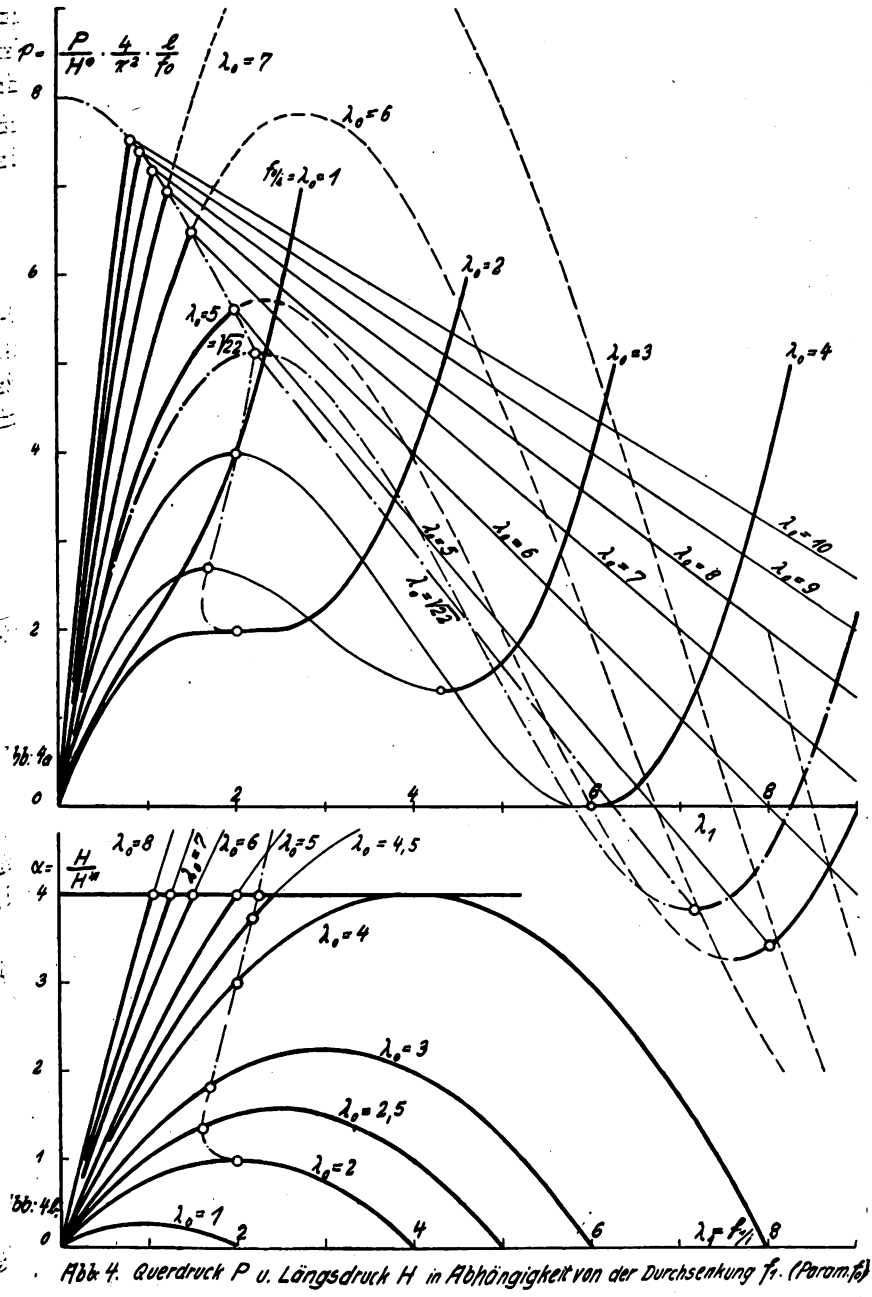


Abb. 4. Querdruck P u. Längsdruck H in Abhängigkeit von der Durchsenkung f_1. (Param. f_0)

Digitized by Google

erfüllt sind. Führen wir die obere der, das Gleichgewicht kennzeichnenden, Beziehungen (5.6) für λ_2 in (6.0) ein, so kommt:

$$(6.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1^2} = 2+(\lambda_0-\lambda_1)^2-\left(\lambda_0\lambda_1-\dfrac{\lambda_1^2}{2}\right) & = (\lambda_0-\lambda_1)^2-6 \\ \dfrac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = 0 & = -4\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1) \\ \dfrac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \lambda_2^2} = 4\left\{8-\left(\lambda_0\lambda_1-\dfrac{\lambda_1^2}{2}\right)\right\} & = 16\lambda_2^2 = 8\left[\lambda_0\lambda_1-\dfrac{\lambda_1^2}{2}-8\right] \end{cases}$$

und für die Diskriminante Δ ergibt sich (6.2)

$$4\left\{8-\left(\lambda_0\lambda_1-\frac{\lambda_1^2}{2}\right)\right\}\left\{2+(\lambda_0-\lambda_1)^2-\left(\lambda_0\lambda_1-\frac{\lambda_1^2}{2}\right)\right\} \quad \Big| \quad -48\left[\lambda_0\lambda_1-\frac{\lambda_1^2}{2}-8\right].$$

Man erkennt, daß die Durchbiegeform $\lambda_2 \neq 0$ (s. Gl. 5.8) auf alle Fälle instabil ist, ferner daß die symmetrische Durchbiegeform ($\lambda_2 = 0$) ihre Stabilität verliert,

entweder, wenn

$$2+(\lambda_0-\lambda_1)^2-\left(\lambda_0\lambda_1-\frac{\lambda_1^2}{2}\right) = 0,$$

$$(6.3)\qquad \text{d. h.}\quad \lambda_1 = \lambda_0-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda_0^2-4},$$

oder, wenn

$$8-\left(\lambda_0\lambda_1-\frac{\lambda_1^2}{2}\right) = 0,$$

$$(6.4)\qquad \text{d. h.}\quad \lambda_1 = \lambda_0-\sqrt{\lambda_0^2-16}$$

wird. — Von der Nullstelle (6.3) konnten wir oben zeigen, daß sie identisch ist mit der Maximumbedingung $\dfrac{\partial P}{\partial \lambda_1} = 0$. Die Nullstelle (6.4) dagegen fällt zusammen mit dem ersten Schnittpunkte der beiden $p(\lambda_0\lambda_1)$-Kurven (5.9). Bei dem *kleineren* dieser beiden λ_1-Werte verliert das System seine Stabilität.

Die beiden Ausdrücke (6.3) und (6.4) ergeben den *gleichen* λ_1-Wert bei

$$(6.5)\qquad \begin{cases} \lambda_0-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda_0^2-4} = \lambda_0-\sqrt{\lambda_0^2-16}, \\ \text{d. h. für} \qquad \lambda_0^2 = 22. \end{cases}$$

Oberhalb $\lambda_0 = \sqrt{22}$ wird also die nach (4.8) errechnete Durchschlagskraft *nicht* mehr erreicht, weil der Stab durch zweibogiges Ausknicken einer weiteren Lastaufnahme auszuweichen vermag.

Digitized by Google

Setzen wir λ_1 nach (6.3) bzw. (6.4) in die unteren Gln. (5.6) ein, so erhalten wir für die Durchschlagskraft in Abhängigkeit von λ_0:

$$(6.6)\quad \begin{cases} P_{kr} = H^* \dfrac{\pi^2}{4} \dfrac{f_0}{l} \left[2 + \dfrac{1}{\lambda_0} \left(\sqrt{\dfrac{\lambda_0^2 - 4}{3}}\right)^3\right] & \text{für } \lambda_0 < \lambda_0 \leqq \sqrt{22}, \\ P_{kr} = H^* \dfrac{\pi^2}{4} \dfrac{f_0}{l} \left[2 + \dfrac{6}{\lambda_0} \sqrt{\lambda_0^2 - 16}\right] & \text{für } \lambda_0 \geqq \sqrt{22}\ ^{11}). \end{cases}$$

Die physikalische Erklärung für das Auftreten des zweibogigen Ausweichens geben uns die Gleichungen (5.7). Bei

$$\frac{1}{2}\left(\lambda_0 \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right) = 4, \quad \text{d. h. } \lambda_1 = \lambda_0 - \sqrt{\lambda_0^2 - 16}$$

erreicht die Längsdruckkraft den vierfachen Betrag der ersten Euler-Kraft, d. h. die *zweite Eulerkraft*: unter ihrer Wirkung tritt das zweibogige Ausknicken ein. Die zweite Gl. (5.7) zeigt, daß infolge der Überlagerung einer antimetrischen Durchbiegefigur über die (bei kleinen Lasten zunächst vorhandene) symmetrische, der Horizontaldruck diesen Wert $4H^*$ beibehält (Abb. 4b).

In einem Punkte (6.4) findet eine regelrechte Verzweigung des Gleichgewichts statt — es ist aber bemerkenswert, daß *beide* dicht oberhalb dieses λ_1-Wertes möglichen Durchbiegungsformen (sowohl die mit einem Last*anstieg* verbundene symmetrische, wie die mit einem Last*abfall* verbundene antimetrische) instabil sind. Daher tritt physikalisch das unter dem Namen „Durchschlagen" bekannte Phänomen ein: Die Last P findet plötzlich keinen Widerstand mehr — bis der Balken (s. Abb. 5) eine neue stabile Lage gefunden hat.

Da das Durchschlagen ein dynamischer Vorgang ist, muß eine *erschöpfende* Diskussion des Durchschlagvorgangs auf *Bewegungs*gleichungen zurückgreifen. Trotzdem kann man sich das Wesentliche des Vorgangs durch eine Betrachtung des Energiespiels (Abb. 5a, b) deutlich machen. In Abb. 5a ist für $\lambda_0 = 3$ die Kurve $P(\lambda_0, \lambda_1)$, darunter in einem geeigneten Maßstab die im Stab ge-

11) Timoshenko hat in seinem neuen Buche „Elastic Stability" S. 230 das Durchschlagproblem ebenfalls mit den Ansätzen (3.5) und (3.5′) behandelt. Seine Fig. 140 entspricht der Abb. 4a, nur daß T. anstelle von λ_1 (in der hier benutzten Bezeichnung) das Verhältnis $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ als die eine Veränderliche wählt. Die T. Untersuchung geht darin weiter als die vorliegende, daß sie sich nicht von vornherein auf die Einzellast beschränkt, die Fig. 140 ist aber insofern unvollständig, als sie der Möglichkeit zweibogigen Durchschlagens keine Beachtung schenkt, also nur für $\lambda_0 \leqq \sqrt{22}$ das physikalische Verhalten des Stabes wiedergibt.

Digitized by Google

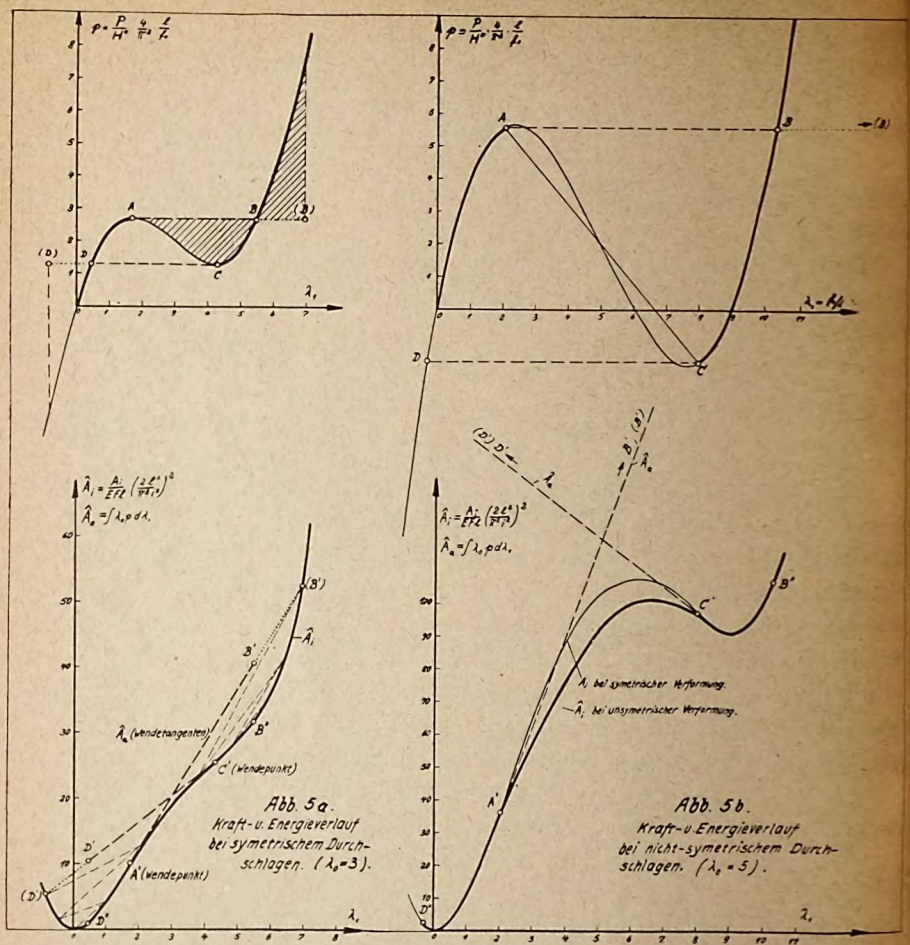


Abb. 5a.
Kraft- u. Energieverlauf bei symetrischem Durchschlagen. ($\lambda_0 = 3$).

Abb. 5b.
Kraft- u. Energieverlauf bei nicht-symetrischem Durchschlagen. ($\lambda_0 = 5$).

speicherte Formänderungsenergie A_i und die Arbeit der Last

$$A_a = \int P df_1$$

aufgetragen. Wenn der Punkt von A nach B durchschlägt, leistet die *äußere* Kraft die durch die Gerade $A'B'$ dargestellten Arbeitsbeträge; an *innerer* Energie werden die der Kurve $A'C'B''$ entsprechenden Beträge aufgenommen. Die Energiedifferenz $B'B''$ setzt sich in kinetische Energie um, die eine Weiterbewegung des Lastangriffspunktes bis zur Lage (B) bewirkt. Bei (B) kehrt die Bewegung um und es findet nun eine Schwingung um die Gleichgewichtslage B mit den beiden ungleichen Ausschlagswerten $\overline{(B)B}$ und $\overline{BA}$ statt. Ist diese Schwingung gedämpft, so ist der Energieverlauf von der Art, wie sie durch die im Zwickel $A'(B')B''$ gestrichelt-eingetragenen Kurven angedeutet ist, und der Punkt

Digitized by Google

kommt in B zur Ruhe. Lassen wir jetzt die Last abnehmen, so bewegen wir uns auf dem stabilen Kurvenast bis zum Punkte C:

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda_0^2 - 4}. \tag{6.7}$$

Dort wird die Last „von selbst" bis nach B emporgehoben, für welche Arbeit aber ein *zu großer* Betrag an innerer Energie zur Verfügung steht. (Fläche CAD). Der Überschuß setzt sich wieder in kinetische Energie um; es entsteht eine Schwingung zwischen den Extrempunkten C und (D), bis der Punkt infolge der Dämpfung in D (bzw. D'') zur Ruhe kommt. Bei dem Kreisprozeß von D bis D ist also Arbeit verloren gegangen (dem Betrage nach: $\overline{D'D''} + \overline{B'B''} = 2\overline{B'B''}$), die sich in Reibungsverluste umgesetzt hat.

Prinzipiell genau so verläuft der Vorgang im Falle $\lambda_0 = 5$ (s. Abb. 5b). Bei der Bewegung von A nach D leistet die äußere Kraft wieder mehr Arbeit (Gerade $A'B'$) als das System aufnimmt (untere Kurve $A'B''$). Es kommt wieder zu Schwingungen, die sich nach einiger Zeit in dem Punkte B (bzw. B'') beruhigen, und zwar ist die Gestalt dann wieder eine symmetrische geworden, weil oberhalb C der Längsdruck kleiner ist als $4H^*$ (s. Abb. 4b), weshalb eine antimetrische Gleichgewichtsgestalt dort nicht bestehen kann (s. a. Gl. 5.8).

Lassen wir von B (oder einem anderen Punkt der Kurve BC) aus die Kraft abnehmen, so findet bei C, d. h.

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 - 16} \tag{6.8}$$

das Zurückschlagen statt. Unterschreitet (wie in Abb. 5b) die λ_0-Kurve vorher die Achse, so ist zur Erreichung des Zurückschlageeffektes eine Kraft von entgegengesetztem Zeichen — von unten — notwendig. Da die durch den dritten Schnittpunkt der p-λ_1-Kurve mit der Abszissen-Achse gekennzeichnete (also ohne äußere Lasten mögliche) Gleichgewichtslage *nicht*, wie die Ausgangslage $\lambda_1 = 0$, frei ist von inneren Druck- und Biegespannungen, sind die „von unten" wirkenden Durchschlagskräfte dem Betrage nach kleiner, als die zu gleichen λ_0-Werten gehörenden Kräfte „von oben".

Die (in Abb. 4 dünnausgezogenen) λ_1-Bereiche zwischen der oberen und unteren Stabilitätsgrenze haben — als instabile Bereiche — bei vorgegebener *Kraft* keine mechanische Realität. Denkt man sich aber nicht die Kraft, sondern (etwa durch eine Führung) die *Lage* des Punktes $x = l/2$ erzwungen, so wird durch den

Digitized by Google

Kurvenverlauf eine mechanische Größe, die *Reaktionskraft* zwischen Führung und Balken, wiedergegeben.

In Abb. 6 sind die kritischen Werte p_{kr} wie sie sich nach (6.6) ergeben, zusammen mit den zugehörigen H-Werten (nach (5.7)) über $1/\lambda_0$ aufgetragen. Die beiden p-$\frac{1}{\lambda_0}$-Kurven schließen sich ohne Knick aneinander an.

Die $p(i/f_0)$-Kurve nach Biezeno[12]) ist unter Benutzung der Näherungsbeziehung

$$R = \frac{l^2}{8 f_0} \tag{6.9}$$

auf unsere Bezeichnungen umgerechnet und gestrichelt in Abb. 6 mit aufgenommen. Die Abweichungen sind im ganzen Verlauf nicht sehr erheblich. Im unteren Bereich ($\lambda_0 \leqq 4{,}5$) liefert unsere Theorie eine kleinere Durchschlagskraft; dies rührt her von der Verschiedenheit der Annahme über den Verlauf der Vorkrümmung (Sinus-Bogen bzw. Parabel); bei größeren Krümmungen liefert unsere Theorie zu hohe Werte, weil dort die bekannte Überschätzung der kritischen Last, die das Ritz-Verfahren kennzeichnet, spürbarer wird.

7. *Erweiterung des Ritzansatzes.*

Die Erweiterung des Ritzansatzes (5.2)

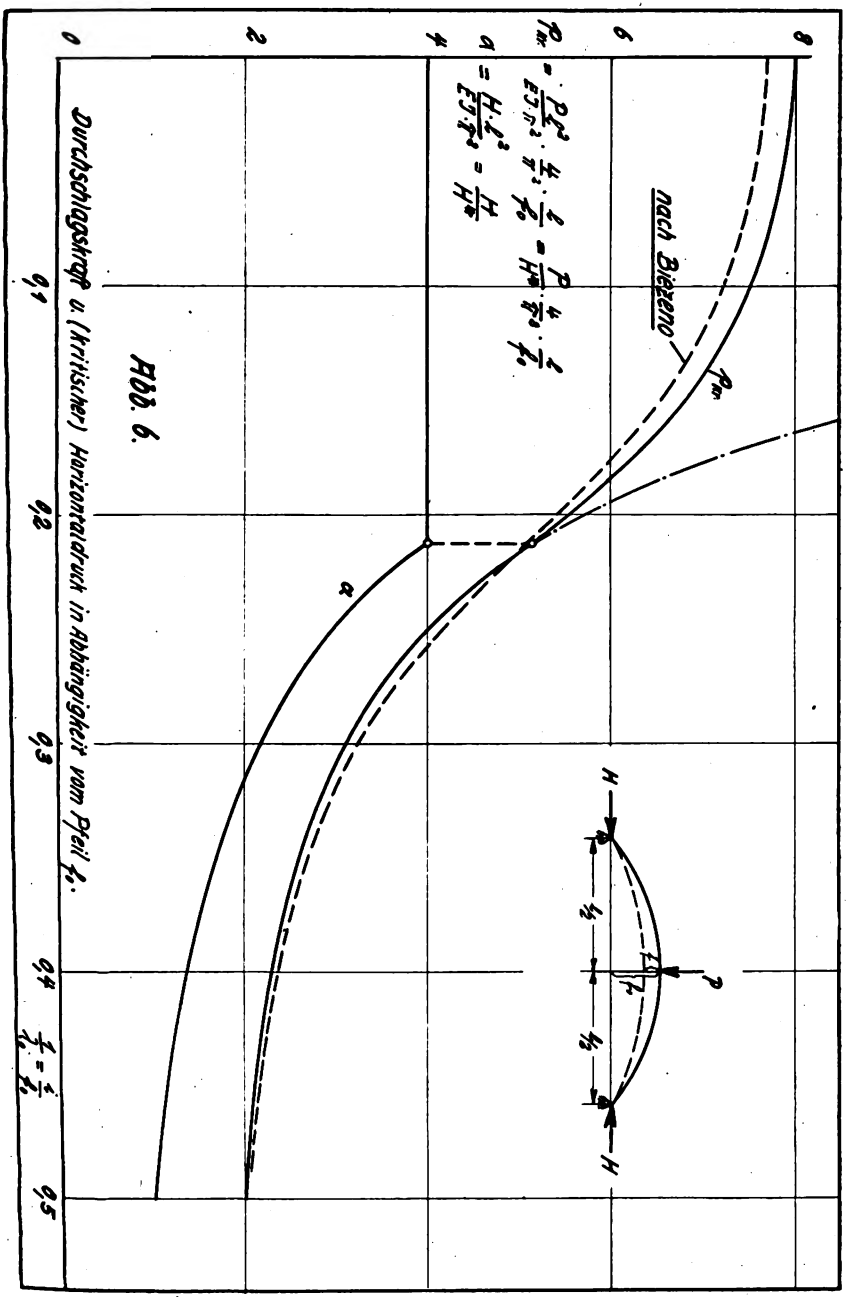
$$w(x) = \sum_1^n f_\varkappa \sin \frac{\varkappa \pi x}{l}$$

auf eine Gliederzahl $n \geqq 3$ bringt mechanisch keine neuartigen Ergebnisse.

Aus dem Bau der Gleichungen von Typ (5.5) erkennt man leicht, daß für hinreichend kleine Lasten P die Glieder mit *geradem* Index verschwinden; erst oberhalb derjenigen Last P_n, zu der als Querdruck die n-te Eulerkraft gehört, können reelle Glieder $f_n \neq 0$ auftreten. Von diesen Lasten P_n liegt aber die zu $n = 2$ gehörige am tiefsten, so daß der Balken stets in der Form $\frac{2\pi x}{l}$ ausknicken wird: die höheren Eulerdruckkräfte $n^2 \frac{EJ\pi^2}{l^2}$ werden gar nicht erreicht, d. h. die Ausbiegeformen $f_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ ($n = 4, 6, 8 \ldots$) haben keine mechanische Realität.

12) s. Anm. 6.

Digitized by Google



Die Reihenglieder mit *ungeradem* Index haben zwar von vornherein *nicht*-verschwindende Koeffizienten. Es läßt sich aber leicht abschätzen, daß diese Koeffizienten im Bereich $2 \leqq \lambda_0 \leqq \sqrt{22}$ zahlen-

Digitized by Google

mäßig sehr klein bleiben, so daß eine merkliche Verschiebung des Durchschlagspunktes (auf den Kurven Abb. 4) nicht eintritt. Erst wenn der *Querdruck* sich der 3., 5. u. s. f. Eulerlast nähert, können die Koeffizienten merkliche Beträge annehmen — diese Tatsache ist aber ohne praktische Bedeutung, weil der Stab (wenn man nicht durch eine geeignete Führung symmetrisches Durchschlagen erzwingt[13]) einer Steigerung des Querdruckes über $4H^*$ hinaus durch zweibogiges Ausknicken ausweicht.

8. *Zusammenfassung.*

Als ein Beispiel für den engen mechanischen Zusammenhang zwischen Stabilitätsproblemen erster und zweiter Art (*Verzweigung* des elastischen Gleichgewichtes, *Durchschlagen*) wird die Untersuchung der Durchschlagskraft eines schwach gekrümmten Balkens mit Hilfe der energetischen Methode durchgeführt. Für die praktische Rechnung bietet sich unmittelbar das Ritzsche Näherungsverfahren an, bei dessen Verwendung sich die von Biezeno[14]) sehr viel mühsamer gefundene P-λ_0-Kurve (Abb. 6) mit einem bemerkenswert geringen Rechenaufwand (und überdies in geschlossener Form (6.6)) ergibt. Voraussetzung der Rechnung ist eine hinreichend kleine Vorbiegung W des Balkens, so daß $\left(\frac{dW}{dx}\right)^3$ ebenso wie die elastischen Verzerrungen $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigt werden kann. Trotzdem gelten die Ergebnisse qualitativ bis zu sehr starken Vorkrümmungen hin — vor allem bleibt natürlich das *Verfahren*, die Stabilitätsgrenze mit Hilfe des Energiekriteriums (1.4) zu bestimmen, von der Größe der Vorkrümmung unberührt.

13) Diese Annahme macht Biezeno bei seiner sehr eingehenden Diskussion der Durchschlagvorgänge in der neuesten Arbeit (s. Anm. 6). Übrigens werden, auch wenn man $H > 4H^*$ zuläßt, die Verhältnisse in unserem Fall nicht so kompliziert wie bei Biezeno, weil wir als Ausgangslage $W(x)$ die Sinusform angenommen haben.

14) s. Anm. 6.

Digitized by Google

Nichtholonome Systeme höherer Art*).

Von Georg Hamel in Berlin.

Unter nichtholonomen Systemen höherer Art wollen wir solche verstehen, bei denen für die n wirklichen Lagrangeschen Koordinaten $\chi_\nu (\nu = 1, 2 \ldots n)$ eine Anzahl von Bedingungsgleichungen der Form

$$f(\ddot{\chi}, \dot{\chi}, \chi, t) = 0$$

vorgeschrieben sind. Sie brauchen nicht linear zu sein. Wir wollen uns aber hier darauf beschränken, daß die $\ddot{\chi}$ nicht vorkommen (darüber eine Bemerkung am Schluß) und daß auch t nicht explizit vorkommt. Überhaupt sei das System skleronom. Es sei also noch die kinetische Energie in der Form

$$E(\dot{\chi}, \chi)$$

gegeben und die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte

$$\delta A = \sum K_\lambda \delta \chi_\lambda .$$

Über die Aufgabe, aus diesen gegebenen Invarianten allein die Bewegungsgleichungen abzuleiten, hat Herr Leif Johnsen in neuester Zeit Abschließendes gesagt[1]). Ich möchte über diese Arbeiten hier nicht nur kurz referieren, sondern den wesentlichen Inhalt neu darstellen, um in Deutschland auf diesen leider vernachlässigten Gegenstand aufmerksam zu machen. Ich halte mich an mein Manuskript, das druckfertig vorlag, als ich durch ein sehr knappes Referat im Zentralblatt auf die drei ersten Arbeiten des Herrn Johnsen aufmerksam wurde. Eine etwas abweichende Darstellung und die Behandlung eines interessanten Sonderfalles kann der Sache nicht schaden. Ich bemerke ausdrücklich, daß

*) Vorgetragen in der 336. Sitzung am 30. März 1938.

1) Leif Johnsen: 1) Die virtuellen Verschiebungen der nichtholonomen Systeme und das d'Alembertsche Prinzip. Avh. Norske Vid. Akademie i Oslo. I. Mat. Nat. Klasse 1936. No. 10. Oslo 1937. 2) Allgemeine Quasikoordinaten, ebd. No. 11. 3) Sur la reduction au nombre minimum des équations du mouvement d'un systeme non-holonome, ebda 1937, No. 12, Oslo 1937. 4) Sur la déviation non-holonome. ebda 1938. No. 13. Oslo 1938.

Digitized by Google

hiermit keinerlei Prioritätsansprüche erhoben werden. Die Übereinstimmung erklärt sich aus der Sache und daraus, daß auch Herr Johnsen an meine alten Arbeiten anknüpft.

1. Eine erste Form der Bewegungsgleichungen.

Für ein mechanisches System sei $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor, $\mathfrak{v} \equiv \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ die Geschwindigkeit, $\mathfrak{w} \equiv \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ die Beschleunigung, $\delta\mathfrak{r}$ eine virtuelle Verschiebung.

Das Stieltjes'sche Integral $\int dm > 0$ sei die Masse eines Teiles, über den integriert wird. Es werden also sowohl kontinuierliche wie diskrete Massenverteilungen zugelassen. Dann setzt die *Lagrange'sche Zentralgleichung*

$$\int \mathfrak{w}\,\delta\mathfrak{r}\,dm \equiv \frac{d}{dt}\int \mathfrak{v}\,\delta\mathfrak{r}\,dm - \delta E \tag{1}$$

drei Invarianten in Beziehung zueinander:

$$E = \tfrac{1}{2}\int dm\, v^2$$

ist die kinetische Energie. Dabei ist

$$d\delta\mathfrak{r} - \delta d\mathfrak{r} = 0 \tag{2}$$

als Übergangsgleichung angenommen worden, was man stets darf, aber nicht muß [1]).

Ist das System von endlichem Freiheitsgrad, ist also

$$E = E(\dot{\chi}_\nu, \chi_\mu), \quad \nu = 1, 2 \ldots n, \quad \mu = 1, 2 \ldots n$$

und skleronom, d. h. kommt die Zeit nirgendwo explicit vor (eine unwesentliche Annahme) so gilt bekanntlich für die virtuelle Arbeit des Impulses, die zweite der oben genannten Invarianten,

$$\int dm\,\mathfrak{v}\,\delta\mathfrak{r} = \sum p_\nu\,\delta\chi_\nu = \sum \frac{\partial E}{\partial \dot{\chi}_\nu}\,\delta\chi_\nu \tag{3}$$

und für die erste,

$$\int dm\,\mathfrak{w}\,\delta\mathfrak{r} = \sum\left(\frac{dp_\nu}{dt} - \frac{\partial E}{\partial \chi_\nu}\right)\delta\chi_\nu. \tag{4}$$

Da aus

---

1) Siehe Hamel: Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik, Math. Ann. Bd. 59, 1904.

Digitized by Google

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\chi_\nu)$$

(5) $$\delta\mathfrak{r} = \sum \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \chi_\nu}\delta\chi_\nu$$

(5a) $$\mathfrak{v} = \sum \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \chi_\nu}\dot{\chi}_\nu$$

(6) $$\delta\mathfrak{v} = \sum \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \chi_\nu}\delta\dot{\chi}_\nu$$

folgen, falls man jetzt nur die $\dot{\chi}$ variiert, und weiter

(7) $$\mathfrak{w} = \sum \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \chi_\nu}\ddot{\chi}_\nu + \cdots$$
$$\delta\mathfrak{w} = \sum \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \chi_\nu}\delta\ddot{\chi}_\nu,$$

falls man nur die Beschleunigungen variiert, so gilt statt (4) ebenso

(8) $$\int dm\,\mathfrak{w}\delta\mathfrak{w} = \sum\left(\frac{dp_\nu}{dt} - \frac{\partial E}{\partial \dot{\chi}_\nu}\right)\delta\ddot{\chi}_\nu,$$

wenn man auch hier nur die $\ddot{\chi}_\nu$ variiert und entsprechend die Beschleunigung $\mathfrak{w}$.

Liegt nun noch als vierte Invariante die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte vor

(9) $$\delta A = \int d\mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{r} = \sum_1^n K_\nu \delta\chi_\nu$$

so kann man das Grundgesetz der Mechanik ebenso gut nach Lagrange schreiben:

(10a) $$\frac{d}{dt}\int dm\,\mathfrak{v}\delta\mathfrak{r} - \delta E = \delta A$$

bzw. ausführlich

(10b) $$\sum\left(\frac{dp_\nu}{dt} - \frac{\partial E}{\partial \chi_\nu}\right)\delta\chi_\nu = \sum K_\nu \delta\chi_\nu$$

wie auch

(10c) $$\int dm\,\mathfrak{w}\delta\mathfrak{w} = \sum K_\nu \delta\ddot{\chi}_k = \int d\mathfrak{K}\delta w$$

falls keine weiteren Bedingungen für die virtuellen Verschiebungen $\delta\chi_\nu$ bestehen, diese also frei sind.

Aus (10c) folgt sofort das *Gauß'sche Prinzip des kleinsten Zwanges*

(11) $$\delta S = \delta\,\tfrac{1}{2}\int dm\left(\mathfrak{w} - \frac{d\mathfrak{K}}{dm}\right)^2 = 0$$

Digitized by Google

Das Integral $\int \frac{d\mathfrak{R}^2}{dm}$ ist nötigenfalls ein *Hellingersches.*

Wenn nun aber nichtholonome Bedingungen höherer Art *der ersten Klasse*, d. h. Bedingungen der Form

$$f(\dot{\chi}_\nu, \chi_\mu) = 0$$

vorgeschrieben sind, und die f in den $\dot{\chi}_\nu$ nicht linear zu sein brauchen, *sehen wir das Gauß'sche Prinzip noch als richtig an, das Prinzip der virtuellen Arbeiten, das in der Lagrangeschen Fassung enthalten ist, muß aber neu definiert werden.*

Wir führen in analoger Weise wie in unserer Arbeit[1]) *Allgemeine nichtholonome Geschwindigkeiten*

$$\frac{d\vartheta_\sigma}{dt} \equiv \omega_\sigma = f_\sigma(\dot{\chi}_\nu, \chi_\mu) \qquad \sigma = 1, 2 \ldots n \tag{12}$$

ein und damit die *Quasikoordinaten* ϑ_σ, und denken nus die Bedingungen durch

$$\omega_\sigma = 0, \qquad \sigma = m+1, m+2 \ldots n \tag{13}$$

dargestellt. Die Gleichungen (12) seien auflösbar zu

$$\dot{\chi}_\nu = F_\nu(\omega_\sigma, \chi_\mu) \tag{14}$$

es sei also die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \left\| \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{\chi}_\nu} \right\| = \| f_{\sigma,\nu} \| \tag{15}$$

nicht null. Umgekehrt sei $\frac{\partial F_\nu}{\partial \omega_\sigma}$ mit $F_{\nu,\sigma}$ bezeichnet, sodaß in bekannter Weise

$$\sum f_{\sigma\nu} F_{\nu\tau} = \delta_{\sigma,\tau} \tag{16}$$

gilt, wo $\delta_{\sigma,\tau}$ das bekannte Kroneckersche Symbol ist.

Definition: Wir führen virtuelle Verschiebungen der Quasikoordinaten durch

$$\delta\vartheta_\sigma = \sum f_{\sigma,\nu}\, \delta\chi_\nu \tag{17}$$

mit der Umkehrung

$$\delta\chi_\nu = \sum F_{\nu,\tau}\, \delta\vartheta_\tau$$

ein. Im linearen Fall stimmt das mit der üblichen Definition.

1) Hamel: Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik. Z. f. M. u Ph. Bd. 50. 1904.

Digitized by Google

Satz. Es gilt das Prinzip der virtuellen Arbeiten in der Lagrangeschen Form (10b) d. h.

$$(19)\qquad \sum_{\nu,\tau}\left(\frac{dp_\nu}{dt}-\frac{\partial E}{\partial \chi_\nu}\right)F_{\nu\tau}\,\delta\vartheta_\tau=\sum_{\nu,\tau}K_\nu F_{\nu\tau}\,\delta\vartheta_\tau,$$

sodaß wir wegen: $\delta\vartheta_\tau$ beliebig für $0\leqq\tau\leqq m$, $\delta\vartheta_\tau=0$ für $\tau>m$, die m Bewegungsgleichungen

$$(20)\qquad \sum_{\nu}\left(\frac{dp_\nu}{dt}-\frac{\partial E}{\partial \chi_\nu}\right)F_{\nu,\tau}=\sum_{\nu}K_\nu F_{\nu\tau}\qquad \tau=1,2\ldots m$$

bekommen.

Beweis: Dieselben Gleichungen folgen aus dem Gauß'schen Prinzip. Denn bei Variation der Beschleunigungen allein ist

$$\delta S=\int(dm\,\mathfrak{w}-d\mathfrak{K})\,\delta\mathfrak{w}=\sum\left(\frac{dp_\nu}{dt}-\frac{\partial E}{\partial\chi_\nu}-K_\nu\right)\delta\ddot{\chi}_\nu,$$

aber nach (14) ist

$$(21)\qquad \chi_\nu=\sum\frac{\partial F_\nu}{\partial\omega_\sigma}\frac{d\omega_\sigma}{dt}+\cdots=\sum F_{\nu,\sigma}\frac{d\omega_\sigma}{dt}+\cdots$$

also

$$(22)\qquad \delta S=\sum\left(\frac{dp_\nu}{dt}-\frac{\partial E}{\partial\chi_\nu}-K_\nu\right)F_{\nu,\sigma}\,\delta\frac{d\omega_\sigma}{dt},$$

da ja nur die Beschleunigungen variiert werden, also die $\frac{d\omega_\sigma}{dt}$, aber weder die χ_μ noch die $\dot{\chi}_\nu$, d. h. auch die ω_σ nicht. Die $\frac{d\omega_\sigma}{dt}$ können für $\sigma=1,2\ldots m$ beliebig variiert werden, also folgt (20).

Mithin stellt (20) eine erste Form der Bewegungsgleichungen dar, die sowohl aus dem Gauß'schen Prinzip des kleinsten Zwanges wie aus unserer Erweiterung des Prinzips der virtuellen Arbeiten folgt.

2. Eine zweite Form der Bewegungsgleichungen.

Nachdem das Prinzip der virtuellen Arbeiten klargestellt ist, können wir nun weiter mit (10a) aus **1** arbeiten:

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\int dm\,\mathfrak{v}\,\delta\mathfrak{r}-\delta E=\delta A.$$

Wir wollen konsequent statt der $\dot{\chi}_\nu$ die ω_σ aus **1**, (12) bzw. (14) einführen:

$$(2)\qquad \dot{\chi}_\nu=F_\nu(\omega_\sigma,\chi_\mu)$$

$$(3)\qquad \omega_\sigma=f_\sigma(\dot{\chi}_\nu,\chi_\mu).$$

Digitized by Google

Zunächst werde E umgerechnet, es sei

$$E(\dot{\chi}_\nu, \chi_\mu) = \mathfrak{E}(\omega_\sigma, \chi_\mu) \tag{4}$$

Dann werde die Arbeit des *Impulses* umgerechnet

$$\int dm\, \mathfrak{v}\delta\mathfrak{r} = \sum_\nu p_\nu \delta\chi_\nu = \sum_{\nu,\tau} p_\nu F_{\nu\tau}\delta\vartheta_\tau = \sum P_\tau \delta\vartheta_\tau \tag{5}$$

sodaß

$$P_\tau = \sum_\nu p_\nu F_{\nu\tau} \tag{6}$$

ist.

Satz: Es ist

$$P_\tau = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \omega_\tau}.$$

Beweis:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \omega_\tau} = \sum \frac{\partial E}{\partial \dot{\chi}_\nu}\frac{\partial \dot{\chi}_\nu}{\partial \omega_\tau} = \sum p_\nu F_{\nu\tau} = P_\tau \text{ nach (6).}$$

Natürlich ist umgekehrt

$$p_\nu = \sum f_{\tau,\nu} P_\tau$$

wegen (16) aus 1 bzw. der entsprechenden Gleichung

$$\sum_\tau f_{\tau\nu} F_{\sigma\tau} = \delta_{\nu,\sigma}. \tag{8}$$

Wir können daher die Zentralgleichung (1) auch schreiben

$$\frac{d}{dt}\sum P_\sigma \delta\vartheta_\sigma - \delta E = \delta A = \sum_\nu K_\nu \delta\chi_\nu = \sum K_\nu F_{\nu\sigma}\delta\vartheta_\sigma = \sum K_\sigma^* \delta\vartheta_\sigma \tag{9}$$

mit

$$K_\sigma^* = \sum_\nu K_\nu F_{\nu,\sigma}. \tag{10}$$

Aus (9) folgt weiter

$$\sum \frac{dP_\sigma}{dt}\delta\vartheta_\sigma + \sum P_\sigma \frac{d\delta\vartheta_\sigma}{dt} - \sum \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \omega_\mu}\delta\omega_\mu - \sum \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \chi_\nu} F_{\nu\sigma}\delta\vartheta_\sigma = \sum K_\sigma^* \delta\vartheta_\sigma$$

oder

$$\sum_\sigma \delta\vartheta_\sigma \left\{\frac{dP_\sigma}{dt} - \frac{d\mathfrak{E}}{\partial\vartheta_\sigma} - K_\sigma^*\right\} + \sum P_\mu \left(\frac{d\delta\vartheta_\mu}{dt} - \frac{\delta d\vartheta_\mu}{dt}\right) = 0, \tag{11}$$

wenn wir symbolisch

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \chi_\nu}\frac{\partial \dot{\chi}_\nu}{\partial \omega_\sigma} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \vartheta_\sigma} \tag{12}$$

Digitized by Google

schreiben. Im Falle eines Potentials können wir ebenso symbolisch

$$K_\sigma^* = \sum K_\nu F_{\nu,\sigma} = -\sum \frac{\partial U}{\partial \chi_\nu}\frac{\partial \dot\chi_\nu}{\partial \omega_\sigma} = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta_\sigma}$$

schreiben.

Wir brauchen also noch die Übergangsgleichungen für

$$\frac{d\delta\vartheta_\mu}{dt} - \frac{\delta d\vartheta_\mu}{dt}$$

oder ausführlich nach 1, 12) und 17)

$$\frac{d}{dt}\sum_\nu f_{\mu,\nu}\delta\chi_\nu - \delta f_\mu = \sum\left(\frac{df_{\mu,\nu}}{dt} + \frac{\partial f_\mu}{\partial \chi_\nu}\right)\delta\chi_\nu + \sum\frac{\partial f_\mu}{\partial \dot\chi_\nu}\left(\frac{d\delta\chi_\nu}{dt} - \delta\dot\chi_\nu\right)$$

$$= \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\mu}{\partial \dot\chi_\nu} - \frac{\partial f_\mu}{\partial \chi_\nu}\right)\delta\chi_\nu$$

(es ist ja wegen 2) in 1 auch

$$d\delta\chi_\nu - \delta d\chi_\nu = 0) \tag{13}$$

sodaß die *Übergangsgleichungen heißen*

$$\frac{d\delta\vartheta_\mu}{dt} - \frac{\delta d\vartheta_\mu}{dt} = \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\mu}{\partial \dot\chi_\nu} - \frac{\partial f_\mu}{\partial \chi_\nu}\right)F_{\nu,\sigma}\,\delta\vartheta_\sigma \tag{14}$$

Setzt man dies in (11) ein, so erhält man, da $\delta\vartheta_\sigma = 0$ für $\sigma > m$, beliebig für $\sigma \leqq m$ ist,

$$\frac{dP_\sigma}{dt} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \vartheta_\sigma} + \sum_{\mu,\nu} P_\mu\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\mu}{\partial \dot\chi_\nu} - \frac{\partial f_\mu}{\partial \chi_\nu}\right)F_{\nu,\sigma} = K_\sigma^* \qquad \sigma = 1, 2 \ldots m \tag{15}$$

als zweite Form der Bewegungsgleichungen. Hier sind bereits die zu den $\omega_\sigma = f(\dot\chi_\nu, \chi_\mu)$ zugehörigen Impulse P_σ und die entsprechende Form der kinetischen Energie und der Arbeit eingeführt, aber das dritte Glied links enthält noch die $\dot\chi_\nu$. Das soll nun noch geändert werden.

Bemerkenswert ist wohl das Auftreten der Lagrangeschen Ausdrücke für die f_μ.

Die weitere Umrechnung ist leicht. Aus (16) in 1 folgt zunächst

$$\frac{d}{dt}\sum_\nu f_{\mu\nu}F_{\nu\sigma} = 0 \text{ für alle } \sigma, \mu$$

also

$$\sum\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\mu}{\partial \dot\chi_\nu}F_{\nu\sigma} = -\sum f_{\mu,\nu}\frac{d}{dt}\frac{\partial F_\nu}{\partial \omega_\sigma}. \tag{16}$$

Digitized by Google

Weiter aber folgt aus

$$df_\mu = \sum_\tau \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{\chi}_\tau} d\dot{\chi} + \sum \frac{\delta f_\mu}{\partial \chi_\nu} d\chi_\nu,$$

wenn man jetzt die $f_\mu = \omega_\mu$ und die χ_ν als unabhängig ansieht und $df_\mu = 0$ setzt, ebenso alle $d\chi_\nu$ bis auf eines

$$0 = \sum \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{\chi}_\tau} d\dot{\chi}_\tau + \frac{\partial f_\mu}{\partial \chi_\nu} d\chi_\nu$$

oder

$$(17) \quad \frac{\partial f_\mu}{\partial \chi_\nu} = -\sum \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{\chi}_\tau} \frac{\partial \dot{\chi}_\tau}{\partial \chi_\nu} = -\sum \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{\chi}_\tau} \frac{\partial F_\tau}{\partial \chi_\nu} = -\sum_\tau f_{\mu\tau} \frac{\partial F_\tau}{\partial \chi_\nu}.$$

Mit (16) und (17) aber wird aus dem dritten Glied von (15)

$$-\sum_{\mu,\nu} P_\mu \left(f_{\mu,\nu} \frac{d}{dt} \frac{\partial F_\nu}{\partial \omega_\sigma} - \sum_\tau f_{\mu,\tau} \frac{\partial F_\tau}{\partial \chi_\nu} F_{\nu,\sigma} \right)$$
$$= -\sum_{\mu,\nu} P_\mu f_{\mu,\nu} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F_\nu}{\partial \omega_\sigma} - \sum_\tau \frac{\partial F_\nu}{\partial \chi_\tau} F_{\tau,\sigma} \right).$$

Somit ergibt sich folgende Abänderung von (15)

$$(18) \quad \frac{dP_\sigma}{dt} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \vartheta \sigma} - \sum_{\mu,\nu} P_\mu f_{\mu,\nu} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F_\nu}{\partial \omega_\sigma} - \frac{\partial F_\nu}{\partial \vartheta_\sigma} \right) = K^*_\sigma.$$

Das Ziel ist erreicht, alles ist durch die $\omega_\sigma = f_\sigma$ ausgedrückt; denn auch die $f_{\mu,\nu}$ sind (als Unterdeterminanten der $F_{\mu,\nu} = \frac{\partial F_\mu}{\partial \omega_\nu}$ dividiert durch die Determinante der $F_{\mu,\nu}$) Funktionen der ω und elementar (linear) berechenbar.

Die Gleichungen (18) sind die naturgemäßen Verallgemeinerungen meiner als Lagrange-Eulersche bezeichneten Gleichungen, die in ihnen enthalten sind, falls die $F_{\mu,\nu}$ in den ω_ν linear sind. Sie sind die angemessenen Verallgemeinerungen der Lagrange'schen Gleichungen, weil sie nur mit den zu Anfang genannten Invarianten arbeiten und mit den gegebenen ω.

3. Ein Sonderfall: die kinetische Energie E selbst als ein Geschwindigkeitsparameter $E = \omega_1$.

Dann sind die Impulse alle null, bis auf einen: $P_1 \equiv 1$. Daher sind alle $\frac{dP_\sigma}{dt} = 0$, ferner ist

Digitized by Google

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \vartheta_\sigma} = 0.$$

Also lauten dann die Gleichungen

$$-\sum_\nu f_{1,\nu}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F_\nu}{\partial \omega_\sigma} - \frac{\partial F_\nu}{\partial \vartheta_\sigma}\right) = K_\sigma^* \quad (\sigma = 1, 2 \ldots m)$$

Kommen in den F_ν die χ nicht mehr explicit vor, so bleibt sogar nur

$$-\sum_\nu f_{1,\nu}\frac{d}{dt}\frac{\partial F_\nu}{\partial \omega_\sigma} = K_\sigma^*.$$

Beispiel: Sei für einen einzelnen Punkt im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum

$$E = \tfrac{1}{2}(\dot\chi_1^2 + \dot\chi_2^2 + \dot\chi_3^2) \equiv \omega_1.$$

und hat man die nichtholonome Bedingung

$$\omega_3 \equiv \tfrac{1}{2}(\dot\chi_3^2 - \dot\chi_1^2 - \dot\chi_2^2) = 0$$

sodaß

$$\dot\chi_3^2 = \dot\chi_1 + \dot\chi_2^2 + 2\omega_3 = 2(\omega_1 + \omega_3) - \dot\chi_3^2,$$

also

$$\dot\chi_3 = \sqrt{\omega_1 + \omega_3}$$
$$\dot\chi_1^2 + \dot\chi_2^3 = \dot\chi_3^2 - 2\omega_3 = \omega_1 - \omega_3$$

sind, so setze man etwa noch

$$\begin{aligned}
\dot\chi_1 &= \sqrt{\omega_1 - \omega_3}\cos\omega_2 = F_1(\omega_1, \omega_1, \omega_3)\\
\dot\chi_2 &= \sqrt{\omega_1 - \omega_3}\sin\omega_2 = F_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\\
\dot\chi_3 &= \sqrt{\omega_1 + \omega_3} \qquad\quad = F_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3).
\end{aligned}$$

Ihre neun partiellen Ableitungen sind, wenn man nach der Differentiation $\omega_3 = 0$ setzt,

$$F_{1,1} = \frac{1}{2\sqrt{\omega_1}}\cos\omega_2 \qquad F_{1,2} = -\sqrt{\omega_1}\sin\omega_2 \qquad F_{1,3} = -\frac{1}{2\sqrt{\omega_1}}\cos\omega_2$$

$$F_{2,1} = \frac{1}{2\sqrt{\omega_1}}\sin\omega_2 \qquad F_{2,2} = \sqrt{\omega_1}\cos\omega_2 \qquad F_{2,3} = -\frac{1}{2\sqrt{\omega_1}}\sin\omega_2$$

$$F_{3,1} = \frac{1}{2\sqrt{\omega_1}} \qquad F_{3,2} = 0 \qquad F_{3,3} = \frac{1}{2\sqrt{\omega_1}}$$

Die Determinante dieser F ist $\frac{1}{2\sqrt{\omega_1}}$.

Digitized by Google

Daher die noch gebrauchten

$$f_{11} = \sqrt{\omega_1}\cos\omega_2, \quad f_{12} = \sqrt{\omega_1}\sin\omega_2, \quad f_{1,3} = \sqrt{\omega_1}.$$

Die Bewegungsgleichungen heißen infolgedessen

$$-\sqrt{\omega_1}\left\{\cos\omega_2\frac{d}{dt}\frac{\cos\omega_2}{2\sqrt{\omega_1}} + \sin\omega_2\frac{d}{dt}\frac{\sin\omega_2}{2\sqrt{\omega_1}} + \frac{d}{dt}\frac{1}{2\sqrt{\omega_1}}\right\}$$
$$= K_1^* = K_1\frac{\cos\omega_2}{2\sqrt{\omega_1}} + K_2\frac{\sin\omega_2}{2\sqrt{\omega_1}} + K_3\frac{1}{2\sqrt{\omega_1}}$$

und

$$-\sqrt{\omega_1}\left\{\cos\omega_2\frac{d}{dt}(-\sqrt{\omega_1}\sin\omega_2) + \sin\omega_2\frac{d}{dt}\sqrt{\omega_1}\cos\omega_2\right\}$$
$$= K_2^* = K_1(-\sqrt{\omega_1}\sin\omega_2) + K_2\sqrt{\omega_1}\cos\omega_2.$$

Bei diesem einfachen Beispiel wäre der direkte Weg über Gleichung (20) aus 1 einfacher gewesen. Das wird immer dann der Fall sein, wenn die χ_ν selbst explicit nicht vorkommen.

4. Ausgangspunkt sei die Darstellung in Quasikoordinaten vom linearen Typus.

D. h. es seien gegeben:

(1) $$E = E(\omega_\nu, \chi_\mu); \quad \omega_\nu = \frac{d\vartheta_\nu}{dt},$$

(2) $$d\delta\vartheta_\nu - \delta d\vartheta_\nu = \sum_{\varrho,\sigma}\beta_\nu^{\varrho,\sigma}d\vartheta_\varrho\,\delta\vartheta_\sigma$$

(3) $$\delta A = \sum K_\sigma\delta\vartheta_\sigma,$$

sodaß mit $\pi_\sigma = \dfrac{\partial E}{\partial\omega_\sigma}$

(4) $$\int dm\,\mathfrak{w}\,\delta\mathfrak{r} = \sum\delta\vartheta_\sigma\left\{\frac{d\pi_\sigma}{dt} - \frac{\partial E}{\partial\vartheta_\sigma} + \sum_{\nu,\varrho}\pi_\nu\beta_\nu^{\varrho,\sigma}\omega_\varrho - K_\sigma\right\}.$$

Nun werde neu

(5) $$\frac{d\varphi_\sigma}{dt} \equiv \Omega_\sigma = f_\sigma(\omega_\nu, \chi_\mu)$$

eingeführt und es seien die i. A. nichtholonomen Bedingungen

(6) $$f_\sigma = 0 \text{ für } \sigma = m+1, \ldots n$$

vorgeschrieben. Die Auflösung der Gleichungen (5) heißen wieder

(2) $$\omega_\nu = F_\nu\{\Omega_\sigma, \chi_\mu\}.$$

Dann läßt sich die Rechnung ganz entsprechend durchführen. Man

Digitized by Google

bekommt mit

8) $$E(\omega_\nu, \chi_\mu) = \mathfrak{E}(\Omega_\sigma; \chi_\tau)$$

9) $$\Pi_k = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \Omega_k}$$

als Bewegungsgleichungen

10) $$\frac{d\Pi_k}{dt} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \varphi_k} - \sum_{\tau,\nu} \Pi_\tau f_{\tau,\nu} \left\{ \frac{dF_{\nu,k}}{dt} - \frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_k} - \sum_{\varrho,\sigma} F_\varrho \beta_\nu^{\varrho\sigma} F_{\sigma,k} \right\} = K_k^*$$

Die Bezeichnungen sind analog wie vorher. Man kann z. B. die Euler'schen Gleichungen des starren Körpers auf irgend welche Quasikoordinaten umrechnen.

5. Nichtholonome Systeme höherer Art zweiter Klasse.

Darunter verstehen wir Bedingungen, in denen auch die Beschleunigungen vorkommen:

$$f(\ddot{\chi}_\nu, \dot{\chi}_\mu, \chi_\sigma) = 0.$$

Sollte ein gemischtes System vorliegen, teils erster teils zweiter Klasse, so denken wir uns die Bedingungen erster Klasse durch differenzieren auf Bedingungen zweiter Klasse zurückgeführt. Diese Bedingungen seien dann unabhängig voneinander hinsichtlich der $\ddot{\chi}_\nu$.

Satz. Soll das Gauß'sche Prinzip, das wir als maßgebend annehmen wollen, mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten bzw. dem Lagrange'schen Prinzip übereinstimmen, so haben wir die virtuellen Verrückungen gemäß

$$\sum \frac{\partial f}{\partial \ddot{\chi}_\nu} \delta\chi_\nu = 0$$

einzuschränken.

Beweis. Das Gauß'sche Prinzip

$$\int dm \mathfrak{w} \delta \mathfrak{w} = \int d\mathfrak{R} \delta \mathfrak{w}$$

kann auf die Form

$$\sum \left(\frac{dp_\nu}{dt} - \frac{\partial E}{\partial \chi_\nu} \right) \delta\ddot{\chi}_\nu = \sum K_\nu \delta\ddot{\chi}_\nu$$

gebracht werden, das Lagrange'sche auf die Form

$$\sum \left(\frac{dp_\nu}{dt} - \frac{\partial E}{\partial \chi_\nu} \right) \delta\chi_\nu = \sum K_\nu \delta\chi_\nu.$$

Beide Formen werden offenbar identisch, wenn man die sonst

Digitized by Google

freien $\delta\chi_\nu$ denselben Bedingungen unterwirft wie die $\delta\ddot{\chi}_\nu$, d. h. wenn man

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial \ddot{\chi}_\nu} \delta\ddot{\chi}_\nu = 0$$

ersetzt durch

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial \ddot{\chi}_\nu} \delta\chi_\nu = 0$$

w. z. b. w.

Bei diesen Systemen zweiter Klasse gibt es aber kein Analogon zu den Lagrange-Euler'schen Gleichungen, schon weil man E nicht umrechnen kann. Hier sind wohl die Appell'schen Gleichungen das angemessene Hilfsmittel.

Digitized by Google

Zur Theorie der diophantischen Gleichungen dritten und vierten Grades*).

Von E. Haentzschel in Berlin-Tempelhof.

Diophant kann sich rühmen der mathematischen Wissenschaft einen neuen Zweig hinzugefügt zu haben, es ist die „*Unbestimmte Analytik*". „*Arithmetisches*" hat er sein Werk genannt; es ist kein Lehrbuch, sondern eine Aufgabensammlung. „*Unbestimmte Aufgaben*" löst er auch mit Hilfe von rationalen Brüchen, ohne sich an die übliche Ganzzahligkeit gebunden zu halten. Die negativen Zahlen und das Irrationale haben bei ihm noch kein Bürgerrecht. Ein Problem in der heute üblichen Allgemeinheit anzufassen, war ihm fremd. Wir finden daher bei ihm die folgenden Zahlenaufgaben:

$$z^3 = 8x^3 + x^2 - 8x - 1$$

mit der Lösung $x = \frac{14}{13}$, $z = \frac{15}{13}$, und

$$z^3 = 8x^3 - x^2 + 8x - 1,$$

welche Aufgabe er für unlösbar erklärt, da er mit dem negativen Wert $x = -\frac{2}{11}$, $z = -\frac{15}{11}$ nichts anzufangen weiß. Erst *Fermat* (1608—1665) hat die positive Lösung $x = \frac{549}{296}$, $z = \frac{146}{37}$ gefunden. Im folgenden sollen die beiden Aufgaben aus einem allgemeinen Ansatz gelöst, und ferner Teillösungen entwickelt werden für das umfassendere Problem: Eine diophantische Aufgabe ist gelöst; neue Aufgaben anzugeben, deren Lösung abhängig ist von derjenigen der soeben gedachten Aufgabe.

§ 1. Unter der Voraussetzung, daß der vorgelegte kubische Ausdruck gleich Null gesetzt *eine rationale Wurzel* x_1 besitzt, führen wir in

$$\text{(I)} \quad z^3 = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

für x den Bruch ein:

$$\text{(IIa)} \quad x = \frac{\pm v x_1 + a_0^2 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)[x_1 (x_2 + x_3) - 2 x_2 x_3]}{\pm v - a_0^2 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 + x_3 - 2 x_1)}$$

*) Vorgetragen in der 338. Sitzung am 22. Juni 1938.

Digitized by Google

und für z:

$$(\text{II b}) \qquad z = \frac{-2a_0(x_1-x_2)(x_1-x_3)s}{\pm v + a_0^2(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_2+x_1-x_3)},$$

so sind s und v durch die Gleichung verbunden:

$$(\text{III}) \qquad v^2 = 4s^3 + a_0^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2.$$

Das Formelpaar (II) halte ich für neu in Beziehung auf den charakterisierten Sonderfall von (I); es hängt also alles von der Lösung der Gleichung (III) ab. *Diophant* stellt zuerst die Aufgabe

$$(1) \qquad z^2 = 8x^3 + x^2 - 8x - 1 = 8(x+\tfrac{1}{8})(x-1)(x+1).$$

Wir wählen

$$x_1 = -\tfrac{1}{8}; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1,$$

dann ist

$$(2) \qquad x = \frac{\mp v - 1008}{\pm 8v + 126}; \quad z = \frac{63s}{\pm 4s + 63};$$

$$(3) \qquad v^2 = 4s^3 + 126^2.$$

Indem man s mit der elliptischen Funktion $\wp(u)$ und v mit $\wp' u = \frac{d\wp u}{du}$ identifiziert, erkennt man das Vorhandensein der folgenden 3 Grundlösungen von (3):

$$\wp(u_1) = s = 18; \ \wp'(u_1) = v = \pm 198; \ x = \tfrac{5}{9}, \quad z = -\frac{14}{9}; \ x = -\frac{67}{95}, \ z = \frac{126}{95};$$

$$(4) \qquad \wp(u_2) = s = -\frac{189}{25}; \ \wp'(u_2) = v = \pm\frac{126.118}{125}; \ x = \frac{14}{13}, \quad z = \frac{15}{13}; \ x = -\frac{1118}{1069}, \ z = -\frac{945}{1069};$$

$$\wp(u = \tfrac{2}{3}\omega) = 0; \quad v = \pm 126; \quad x = +1, \ z = 0; \quad x = -1; \ z = 0.$$

Diese 3 Grundlösungen fordern nunmehr zu bilden:

$$(5) \qquad s = \wp(n_1 u_1 \pm n_2 u_2 \pm a \cdot \tfrac{2}{3}\omega),$$

wo n_1 und n_2 die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bezeichnen, a aber nur 0, 1, 2 sein darf. Ich habe etwa 20 solcher Zahlenpaare (s, v) berechnet, die gegen 40 Paare (x, z) zu entwickeln gestatten. Unter diesen fanden sich außer dem von *Diophant* angegebenen $x = \frac{14}{13}$, $z = \frac{15}{13}$ noch folgende *positive* Paare:

Digitized by Google

$$x = \frac{67}{31}, \frac{67469}{47219}, \frac{281079}{256745}, \frac{766777}{764473},$$

(6) $$z = \frac{126}{31}, \frac{110880}{47219}, \frac{320068}{256745}, \frac{289800}{764473},$$

$(u_1 + \frac{4}{3}\omega)$, $(2u_1 + \frac{2}{3}\omega)$, $(u_1 - u_2 + \frac{2}{3}\omega)$, $(2u_1 + 2u_2 + \frac{4}{3}\omega)$.

Unter den kleinzahligen Lösungen sind bemerkenswert:

(7) $$z = 0, -\frac{18}{7}, \frac{63}{65}, -\frac{63}{8}, -\frac{36}{25}, \frac{28}{23}, -\frac{14}{9}.$$

$$x = +1, -\frac{11}{7}, -\frac{16}{65}, -\frac{65}{16}, \frac{7}{25}, -\frac{9}{23}, \frac{5}{9},$$

$(\frac{2}{3}\omega)$ $(u_1 + \frac{4}{3}\omega)$ $(u_1 + \frac{2}{3}\omega)$ $(u_2 + \frac{2}{3}\omega)$ $(u_1 + u_2 + \frac{2}{3}\omega)$ (u_1).

§ 2. Wir wenden uns nun der zweiten von *Diophant* gestellten Aufgabe zu:

(1) $$z^3 = 8x^3 - x^2 + 8x - 1 = 8(x - \tfrac{1}{8})(x - i)(x + i)$$

Wir wählen

$$x_1 = \tfrac{1}{8}; \quad x_2 = \sqrt{-1}; \quad x_3 = -\sqrt{-1}.$$

Alsdann ist

(2) $$x = \frac{\pm v - 1040}{\pm 8v + 130}; \quad z = \frac{-65s}{\pm 4v + 65}.$$

(3) $$v^2 = 4s^3 - 130^2.$$

Wir stellen die beiden Grundlösungen fest:

(4) $$\wp(u_1) = s = 65; \quad v = \pm 1040;$$
$$\wp(u_2) = s = \frac{325}{9}; \quad v = \pm \frac{11180}{27}.$$

Bilden wir (5) $\wp(n_1 u_1 \pm n_2 u_2)$ und das dazu gehörige v, so erhält man Lösungen der Aufgabe, unter denen sich folgende positive auszeichnen:

$$x = \frac{16}{63}, \frac{549}{296} \text{ (Fermat)}, \frac{302}{661}, \frac{9.11377}{64.12271}, \frac{1727}{72.191}, \cdots$$

(6) $$z = \frac{65}{63}, \frac{146}{37} \qquad \frac{975}{661}, \frac{65.2129}{32.12271}, \frac{577}{18.191}, \cdots$$

(u_1) $(2u_1)$ (u_2) $(u_1 - u_2)$ $(2u_1 + 2u_2)\ldots$

Kleinzahlige negative Lösungen sind:

Digitized by Google

$$(7)\qquad \begin{aligned} x &= -\frac{2}{11},\quad 0,\quad -\frac{29851}{27432},\quad -\frac{63}{16},\quad \frac{94073}{16.49149},\ \cdots \\ z &= -\frac{15}{11},\quad -1,\quad -\frac{9490}{3429},\quad -\frac{65}{8},\quad -\frac{65.2129}{8.49149},\ \cdots \end{aligned}$$

§ 3. Wenn Euler die Lösung von Aufgaben, in denen ein kubischer Ausdruck zum Kubus gemacht werden soll, davon abhängig macht, daß a_0 bezw. a_3 ein *Kubus* ist, so tritt hier die Lösung der Gleichung (III) an die Stelle von (I). Reiches Zahlenmaterial ist namentlich für den Fall vorhanden, daß die Gleichung 3. Grades drei reelle Wurzeln hat; es ist nur nötig es zu sammeln. Nun ist es möglich, jede gelöste Aufgabe in den Mittelpunkt zu stellen von Scharen von neuen lösbaren Aufgaben, deren Ausdruck wir jetzt herleiten wollen. Gegeben sei

$$(I)\qquad z^3 = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3;$$

die hiermit vorgelegte Aufgabe sei gelöst, und die Lösung möge durch das Paar ($x = h$, $z = k$) dargestellt werden, so daß

$$k^3 = a_0 h^3 + 3a_1 h^2 + 3a_2 h + a_3$$

eine identische Gleichung ist. Wir machen in (I) die Substitution

$$(IV)\qquad x = \frac{ht - (a_1 h^3 + 2a_2 h + a_3)}{t + (a_0 h^2 + 2a_1 h + a_2)};\quad z = \frac{k z_1}{t + (a_0 h^2 + 2a_1 h + a_2)},$$

so ist

$$(V)\qquad z_1^3 = t^3 + 3C_{3,2}(h)\, t + C_{3,3}(h).$$

Wenn demnach (x, z) irgend eine Lösung von (I) ist, (h, k) eine andere, so vermitteln die Gleichungen (IV) die Lösungen (t, z_1) der neuen Aufgabe (V). Da h jeden für (I) zulässigen Wert annehmen darf, so stellt (V) mit seinen Covarianten

$$\begin{aligned} C_{3,2}(h) &= (a_0 a_2 - a_1^2) h^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) h + (a_1 a_3 - a_2^2), \\ C_{3,3}(h) &= V_0 h^3 + 3V_1 h^2 - 3V_2 h - V_3, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} V_0 &= a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3;\quad V_1 = a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2, \\ V_2 &= a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2;\quad V_3 = a_0 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3, \end{aligned}$$

ganze Scharen von kubischen Formen dar, die als kubische Aufgaben der „Unbestimmten Analytik“ lösbar sind. Stellen für den Augenblick x_i und t_i die Wurzeln von (I) bezw. (V) vor, und rechnet man t_i aus (IV) aus, so ergibt sich

Digitized by Google

$$t_i = (a_0 x_i + a_1) h + (a_0 x_i^2 + 3 a_1 x_i + 2 a_2) \quad i = 1, 2, 3,$$

also die Gleichungen von 3 reellen Geraden, wenn man 3 reelle Wurzeln annimmt. Im Sonderfalle kann also ein bestimmtes Dreieck mit (V) in Beziehung gebracht werden.

§ 4. Wir stellen uns jetzt die folgende Aufgabe: Ein diophantisches Problem 4. Grades

(VI) $$z^2 = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = f(x)$$

ist gelöst; es sollen von diesem in ihrer Lösbarkeit abhängige Probleme ermittelt werden.

Zunächst sei (h, k) eine Lösung von (VI), d. h. $x = h$, $z = k$ führt zu einer identischen Gleichung. Wir unterwerfen (VI) der Transformation

(VII) $$x = \frac{h t - (a_1 h^3 + 3 a_2 h^2 + 3 a_3 h + a_4)}{t + (a_0 h^3 + 3 a_1 h^2 + 3 a_2 h + a_3)};$$

$$z = \frac{k z_1}{[t + (a_0 h^3 + 3 a_1 h^2 + 3 a_2 h + a_3)]^2},$$

so entsteht

VIII) $$z_1^2 = t^4 + 6 C_4(h) t^2 + 4 C_6(h) t + (g_2 f^2(h) - 3 C_4^2(h)).$$

Der Voraussetzung nach sind alle Lösungen (x, z) von (VI) bekannt, im besonderen das Paar (h, k), also ist jedes die Gleichung (VIII) erfüllende Paar (t, z_1) bekannt. Da aber das Paar (h, k) beliebig ausgewählt werden darf, so stellt uns (VIII) eine große Schar von lösbaren diophantischen Problemen 4. Grades dar. In dem besonderen Falle, daß $f(x) = 0$ 4 *reelle Wurzeln* hat, führt die Transformation (VII) zu einer bildhaften Darstellung. Wir rechnen t aus (VII) aus und erhalten

$$t = \frac{(a_0 x + a_1) h^3 + 3 (a_1 x + a_2) h^2 + 3 (a_2 x + a_3) h + a_3 x + a_4}{(h - x)};$$

wird die Division ausgeführt, der Rest gleich Null gesetzt, so ist

(1) $$t = (a_0 x_i + a_1) h^2 + (a_0 x_i^2 + 4 a_1 x_i + 3 a_2) h + (a_0 x_i^3 + 4 a_1 x_i^2 + 6 a_2 x_i + 3 a_3).$$

Setzt man für x_i hier die 4 Wurzeln von (VI) ein, so stellt uns (1) die *Gleichung von 4 Parabeln* dar, die *zu je 3 einen Punkt gemeinsam haben*; die Koordinaten dieser 4 Punkte lauten für

Digitized by Google

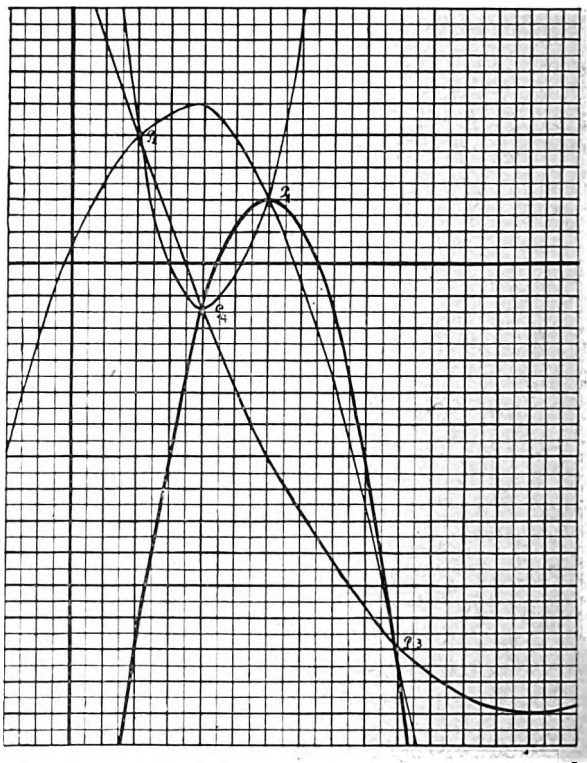
P_4: $h = x_1$; $t = -(a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 + 3 a_2 x_1 + a_3)$ für Parabel (2, 3, 4);
P_1: $h = x_2$; $t = -(a_0 x_2^3 + 3 a_1 x_2^2 + 3 a_2 x_2 + a_3)$ „ „ (1, 3, 4);
P_2: $h = x_3$; $t = -(a_0 x_3^3 + 3 a_1 x_3^2 + 3 a_2 x_3 + a_3)$ „ „ (1, 2, 4);
P_3: $h = x_4$; $t = -(a_0 x_4^3 + 3 a_1 x_4^2 + 3 a_2 x_4 + a_3)$ „ „ (1, 2, 3);

Die nebenstehende Figur erläutert diesen Zusammenhang

z. B. $z^2 = x^4 - 11 x^3 + 41 x^2 - 61 x + 30$,

$z^2 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$.

$a_0 = 1$; $a_1 = -\frac{11}{4}$; $a_2 = \frac{41}{6}$; $a_3 = -\frac{61}{4}$; $a_4 = 30$.



Die Gleichungen der 4 Parabeln heißen:

$$t = -\tfrac{3}{4} h^2 + \tfrac{5}{2} h + \tfrac{1}{4} \qquad t = -\frac{7}{4} h^2 + \frac{21}{2} h - \frac{59}{4}$$

$$t = \frac{1}{4} h^2 - \frac{7}{2} h + \frac{21}{4} \qquad t = \frac{9}{4} h^2 - \frac{19}{2} h + \frac{37}{4}.$$

Digitized by Google

Die Punkte, in denen sich je 3 Parabeln schneiden, sind

für $(1,3,4)$: $P_1(h=3,\ t=1)$; $(1,2,4)$ $P_2(h=1,\ t=2)$;
für $(1,2,3)$: $P_3(h=5,\ t=-6)$; $(2,3,4)$ $P_4(h=2,\ t=-\frac{3}{4})$.

§ 5. Einem anderen Gedankenkreise entspringt die folgende Lösung derselben Aufgabe. Das diophantische Problem

(VI) $$z^2 = a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4 = f(x)$$

sei gelöst; $C_4(x)$ und $C_6(x)$ mögen die zu $f(x)$ gehörenden Covarianten sein. Wir machen den Ansatz nach *Hermite* (Crelle **52**)

(1) $$s = -\frac{C_4(x)}{f(x)}.$$

Wir bilden jetzt

(2) $$s_1 = \frac{a_0a_3-a_1a_2+2a_1s}{2(a_1^2-a_0a_2-a_0s)}+\frac{c_1}{6c_0},$$

wir führen auch die Variable ξ ein durch den Ansatz

(3) $$x = \xi-\frac{c_1}{6c_0},$$

wo c_0 und c_1 die Koeffizienten aus $C(x)$ sind, nämlich

$$c_0 = a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3;\ c_1 = a_0^2a_4+2a_0a_1a_3-9a_0a_2^2+6a_1^2a_2.$$

Es entsteht

(4) $$s_1 = \frac{\xi^4+\frac{G_2}{2}\xi^2+2G_3\xi+\frac{G_2^2}{16}}{4\xi^3-G_2\xi-G_3},$$

wo

(5) $$G_2 = \frac{c_1^2}{3c_0^2}-\frac{4c_2}{c_0},$$
$$G_3 = -\frac{c_1^3}{27c_0^3}+\frac{2c_1c_2}{3c_0^2}-\frac{2c_3}{c_0}$$

bedeutet. Wollte man ξ aus (4) berechnen, so ist

(6) $$S_1 = 4h^3-G_2h-G_3 = 0$$

die *Resolvente* einer zu bildenden reziproken Gleichung, sie ist grundverschieden von der Euler-Strehlkeschen (Crelle **12**)

(7) $$S = 4l^3-g_2l-g_3 = 0$$

für

Digitized by Google

$$(8)\qquad \begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3. \end{aligned}$$

Zwischen den Invarianten (5) und (8) besteht der Zusammenhang:

$$(9)\qquad \frac{c_0^2}{4}(G_2^3 - 27 G_3^2) = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Nunmehr geben wir (2) die Form:

$$(IX)\qquad a_0\left(s_1 - \frac{c_1}{6 c_0} + \frac{a_1}{a_0}\right)(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 s) = \frac{c_0}{2}.$$

Unsere Voraussetzung ging dahin, das diophantische Problem

$$(VI)\qquad z^2 = f(x)$$

sei gelöst. Wie die Weierstraßsche Formel

$$(X)\qquad x - x_0 = \frac{\pm\sqrt{f(x_0)}\sqrt{S} + \frac{1}{2} f'(x_0)\left(s - \frac{1}{24} f''(x_0)\right) + \frac{1}{24} f(x_0) f'''(x_0)}{2\left[s - \frac{1}{24} f''(x_0)\right]^2 - \frac{1}{48} f(x_0) f^{(4)}(x_0)}$$

zeigt, ist für x_0 als Anfangslösung vor allem

$$(7)\qquad S = 4 s^3 - g_2 s - g_3$$

zu bilden; aus ihm sind die Fermatschen Ketten abzuleiten. Aus den uns bekannten Paaren $(s, \sqrt{S})$ ist mit Hilfe von (IX) s_1 und weiter

$$(6)\qquad S_1 = 4 s_1^3 - G_2 s_1 - G_3$$

zu berechnen. Nun besteht der Zusammenhang

$$(XI)\qquad S = \frac{c_0^2}{4} \cdot \frac{S_1}{a_0^3\left(s_1 - \frac{c_1}{6 c_0} + \frac{a_1}{a_0}\right)^3}$$

oder

$$(XIa)\qquad S = \frac{c_0^2}{4} \cdot \frac{a_0 S_1\left(s_1 - \frac{c_1}{6 c_0} + \frac{a_1}{a_0}\right)}{a_0^4\left(s_1 - \frac{c_1}{6 c_0} + \frac{a_1}{a_0}\right)^4}.$$

Wie (X) zeigt, sind für s nur solche Werte brauchbar, die S zu einem vollen Quadrat machen. Demnach ist auch

$$(XII)\qquad a_0 S_1\left(s_1 - \frac{c_1}{6 c_0} + \frac{a_1}{a_0}\right) = \text{Quadrat}.$$

Digitized by Google

Dies ist aber ein Ausdruck 4. Grades, so daß wir ein neues diophantisches Problem gelöst haben.

Wir haben hier vor uns das erste Glied einer beliebig langen Kette von Formen 4. Grades und dementsprechend von diophantischen Aufgaben. Denn nunmehr können wir ansetzen:

$$\text{VIa)} \qquad z_1^2 = (4s_1^3 - G_2 s_1 - G_3)\left(a_0 s_1 - \frac{a_0 c_1}{6 c_0} + a_1\right).$$

Von dieser Aufgabe wissen wir durch (XIa), daß sie lösbar ist, weil es

$$7) \qquad v^2 = S = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

ist, zumal (VIa) dieselbe Resolvente wie (VI) hat, nur einer Bedingung ist sie unterworfen, c_0 darf nicht Null sein. Wenn wir jetzt (VIa) denselben Transformationen unterwerfen, wie es mit (VI) geschah, so treten die (5) entsprechenden Invarianten auf und man erhält das auf (VIa) folgende Glied der Kette. Diese Kette wollen wir den „*Begleiter*“ von (VI): $z^2 = f(x)$ nennen. Ein Sonderfall ist des Erwähnens wert; es kann $4s_1^3 - G_2 s_1 - G_3$ für einen Wert von s_1 ein vollständiges Quadrat werden, was auch von $\left(a_0 s_1 - \frac{a_0 c_1}{6 c_0} + a_1\right)$ gilt, dann ist dadurch die neue Aufgabe

$$(10) \qquad v_1^2 = 4s_1^3 - G_2 s_1 - G_3$$

gelöst. Endlich versäume man nicht dieselben Betrachtungen für den Fall anzustellen, daß an Stelle von $a_0 \ldots a_4$ der Zyklus $a_4 \ldots a_0$ tritt, bezw. $\frac{1}{x}$ statt x. Alsdann lauten die Invarianten

$$(11) \qquad \overline{G}_2 = \frac{c_5^2}{3 c_6^2} - \frac{4 c_4}{c_6}; \quad \overline{G}_3 = -\frac{c_5^3}{27 c_6^3} + \frac{2 c_4 c_5}{3 c_6^2} - \frac{2 c_3}{c_6}.$$

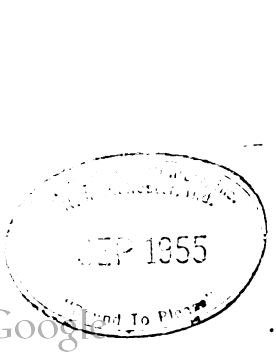
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

G Hz
G3 B4
[redacted]
V. 27-37

Digitized by Google

ALF Collections Vault
3 0000 097 254 365